

Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik

Journal of Applied Mathematics and Physics
Journal de Mathématiques et de Physique appliquées

ZAMP

Editores: J. Ackeret, E. Baldinger, E. Baumann
R. Mercier, P. Scherrer, E. Stiefel, F. Stüssi, W. Traupel, H. Ziegler

Redactor: R. Sängner

VOL. X – 1959



BIRKHÄUSER VERLAG · BASEL

SCHWEIZ · SWITZERLAND · SUISSE

INHALT - CONTENTS - SOMMAIRE

ORIGINALARBEITEN

Original Papers · Articles originaux

	Seite Page	Nr. Issue
ANLIKER, M.: A Numerical Method of Evaluating the Velocity Potential and the Minimum Drag Warping of Arbitrary Supersonic Wings	1	(1)
AZPEITIA, A. G., and NEWELL, G. F.: Theory of Oscillation Type Viscometers IV: A Thick Disk	15	(1)
BAŞ, E. B., PREUSS, L., und SCHNEIDER, W.: Über die relativistische Elektrenoptik elektrostatischer Beschleuniger	533	(6)
BLAND, D. R.: The Generalized Plane Strain of an Elasto-Plastic Material. . .	113	(2)
BORWEIN, D., and MITCHELL, A. R.: The Effect of Boundary Conditions and Mesh Size on the Accuracy of Finite Difference Solutions of Two-Point Boundary Problems	221	(3)
CHAKRAVORTI, A.: A Note on the Position of the Centre of Flexure of a Beam of Isotropic Material Having a Section Bounded by a Parabola and a Straight Line	333	(4)
CRANE, L. J.: Thermal Convection from a Horizontal Wire	453	(5)
ERISMANN, TH.: Der Analog-Interpolator	339	(4)
GILBERT, R. P.: Reverse <i>in situ</i> Combustion	544	(6)
GRAVALOS, F. G.: The Dynamics of Turbo-Flow	347	(4)
HOFMANN, R.: Zur Lösung spezieller Wärmeleitungsprobleme	233	(3)
JÄCKEL, H.: Eine Methode zur Berechnung quasistationärer Temperaturzustände bei gesteuerten Wärmeleitvorgängen in festen Körpern.	133	(2)
KANWAL, R. P.: Impulsive Rotatory Motion of a Circular Disk in a Viscous Fluid	552	(6)
KESTIN, J., LEIDENFROST, W., and LIU, C. Y.: On Relative Measurements of the Viscosity of Gases by the Oscillating-Disk Method	558	(6)
LÄUCHLI, P.: Iterative Lösung und Fehlerabschätzung in der Ausgleichsrechnung.	245	(3)
LING, F. F.: A Quasi-Iterative Method for Computing Interface Temperature Distributions	461	(5)
LIST, R.: Zur Aerodynamik von Hagelkörnern	143	(2)
LIST, R.: Der Hagelversuchskanal	381	(4)
MELIGY, A. S., and SHERBINI, M. A.: Energy Levels for the Coulomb Potential with Cut-off	474	(5)
NEWELL, G. F.: Theory of Oscillation Type Viscometers V: Disk Oscillating Between Fixed Plates	160	(2)
NOWINSKY, J.: Thermoelastic Problem for an Isotropic Sphere with Temperature Dependent Properties	565	(6)
PATRY, J.: Sur la résolution numérique dans les cas limites des équations différentielles linéaires à coefficients sinusoidaux.	35	(1)
PHILIP, J. R.: Analysis of Turbulent Boundary Layers with Zero Pressure Gradient	478	(5)
ROTT, N.: On the Viscous Core of a Line Vortex II	73	(1)
ROY, A. K.: Estimation of the Critical Viscous Sub-Layer in Shock Wave Boundary Layer Interaction	82	(1)
ROY, D.: Resistance on a Circular Cylinder Due to any Number of Vortices Lying in two Rows	502	(5)
RUTISHAUSER, H.: Zur Matrizeninversion nach Gauss-Jordan	281	(3)
SCHAEFER, V. J., and DIETRICH, J. H.: The Seeding of Cumulus Clouds by Ground-Based Silver Iodide Generators	174	(2)

	Seite Page	Nr. Issue
Soo, S. L.: Friction and Heat Transfer of Compressible Flow into an Infinite Lattice of Flat Plates	291	(3)
UHLMANN, W.: Eine wahrscheinlichkeitstheoretische Begründung der Integrationsformeln von Newton-Cotes.	189	(2)

KURZE MITTEILUNGEN

Brief Reports · Communications brèves

ABDEL-MESSIH, M. A.: Zeros and Poles of Output Voltage of 3-Terminal Potentiometer Networks	207	(2)
BERNASCONI, S., und GOTSCH, G.: Über die Kondensation verschiedener Dämpfe bei adiabatischer Expansion	509	(5)
BRÜESCH, P.: Untersuchungen über die partielle Oxydation von pulverförmigem Kupferoxydul zu Kupferoxyd.	519	(5)
CHRISTELLER, S.: Ermittlung der Wurzeln einer Gleichung 4. Grades durch Aufspalten in quadratische Faktoren	525	(5)
GÜBELI, O.: Zur Bestimmung von Ultraspuren von Silberjodid in Regenwasser	310	(3)
HOFMANN, R.: Bemerkung zur Berechnung spezieller Potenzsummen.	416	(4)
ISSLER, W.: Eine Kuppel gleicher Festigkeit	576	(6)
MITRA, M.: Propagation of Elastic Waves in an Infinite Plate of Cylindrically Aelotropic Material	579	(6)
NIGAM, L. N.: Constant Shear Flow Past Two Circular Cylinders.	584	(6)
PRAGER, W., and SHIELD, R. T.: Minimum Weight Design of Circular Plates Under Arbitrary Loading	421	(4)
ROY, A. K.: Supersonic Flow Past a Convex Corner	592	(6)
ROY, D.: Resistance of a Circular Cylinder Due to a Pair of Vortices Moving Symmetrically	90	(1)
RUTISHAUSER, H.: Deflation bei Bandmatrizen	314	(3)
SAERMARK, K.: A Note on Addition Theorems for Mathieu Functions	426	(4)
VODIČKA, V.: Eine Klasse inhomogener Bessel-Gleichungen	603	(6)
WEBB, W. H.: Comments on H. Bergh and B. van den Berg's paper: 'On the Visualization of Laminar Boundary Layer Oscillations and the Transition to Turbulent Flow'	93	(1)
ZIEREP, J.: Ergänzung zum Aufsatz: «Der senkrechte Verdichtungsstoss am gekrümmten Profil»	429	(4)

VARIA

Miscellaneous · Divers

Advances in Space Science	216	(2)
Frühjahrstagung der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft vom 2. und 3. Mai 1959 in Brugg. Berichte über die Sitzungen für angewandte Physik und Mathematik:		
BAŞ, E. B., und CREMOSNIK, G.: Schweißen mit Elektronenstrahlen	432	(4)
BAŞ, E. B., und GAYDOU, F.: Über eine Fernfokus-Elektronenkanone und ihre Anwendungen.	435	(4)
BAŞ, E. B., PREUSS, L., und SCHNEIDER, W.: Über die relativistische Elektronenoptik elektrostatischer Beschleuniger	437	(4)
GUHL, H., LOBKOWICZ, B., und MARMIER, P.: Koinzidenzschaltung mit Schwingkreis	430	(4)
HÜRLIMANN, T., SCHMID, P., und WINKLER, H.: Reaktoroszillator zur Bestimmung makroskopischer Absorptionsquerschnitte von thermischen Neutronen	438	(4)
JUNG, H.: Hochempfindlicher Transistorenverstärker mit einem Eingangswiderstand von mehr als 5 MΩ	430	(4)

	Seite Page	Nr. Issue
LOTMAR, W.: Ein optischer Tiefentaster	443	(4)
STINGELIN, V.: Isotherme Strömungen in Raketendüsen	441	(4)
WIELAND, W.: Die Permeabilität von Pulverbetten	441	(4)
Herbsttagung der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft vom 13. und 14. September 1958 in Glarus. Berichte über die Sitzungen für angewandte Physik und Mathematik:		
BALLMOOS, F. VON: Statische und dynamische Eigenschaften supraleitender Zinnspulen	94	(1)
DRANGEID, K. E.: Aufnahme der Hystereseschleife von dünnen magnetischen Schichten	96	(1)
PATRY, J.: Sur une équation classique de la dynamique des réacteurs atomiques	100	(1)
10. Sitzung des Schweizer Komitees für Optik vom 18. November 1958 in Zürich. Zusammenfassung der Mitteilungen:		
KRAUS, TH.: Über die Evakuierungsgeschwindigkeit von Bedampfungsanlagen	319	(3)
LOTMAR, W.: Ein Objektiv für Profilprojektion	320	(3)
STETTLER, R.: Zur linearen Fehlertheorie optischer Prismen, insbesondere des Tripelprismas	321	(3)
Tagungsanzeigen:		
ILMAC - Internationale Fachmesse und Fachtagungen über Laboratoriumstechnik, Messtechnik und Automatik in der Chemie, in Basel.	527	(5)
Internationale Konferenz für numerische Informationsverarbeitung in Paris	104	(1)
International Symposium on Stress-Wave Propagation in Materials, at the Pennsylvania State University	103	(1)
Sixth National Symposium on Reliability and Quality Control in Electronics, Washington, D. C.	608	(6)
Symposium on Millimeter Waves, in New York City	103	(1)
Tagung für Elektronenmikroskopie in Freiburg i. B.	215	(2)
Tenth International Congress of Applied Mechanics 1960, at Stresa	103	(1)
Errata	105	(1)
Note bibliographique	103	(1)

BUCHBESPRECHUNGEN

Book Reviews · Notices bibliographiques

ALT, F. L.: Electronic Digital Computers (Academic Press, Inc., New York 1958) (Ref. A. Schai)	331	(3)
AMES, J. S., and MURNAGHAN, F. D.: Theoretical Mechanics. An Introduction to Mathematical Physics (Dover Publications, London and New York 1958) (Ref. H. Ziegler)	529	(5)
ANDERSON, T. W.: Introduction to Multivariate Statistical Analysis (John Wiley & Sons, New York 1948) (Ref. W. Saxer)	217	(2)
AUWÄRTER, M.: Ergebnisse der Hochvakuumtechnik und der Physik dünner Schichten (Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft mbH, Stuttgart 1957) (Ref. E. Baş)	330	(3)
BAK, B.: Elementary Introduction to Molecular Spectra (North Holland Publ. Co., Amsterdam 1954) (Ref. R. Sängler)	329	(3)
BÜRGERMEISTER, G.: Stabilitätstheorie mit Erläuterungen zu DIN 4114 (Akademie-Verlag, Berlin 1957) (Ref. H. Ziegler)	108	(1)
CAP, F.: Physik und Technik der Atomreaktoren (Springer-Verlag, Wien 1957) (Ref. W. Winkler)	219	(2)
COCHRAN, W. G., and COX, G. M.: Experimental Designs (John Wiley & Sons, New York 1957) (Ref. A. Linder)	109	(1)

	Seite Page	Nr. Issue
DEFANT, A. und F.: Physikalische Dynamik der Atmosphäre (Akademische Verlagsgesellschaft mbH, Frankfurt a. M. 1958) (Ref. W. Kuhn)	610	(6)
DORFNER, K.-R.: Dreidimensionale Überschallprobleme der Gasdynamik. Ergebnisse der angewandten Mathematik, Heft 3 (Springer-Verlag, Berlin 1957) (Ref. P. de Haller)	530	(5)
EHRRINGHAUS, A., und TRAPP, L.: Das Mikroskop (B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart 1958) (Ref. B. Zwicker)	532	(5)
EMMONS, H. W.: Fundamentals of Gas Dynamics. Bd. 3: High Speed Aerodynamics and Jet Propulsion (Princeton University Press, Princeton 1958) (Ref. P. de Haller)	326	(3)
FELLER, W.: An Introduction to Probability Theory and Its Applications. Bd. 1 (John Wiley & Sons, New York 1957) (Ref. W. Saxer)	217	(2)
FISHER, J. C., JOHNSTON, W. C., THOMSON, R., und VREELAND, T.: Dislocations and Mechanical Properties of Crystals (John Wiley & Sons, New York 1957) (Ref. W. Epprecht)	328	(3)
FLÜGGE, S.: Handbuch der Physik – Encyclopedia of Physics. Bd. 5, 1. Teil: Prinzipien der Quantentheorie (Springer-Verlag, Berlin 1958) (Ref. R. Jost)	110	(1)
— Bd. 34: Korpuskeln und Strahlung in Materie II (Springer-Verlag, Berlin 1958) (Ref. R. Jost)	217	(2)
— Bd. 28: Spektroskopie II (Springer-Verlag, Berlin 1957) (Ref. Hs. H. Günthard)	218	(2)
— Bd. 50: Astrophysik I: Sternoberflächen – Doppelsterne (Springer-Verlag, Berlin 1958) (Ref. M. Waldmeier)	324	(3)
— Bd. 26, 2. Teil: Licht und Materie (Springer-Verlag, Berlin 1958) (Ref. Hs. H. Günthard)	448	(4)
— Bd. 6: Elastizität und Plastizität (Springer-Verlag, Berlin 1958) (Ref. H. Ziegler)	529	(5)
— Bd. 51: Astrophysik II: Sternaufbau (Springer-Verlag, Berlin 1958) (Ref. M. Waldmeier)	531	(5)
— und CREUTZ, E.: Bd. 45, 2. Teil: Instrumentelle Hilfsmittel der Kernphysik (Springer-Verlag, Berlin 1958) (Ref. F. Heinrich)	609	(6)
FRANKLIN, PH.: An Introduction to Fourier Methods and the Laplace Transformation (Dover Publications, London and New York 1958) (Ref. E. Roth-Desmeules)	448	(4)
GUDERLEY, K. G.: Theorie schallnaher Strömungen (Springer-Verlag, Berlin 1957) (Ref. P. de Haller)	325	(3)
HAAR, D. TER: Introduction to the Physics of Many-Body Systems (Interscience Publishers, Inc., New York 1958) (Ref. R. Jost)	330	(3)
HUGHES, D. J., SANDERS, J. E., und HOROWITH, J.: Physics and Mathematics. Bd. 2: Progress in Nuclear Energy (Pergamon Press, London 1958) (Ref. P. Stoll)	326	(3)
HULST, H. C. VAN DE: Light Scattering by Small Particles (John Wiley & Sons, New York 1957) (Ref. R. Sängner)	445	(4)
KAUDERER, H.: Nichtlineare Mechanik (Springer-Verlag, Berlin 1958) (Ref. H. Ziegler)	111	(1)
KAUFMANN, H.: Dynamische Vorgänge in linearen Systemen der Nachrichten- und Regelungstechnik (R. Oldenbourg, München 1959) (Ref. H. Weber)	611	(6)
KAUFMANN, W.: Technische Hydro- und Aeromechanik (Springer-Verlag, Berlin 1958) (Ref. V. Stingelin)	449	(4)
KEMBLE, E. C.: The Fundamental Principles of Quantum Mechanics (Dover Publications, Inc., London and New York 1958) (Ref. R. Jost)	325	(3)
KITTEL, C.: Elementary Statistical Physics (John Wiley & Sons, New York 1958) (Ref. C. Enz)	448	(4)
KUNZ, W., und SCHINTLMEISTER, J.: Tabellen der Atomkerne. Teil I: Eigenschaften der Atomkerne. Bd. 1: Die Elemente Neutron bis Zinn (Akademie-Verlag, Berlin 1958) (F. Heinrich)	451	(4)

	Seite Page	Nr. Issue
KUTTERER, R. E.: Ballistik, 3. Aufl. (Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1959) (Ref. E. Roth-Desmeules)	611	(6)
LACEY, W. N., und SAGE, B. H.: Thermodynamics of One-Component Systems (Academic Press, New York 1957) (Ref. P. Grassmann)	105	(1)
LEFSCHETZ, S.: Differential Equations: Geometric Theory (Interscience Publishers, Inc., New York 1957) (Ref. E. Roth-Desmeules)	219	(2)
LEIGHTON, R. B.: Principles of Modern Physics (McGraw-Hill, London 1959) (Ref. R. Jost)	528	(5)
MATZ, W.: Die Wirbelschicht als Energieübertragungsfläche (Springer-Verlag, Berlin 1958) (Ref. P. de Haller)	109	(1)
MCCUSKEY, S. W.: Introduction to Advanced Dynamics (Addison-Wesley Publ. Co., Inc., Reading, Mass. 1959) (Ref. H. Ziegler)	452	(4)
MACMILLAN, W. D.: Statics and the Dynamics of a Particle (Dover Publications, London and New York 1958) (Ref. H. Ziegler)	452	(4)
MORENO, TH.: Microwave Transmission Design Data (Dover Publ., New York 1958) (Ref. F. Tank)	112	(1)
Nautical Almanac Office: Subtabulation, a Companion Booklet to Interpolation and Allied Tables (Her Majesty's Stationary Office, London 1958) (Ref. E. Stiefel)	107	(1)
NEUBER, H.: Kerbspannungslehre (Springer-Verlag, Berlin 1958) (Ref. H. Ziegler)	105	(1)
ÖPK, E. J.: Physics of Meteor Flight in the Atmosphere (Interscience Publ., Inc., New York 1958) (Ref. E. Roth-Desmeules)	612	(6)
OSWATITSCH, K.: Gas Dynamics. Applied Mathematics and Mechanics, Bd. 11 (Academic Press, New York 1956) (Ref. P. de Haller)	109	(1)
PAULI, W.: Wellenmechanik (Verlag des Vereins der Mathematiker und Physiker an der ETH, Zürich 1959) (Ref. A. Thellung)	531	(5)
PHISTER, M., JR.: Logical Design of Digital Computers (John Wiley & Sons, New York 1958) (Ref. A. Schai)	332	(3)
PLANCK, M.: Physikalische Abhandlungen und Vorträge (Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1958) (Ref. R. Jost)	111	(1)
PRAGER, W.: Problèmes de plasticité théorique (Dunod, Paris 1958) (Ref. H. Ziegler)	106	(1)
RICORDAN, J.: An Introduction to Combinatorial Analysis (John Wiley & Sons, New York 1958) (Ref. W. Saxer)	217	(2)
RIEZLER, W., und WALCHER, W.: Kerntechnik, Physik, Technologie, Reaktoren (B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart 1958) (Ref. W. Hälg)	450	(4)
SAUER, R., STIEFEL, E., TODD, J., und WALTHER, A.: Numerische Mathematik, Bd. 1, Heft 1 (Springer-Verlag, Heidelberg 1959) (Ref. H. Rutishauser)	450	(4)
SAXER, W.: Versicherungsmathematik, 2. Teil (Springer-Verlag, Berlin 1958) (Ref. H. Wyss)	220	(2)
SCHIEDEGGER, A. E.: Principles of Geodynamics (Springer-Verlag, Berlin 1958) (Ref. M. Weber)	530	(5)
SCHLICHTING, H.: Grenzschicht-Theorie, 3. Aufl. (G. Braun, Karlsruhe 1958) (Ref. P. de Haller)	108	(1)
SCHWINGER, J.: Quantum Electrodynamics (Dover Publ., Inc., London and New York 1958) (Ref. R. Jost)	325	(3)
SESTIER, A.: Les calculateurs numériques automatiques et leurs applications (Editions «Hommes et Techniques», Neuilly 1958) (Ref. E. Roth-Desmeules)	447	(4)
SIMON, H., und SUHRMANN, R.: Der lichtelektrische Effekt und seine Anwendungen (Springer-Verlag, Berlin 1958) (Ref. P. Junod)	329	(3)
SYNGE, J. L.: The Hypercircle in Mathematical Physics. A Method for the Approximate Solution of Boundary Value Problems (Cambridge University Press, Cambridge 1957) (Ref. P. Läuchli)	444	(4)
SZABO, I.: Höhere Technische Mechanik (Springer-Verlag, Berlin 1958) (Ref. Ch. Wehrli)	107	(1)

	Seite Page	Nr. Issue
WAYLAND, H.: Differential Equations Applied in Science and Engineering (D. Van Nostrand Co., Princeton, N. J. 1957) (Ref. E. Roth-Desmeules) . .	107	(1)
WEBER, C., und GÜNTHER, W.: Torsionstheorie (Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1958) (Ref. H. Ziegler)	106	(1)
WEISS, P.: Colloque National de Magnétisme (Centre National de la Recherche Scientifique, Paris 1958) (Ref. F. Hulliger)	528	(5)
WGL, Jahrbuch der Wissenschaftlichen Gesellschaft für Luftfahrt e. V. 1957 (Friedr. Vieweg, Braunschweig 1958) (Ref. G. Dätwyler)	327	(3)
ZELLER, K.: Theorie der Limitierungsverfahren. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Heft 15 (Springer-Verlag, Berlin 1958) (Ref. E. Roth-Desmeules)	447	(4)
ZEMANEK, H.: Elementare Informationstheorie (R. Oldenbourg, Wien und München 1959) (Ref. H. Weber)	608	(6)
ZURMÜHL, R.: Matrizen, 2. Aufl. (Springer-Verlag, Berlin 1958) (Ref. H. Ruttishauser)	445	(4)
ZYPKIN, JA. S.: Theorie der Relaissysteme der automatischen Regelung (R. Oldenbourg, München; Verlag Technik, Berlin 1958) (Ref. H. Weber) . .	446	(4)

AUTORENREGISTER

Index of Authors · Table des auteurs

- O = Originalarbeiten - Original Papers - Articles originaux
M = Kurze Mitteilungen - Brief Reports - Communications brèves
V = Varia - Miscellaneous - Divers
B = Buchbesprechungen - Book Reviews - Notices bibliographiques

ABDEL-MESSIH, M. A., M 207
ANLIKER, M., O 1
AZPEITIA, A. G., and NEWELL, G. F., O 15

BALLMOOS, F., V 94
BAŞ, E. B., B 330
BAŞ, E. B., und CREMOSNIK, G., V 432
BAŞ, E. B., und GAYDOUX, F., V 435
BAŞ, E. B., PREUSS, L., und SCHNEIDER, W., O 533, V 437
BERNASCONI, S., und GOTSCH, G., M 509
BLAND, D. R., O 113
BORWEIN, D., and MITCHELL, A. R., O 221
BRÜESCH, P., M 519

CHAKRAVORTI, A., O 333
CHRISTELLER, S., M 525
CRANE, L. J., O 453
CREMOSNIK, G., und BAŞ, E. B., V 432

DÄTWYLER, G., B 327
DIETRICH, J. H., and SCHAEFER, V. J., O 174
DRANGEID, K. E., V 96

ENZ, C., B 448
EPPRECHT, W., B 328
ERISMANN, TH., O 339

GAYDOUX, F., und BAŞ, E. B., V 435
GILBERT, R. P., O 544
GOTSCH, G., und BERNASCONI, S., M 509
GRASSMANN, P., B 105
GRAVALOS, F. G., O 347
GÜBELI, O., M 310
GUHL, H., LOBKOVICZ, B., und MARMIER, P., V 430
GÜNTHARD, HS. H., B 218, 448

HÄLG, W., B 450
HALLER, P. DE, B 108, 109, 325, 326, 530
HEINRICH, F., B 451, 609
HOFMANN, R., O 233, M 416
HULLIGER, F., B 528
HÜRLIMANN, T., SCHMID, P., und WINKLER, H., V 438

ISSLER, W., M 576

JÄCKEL, H., O 133
JOST, R., B 110, 111, 216, 325, 330, 528
JUNG, H., V 430
JUNOD, P., B 329

KANWAL, R. P., O 552
KESTIN, J., LEIDENFROST, W., and LIU, C. Y., O 558
KRAUS, TH., V 319

- LÄUCHLI, P., O 245, B 444
 LEIDENFROST, W., KESTIN, J., and LIU, C. Y., O 558
 LINDER, A., B 109
 LING, F. F., O 461
 LIST, R., O 143, 381
 LIU, C. Y., LEIDENFROST, W., and KESTIN, J., O 558
 LOBKOWICZ, B., GUHL, H., und MARMIER, P., V 430
 LOTMAR, W., V 320, 443

 MARMIER, P., GUHL, H., und LOBKOWICZ, B., V 430
 MELIGY, S., and SHERBINI, A., O 474
 MITCHELL, A. R., and BORWEIN, D., O 221
 MITRA, M., M 579

 NEWELL, G. F., O 160
 NEWELL, G., and AZPEITIA, A. G., O 15
 NIGAM, L. N., M 584
 NOWINSKY, J. L., O 565

 PATRY, J., O 35, V 100
 PHILIP, J. R., O 478
 PRAGER, W., and SHIELD, R. T., M 421
 PREUSS, L., BAŞ, E. B., und SCHNEIDER, W., O 533, V 437

 ROTH-DESMEULES, E., B 107, 219, 447, 448, 611, 612
 ROTT, N., O 73
 ROY, A. K., O 82, M 592
 ROY, D., O 502, M 90
 RUTISHAUSER, H., O 281, M 314, B 445, 450

 SAERMARK, K., M 426
 SÄNGER, R., B 329, 445

 SAXER, W., B 217, 218
 SCHAEFER, V. J., and DIETRICH, J. H., O 741
 SCHAI, A., B 331, 332
 SCHMID, P., HÜRLIMANN, T., und WINKLER, H., V 438
 SCHNEIDER, W., BAŞ, E. B., und PREUSS, L., O 533, V 437
 SHERBINI, A., and MELIGY, S., O 474
 SHIELD, R. T., and PRAGER, W., M 421
 SOO, S. L., O 291
 STETTLER, R., V 321
 STIEFEL, E., B 107
 STINGELIN, V., V 441, B 449
 STOLL, P., B 326

 TANK, F., B 112
 THELLUNG, A., B 531

 UHLMANN, W., O 189

 VODIČKA, V., M 603

 WALDMEIER, M., B 324, 531
 WEBB, W. H., M 93
 WEBER, H., B 446, 608, 611
 WEBER, M., B 530
 WEHRLI, CH., B 107
 WIELAND, W., V 441
 WINKLER, H., HÜRLIMANN, T., und SCHMID, P., V 438
 WINKLER, W., B 219
 WYSS, H., B 220

 ZIEGLER, H., B 105, 106, 108, 111, 452, 529, 530
 ZIEREP, J., M 429
 ZWICKER, B., B 532

Fasc. 1 (25. 1. 1959)	pag. 1–112
Fasc. 2 (25. 3. 1959)	pag. 113–220
Fasc. 3 (25. 5. 1959)	pag. 221–332
Fasc. 4 (25. 7. 1959)	pag. 333–452
Fasc. 5 (25. 9. 1959)	pag. 453–532
Fasc. 6 (25. 11. 1959)	pag. 533–612

Nachdruck verboten

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen und der Reproduktion auf photostatischem Wege oder durch Mikrofilm, vorbehalten

© Birkhäuser Verlag, Basel 1959

Printed in Switzerland

A Numerical Method of Evaluating the Velocity Potential and the Minimum Drag Warping of Arbitrary Supersonic Wings

By MAX ANLIKER, San Diego, Calif., USA¹⁾

Symbols

a	coefficient;
b	wing span;
b_1	box length in streamwise direction;
c_{root}	root chord;
f	arbitrary function;
i, j, k	subscripts;
m, n	integers, also nondimensional coordinates and subscripts;
p	pressure;
$\Delta p = p_u - p_l$	pressure difference between upper and lower wing surfaces;
q	dynamic pressure;
r	subscript;
w	downwash;
x, y	cartesian coordinates;
x^1, y^1	} nondimensional cartesian coordinates;
x_1, y_1	
$A(x, y)$	disturbed flow region within the forward Mach cone of the point (x, y) ;
C_L	lift coefficient;
C_D	drag coefficient;
D	pressure drag;
K	conversion factor;
M	Mach number;
Q	generalized aerodynamic force;
$R_{\bar{v}, \bar{\mu}}^v$	velocity potential influence coefficient;
S	wing area;
U	free-stream velocity;

¹⁾ CONVAIR, A Division of General Dynamics Corporation.

$Z(x, y)$	mean chord line;
α	angle of attack;
β	$\sqrt{M^2 - 1}$;
μ, ν $\bar{\mu}, \bar{\nu}$	} integers, also nondimensional coordinates and subscripts;
ψ	
$\Delta\psi = \psi_u - \psi_l$	velocity potential difference between upper and lower wing surfaces;
λ	Lagrangian multiplier;
ξ, η	cartesian coordinates;
ξ_1, η_1	nondimensional cartesian coordinates;
Φ	fundamental mode.

Introduction

For a supersonic aircraft the minimization of the pressure drag has become an essential problem within the design procedure and calls for practical methods of solution. Various authors [1-6]²⁾ have shown that for a prescribed lift the pressure drag of thin wings can effectively be reduced by an appropriate warping. For certain planforms the optimum drag to be gained by warping has been derived independent of any set of angle-of-attack distributions with the so-called harmonic method [7-13]. However, the problem of the rigorous evaluation of the corresponding optimum warping still remains to be solved. A practical approach to this problem is to approximate the warping by a series of functions, e. g., a power series, in the stream- and spanwise coordinates. Then, for a wing with fixed dimensions the drag can be expressed in terms of the unknown coefficients, which, finally, are determined by minimizing the drag and satisfying aerodynamic and geometric constraints.

In the case of sonic and supersonic wings with pointed tip wings KAINER has shown that satisfactory answers for the optimum warping are obtained if the latter is approximated by the first ten terms of a power series in the stream- and spanwise coordinates. He made use of analytical expressions for the pressure distribution which he derived earlier for such wings, assuming linearized potential flow and neglecting wing-body interference.

Comprehensive design studies now call for an extension of KAINER's work to arbitrarily-tapered wings with trailing-edge sweep. However, in view of the excessive labor, the generalization of his analytical expressions for the pressure distribution to such wings is not recommended. Instead, the adaptability of modern high speed digital computers suggests numerical ways of evaluating

²⁾ Numbers in brackets refer to References, page 13.

the drag in terms of the coefficients of the power series which approximates the optimum warping.

The process of solving supersonic flutter problems includes the evaluation of aerodynamic forces which often are computed by means of aerodynamic influence coefficients. These influence coefficients are defined as the pressure or velocity potential induced at a point of the lifting surface by its known motion. In general it is not possible to give closed form analytical expressions for aerodynamic influence coefficients and therefore numerical methods have to be applied.

Recent investigations on the prediction of nonsteady aerodynamic forces on elastic wings have shown that the so-called 'box method' can easily be adapted to programmed digital computation and leads to satisfactory answers for the pressure or velocity potential distribution. In the 'box method' a grid of boxes is overlayed on the disturbed flow region and the downwash within each box is considered to be constant. For the evaluation of generalized aerodynamic forces the use of velocity potential influence coefficients instead of pressure influence coefficients greatly reduces the amount of computational labor since closer approximation is observed for the same grid.

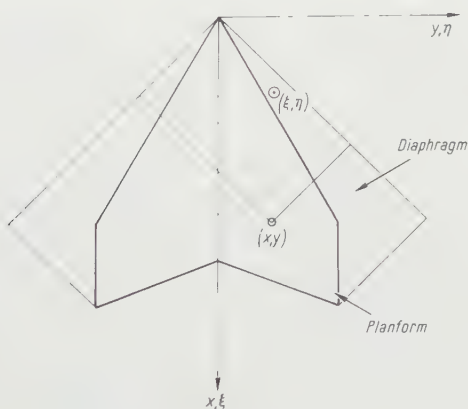


Figure 1

Typical wing planform with diaphragm.

Accuracy investigations on a digital computer program for the evaluation of oscillatory aerodynamic forces on supersonic wings by means of velocity potential influence coefficients lead to the idea of computing the steady state pressure drag due to the warping of the wings in the same manner. The program referred to is part of a digital computer routine for the flutter analysis of supersonic wings with straight leading and trailing edges and side edges parallel to the free stream direction (see Figure 1).

In this program the disturbed flow region is overlayed with a 'Mach box grid', as proposed by LI [16] e. g., a system of rectangular boxes, the diagonals of which are parallel to the Mach lines. The velocity potential influence coefficients are based on linearized potential flow theory neglecting wing-body interference. The fundamental modes are expressed by the first 21 terms of a power series in the stream- and spanwise coordinates.

Setting the frequency equal to zero and identifying a fundamental mode with the mean chord line of the warped wing and another one with the corresponding slope distribution, the drag due to lift is obtained in the form of a generalized aerodynamic force of this flutter program. If the warping is expressed by the first 10 terms of a power series in the stream- and spanwise coordinates, the drag due to each term can be computed as outlined and, finally, the minimum problem can be solved as described earlier.

The advantage of using such a numerical procedure is that there is practically no restriction with respect to the generality of the wing planform, e. g., the leading and trailing edges may have the form of piecewise continuous curves. With some modification, the procedure can also be used to solve the problem of the optimum thickness distribution of wings with arbitrary planforms, subsonic or supersonic leading edges, and blunt trailing edges. The author has successfully used velocity potential influence coefficients for the evaluation of the thickness drag in numerous cases. Verification of existing literature results showed excellent agreement.

Drag Due to Lift Computed from Velocity Potential Influence Coefficients

According to linearized potential flow theory the velocity potential $\psi(x, y)$ at a point (x, y) of the disturbed flow region of a thin wing can be expressed in terms of a distribution of sources:

$$\psi(x, y) = -\frac{1}{\pi} \iint_{A(x, y)} \frac{w(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x - \xi)^2 - \beta^2 (y - \eta)^2}}. \quad (1)$$

The (x, y) plane is the flattened mean chord surface of the wing, $w(\xi, \eta)$ the downwash in the point (ξ, η) , and $A(x, y)$ is the disturbed flow region within the forward Mach cone of the point (x, y) (see Figure 1).

The pressure distribution $p(x, y)$ and the velocity potential $\psi(x, y)$ are related by

$$p(x, y) = U \varrho \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (2)$$

where U is the free stream velocity and ϱ the density of the air.

The pressure drag D of wings with zero thickness is defined as

$$D = \iint_S \Delta p(x, y) \alpha(x, y) dx dy, \quad (3)$$

where S is the wing area and Δp the pressure difference between the upper and lower surfaces. In this equation

$$\Delta p = p_u - p_l = U \varrho \frac{\partial}{\partial x} [\psi_U - \psi_L] = U \varrho \frac{\partial(\Delta \psi)}{\partial x} = 2 U \varrho \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (4)$$

and $\alpha(x, y)$ represents the streamwise slope distribution of the mean chord.

Denoting the mean chord line of the wing by $Z(x, y)$, the streamwise slope $\alpha(x, y)$ becomes

$$\alpha(x, y) = \frac{\partial Z(x, y)}{\partial x} \quad (5)$$

and the downwash is given by

$$w(x, y) = U \alpha(x, y) = U \frac{\partial Z(x, y)}{\partial x} \quad (6)$$

for points on the planform.

For points in the disturbed flow region off the wing planform, the downwash is determined by the condition

$$\Delta \psi = \psi_U - \psi_L = 0. \quad (7)$$

Subdividing the disturbed flow region by a 'Mach box grid' and assuming the downwash within each box to be constant and equal to the downwash in its center, the velocity potential becomes

$$\psi(x, y) = -\frac{1}{\pi} \sum_j w_j \iint_{A_j} \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 - \beta^2(y-\eta)^2}}. \quad (8)$$

In equation (8) the integration region A_j is the area of box j and w_j the downwash in its center. The summation has to be carried out over all the boxes the centers of which are within the disturbed flow region and the forward Mach cone of the point (x, y) .

If the following dimensionless coordinates are introduced:

$$x_1 = \frac{x}{b_1}, \quad y_1 = \frac{\beta y}{b_1}, \quad \xi_1 = \frac{\xi}{b_1}, \quad \eta_1 = \frac{\beta \eta}{b_1}, \quad (9)$$

where b_1 is the streamwise dimension of a box and β is defined as $\sqrt{M^2 - 1}$, the velocity potential difference between the upper and lower surface can be

written in the form

$$\Delta\psi(x, y) = 2\psi(x, y) = \frac{b_1}{\beta} \sum_j w_j \iint_{A_j} \frac{(-2/\pi) d\xi_1 d\eta_1}{\sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 - (y_1 - \eta_1)^2}}. \quad (10)$$

This expression has the advantage that the double integral over A_j does not depend on the Mach number and can be written in terms of the relative and nondimensional coordinates

$$\bar{v} = n - v \quad \text{and} \quad \bar{\mu} = m - \mu,$$

as indicated in Figure 2. The symbols n , m , v , and μ are all integers; n and v denote the number of boxes downstream and m and μ the number of boxes in the spanwise direction from an arbitrarily chosen origin box $(0, 0)$.

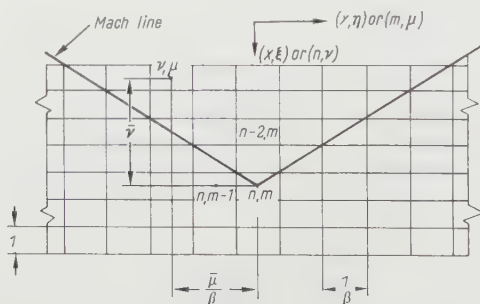


Figure 2
'Mach box grid' and reference systems.

The double integral in (10) is usually defined as the velocity potential influence coefficient and will be abbreviated in the following by

$$R_{\bar{v}, \bar{\mu}}^{\psi} = R_{v, -\bar{\mu}}^{\psi} = -\frac{2}{\pi} \iint_{A_j} \frac{d\xi_1 d\eta_1}{\sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 - (y_1 - \eta_1)^2}}. \quad (11)$$

Integrating (11), we obtain the formulae

$$\begin{aligned} R_{0,0}^{\psi} &= -1.0, \\ R_{\bar{v},0}^{\psi} &= -\frac{4}{\pi} \int_{\bar{v}-1/2}^{\bar{v}+1/2} \sin^{-1} \left(\frac{1}{2x} \right) dx = -\frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin^{-1} \mu}{\mu} - \ln \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \mu^2}}{\mu} \right) \right]_{\mu = \frac{1/2}{\bar{v}+1/2}}^{\mu = \frac{1/2}{\bar{v}-1/2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_{\bar{v}, \bar{v}}^{\psi} &= \frac{2}{\pi} \int_{\bar{v}-1/2}^{\bar{v}+1/2} \left[\sin^{-1} \left(\frac{\bar{v}-1/2}{x} \right) - \frac{\pi}{2} \right] dx \\
 &= -1 + \frac{2}{\pi} \left(\bar{v} - \frac{1}{2} \right) \left[\frac{\sin^{-1} \mu}{\mu} - \ln \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \mu^2}}{\mu} \right) \right]_{\mu=1}^{\mu=\frac{\bar{v}-1/2}{\bar{v}+1/2}} \\
 R_{\bar{v}, \bar{\mu}}^{\psi} &= \frac{2}{\pi} \int_{\bar{v}-1/2}^{\bar{v}+1/2} \left[\sin^{-1} \left(\frac{\mu-1/2}{x} \right) - \sin^{-1} \left(\frac{\bar{\mu}+1/2}{x} \right) \right] dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \left(\bar{\mu} - \frac{1}{2} \right) \left[\frac{\sin^{-1} \mu}{\mu} - \ln \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \mu^2}}{\mu} \right) \right]_{\mu=\frac{\bar{\mu}-1/2}{\bar{v}+1/2}}^{\mu=\frac{\bar{\mu}+1/2}{\bar{v}+1/2}} \\
 &\quad - \frac{2}{\pi} \left(\mu - \frac{1}{2} \right) \left[\frac{\sin^{-1} \mu}{\mu} - \ln \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \mu^2}}{\mu} \right) \right]_{\mu=\frac{\bar{\mu}-1/2}{\bar{v}-1/2}}^{\mu=\frac{\bar{\mu}+1/2}{\bar{v}-1/2}} \\
 &\quad (0 \leq \mu \leq \bar{v}) .
 \end{aligned} \tag{12}$$

The substitution of (11) into (10) yields

$$\Delta \psi_{n,m} = \frac{b_1}{\beta} \sum_{\bar{v}, \bar{\mu}} R_{\bar{v}, \bar{\mu}}^{\psi} w_{\bar{v}, \bar{\mu}}, \tag{13}$$

where the summation has to be carried out over all the boxes within the region of disturbed flow and the forward Mach cone.

Combining equations (3), (4) and (5), the pressure drag can be written in the form

$$D = \varrho U \iint_S \frac{\partial(\Delta \psi)}{\partial x} \cdot \frac{\partial Z}{\partial x} dx dy. \tag{14}$$

If the slope distribution $\partial Z / \partial x$ is continuous and can be differentiated, the partial integration of (14) with respect to x leads to

$$D = \varrho U \left\{ \int_{TE} \Delta \psi \frac{\partial Z}{\partial x} dy - \int_{LE} \Delta \psi \frac{\partial Z}{\partial x} dy - \iint_S \Delta \psi \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} dx dy \right\}, \tag{15}$$

where (LE) refers to leading edge and (TE) to trailing edge. Along the leading edge $\Delta \psi$ is zero, therefore (15) reduces to

$$D = \varrho U \left\{ \int_{TE} \Delta \psi \frac{\partial Z}{\partial x} dy - \iint_S \Delta \psi \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} dx dy \right\}. \tag{16}$$

In carrying out the double integration in (16) it is assumed that the velocity potential difference $\Delta \psi$ as well as $\partial^2 Z / \partial x^2$ within a box are constant and equal to the corresponding value in the center of the box. The $\Delta \psi$ values of boxes

which are cut by the trailing edge undergo a weighing process. Hence, the double integral in (16) can be replaced by a double summation over the entire planform:

$$\iint_S \Delta\psi \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} dx dy = \frac{b_1^2}{\beta} \sum_{n,m} \Delta\psi_{n,m} \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \right)_{n,m}. \quad (17)$$

Similarly, the integral along the trailing edge is replaced by a sum

$$\int_{TE} \Delta\psi \frac{\partial Z}{\partial x} dy = \frac{b_1}{\beta} \sum_m \Delta\psi_{n_{TE},m} \left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right)_{n_{TE},m}, \quad (18)$$

where $(\partial Z/\partial x)_{n_{TE},m}$ is the streamwise slope at the point of the trailing edge with the y -coordinate $m b_1/\beta$, and $\Delta\psi_{n_{TE},m}$ is the corresponding $\Delta\psi$ value obtained by linear interpolation. With (17) and (18) the drag becomes

$$D = \varrho U \left\{ \frac{b_1}{\beta} \sum_m \Delta\psi_{n_{TE},m} \left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right)_{n_{TE},m} - \frac{b_1^2}{\beta} \sum_{n,m} \Delta\psi_{n,m} \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \right)_{n,m} \right\}. \quad (19)$$

From (19) the drag coefficient

$$C_D = \frac{D}{q S} = \frac{D}{\varrho U^2 S/2} \quad (20)$$

can readily be evaluated.

The Evaluation of the 'Minimum Drag Warping'

a) Basic equations

The unknown warping $\alpha(x, y)$ which minimizes the drag due to lift can be approximated by a series of functions:

$$\alpha(x, y) = \sum_{i=1}^n a_i \alpha_i(x, y). \quad (21)$$

The pressure difference between the upper and lower surface induced by this warping is

$$\Delta p(x, y) = U \varrho \frac{\partial(\Delta\psi)}{\partial x} = U \varrho \frac{\partial}{\partial x} \sum_{i=1}^n a_i \Delta\psi_i = \sum_{i=1}^n a_i \Delta p_i, \quad (22)$$

where $\Delta\psi_i$ is the velocity potential difference and Δp_i the pressure difference caused by $\alpha_i(x, y)$. With (21) and (22) the drag coefficient C_D becomes a quadratic form of the unknown coefficients a_1, a_2, \dots, a_n :

$$C_D = \frac{1}{S} \iint_S \left[\sum_{j=1}^n a_j \alpha_j(x, y) \right] \left[\sum_{i=1}^n a_i \frac{\Delta p_i}{q} \right] dx dy$$

or

$$C_D = \sum_{i=1}^n a_i a_j \frac{1}{S} \iint_S \alpha_j(x, y) \frac{\Delta p_i}{q} dx dy. \quad (23)$$

Introducing the abbreviation

$$C_{Dij} = \frac{1}{S} \iint_S \alpha_j(x, y) \frac{\Delta p_i}{q} dx dy \quad (24)$$

the expression for C_D can be rewritten as

$$C_D = \sum_{i=1}^n C_{Dij} a_i a_j. \quad (25)$$

For subsonic leading edges, expression (25) has to be supplemented by the leading edge suction in terms of the coefficients a_1, a_2, \dots, a_n .

Finally, the aerodynamic and geometric constraints are also expressed in terms of the coefficients a_1, a_2, \dots, a_n :

$$f_1(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0, \quad f_2(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0, \quad f_k(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0. \quad (26)$$

Thus, with $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ as Lagrangian multipliers the minimum conditions are given by

$$\frac{\partial}{\partial a_i} \left[C_D + \sum_{r=1}^k \lambda_r f_r \right] = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (27)$$

Since the evaluation of the coefficients a_1, a_2, \dots, a_n from equations (26) and (27) can be considered as a familiar and straight forward operation, the remainder of this section deals with the more interesting part of the problem, the evaluation of the C_{Dij} 's.

b) Computation of the C_{Dij} 's

In a flutter investigation using a modal analysis the contribution of the i -th fundamental mode q_i to the j -th generalized aerodynamic force Q_j is defined as

$$Q_{ji} = \iint_S \Delta p_i(x, y) \varphi_j(x, y) dx dy, \quad (28)$$

where $\Delta p_i(x, y)$ is the pressure distribution induced by the i -th fundamental mode q_i . Setting the frequency equal to zero, Δp_i is given by

$$\Delta p_i = U \varrho \frac{\partial}{\partial x} (\Delta \psi) = U^2 \varrho \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{2}{\pi} \iint_{A(x, y)} \frac{(\partial \varphi_i / \partial x) d\xi d\eta}{\sqrt{(x - \xi)^2 - \beta^2 (y - \eta)^2}} \right). \quad (29)$$

Substituting (29) in (28) and integrating by parts with respect to x , one obtains

$$Q_{ji} = U \varrho \left\{ \int_{TE} \Delta \psi_i \varphi_j dy - \iint \Delta \psi_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} dx dy \right\}. \quad (30)$$

Comparing (16) and (30), one immediately realizes that for

$$\varphi_j(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \varphi_i(x, y) \quad (31)$$

equation (30) yields the pressure drag of a warped wing planform, the mean chord of which is defined by

$$Z(x, y) = \varphi_i(x, y). \quad (32)$$

In the case of pointed tip wings KAINER [6] has obtained satisfactory answers for the optimum warping by approximating it with the first 10 terms of a power series in the nondimensional stream- and spanwise coordinates

$$x^1 = \frac{x}{c_{root}}, \quad y^1 = \frac{y}{b/2}. \quad (33)$$

Encouraged by this, the mean chord is expressed accordingly as a power series in the same nondimensional variables and each term is defined as a fundamental mode. Then, the $C_{D_{ij}}$'s are determined from the generalized aerodynamic forces by multiplying them by a conversion factor K :

$$K = \frac{1}{S q}. \quad (34)$$

Comparison with Analytical Results

As a check of the accuracy achieved in computing drag by means of velocity potential influence coefficients, the $C_{D_{ij}}$'s of a delta wing with 60° sweep have been calculated for 3 different Mach numbers, corresponding to a subsonic, sonic and supersonic leading edge condition:

$$M = 1.715; \quad M = 2.0; \quad M = 2.5.$$

The results for $M = 2.0$ are tabulated in Table 1 in the form

$$C_{D_{ij}}^* = \beta C_{D_{ij}} = \sqrt{M^2 - 1} C_{D_{ij}} \quad (35)$$

together with the corresponding analytical results derived by KAINER. The fineness of the Mach box grid used in the numerical approach is indicated in the maximum number of boxes (n_{max}) along the reference chord. The accuracy of

C_{Dij}^* for Delta Wing with 60° Sweep. $M = 2.0$ (Sonic Leading Edge)
Upper figures are analytical results (KAINER), lower figures are numerical results.

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	4-00000 4-00238	1-69765 1-69889	2-66667 2-66308	1-00000 1-00225	1-27324 1-27286	2-00000 1-99324	0-67906 0-68131	0-80000 0-80072	1-01859 1-01632	1-60000 1-59048
1	1-33333 1-33254	0-70735 0-70755	1-00000 0-99881	0-46667 0-46741	0-56588 0-56545	0-80000 0-79762	0-33953 0-34048	0-38889 0-38898	0-47157 0-47026	0-66667 0-66251
2	2-66667 2-66984	1-13177 1-13357	2-00000 2-00000	0-66667 0-66804	0-90541 0-90572	1-60000 1-59682	0-45271 0-45489	0-55556 0-55660	0-75451 0-75317	1-33333 1-32619
3	0-66667 0-66746	0-40744 0-40820	0-53333 0-53333	0-28889 0-28978	0-33953 0-33970	0-44444 0-44352	0-21989 0-22085	0-24762 0-24799	0-29103 0-29051	0-38095 0-37889
4	1-00000 1-00188	0-54891 0-55030	0-80000 0-80000	0-36667 0-36820	0-45742 0-45792	0-66667 0-66328	0-26839 0-26995	0-31429 0-31508	0-39208 0-39160	0-57143 0-56834
5	2-00000 2-00476	0-86014 0-86289	1-60000 1-60158	0-51111 0-51386	0-71679 0-71799	1-33333 1-33174	0-34923 0-35173	0-43810 0-43969	0-61439 0-61399	1-14286 1-13762
6	0-40000 0-40079	0-26837 0-26917	0-33333 0-33353	0-20000 0-20085	0-23005 0-23036	0-28571 0-28324	0-15729 0-15819	0-17500 0-17543	0-20129 0-20107	0-25000 0-24873
7	0-53333 0-53492	0-33630 0-33767	0-44444 0-44510	0-24127 0-24264	0-28825 0-28896	0-38095 0-38063	0-18478 0-18614	0-21111 0-21192	0-25222 0-25221	0-33333 0-33190
8	0-80000 0-80238	0-45136 0-45351	0-66667 0-66766	0-30476 0-30682	0-38688 0-38806	0-57143 0-57095	0-22439 0-22635	0-26667 0-26796	0-33852 0-33869	0-50000 0-49785
9	1-60000 1-60634	0-69846 0-70209	1-33333 1-33650	0-41905 0-42229	0-59808 0-60075	1-14286 1-14285	0-28825 0-29111	0-36667 0-36878	0-52385 0-52432	1-00000 0-99650

the numerical approach with the indicated value for n_{max} can be described by the maximum deviation Δ_{max} of the numerical $C_{D_{ij}}^*$ from KAINER's analytical values:

$$M = 1.715, \quad n_{max} = 20, \quad \Delta_{max} = 3\%;$$

$$M = 2.0, \quad n_{max} = 20, \quad \Delta_{max} = 1\%;$$

$$M = 2.5, \quad n_{max} = 18, \quad \Delta_{max} = 2.5\%.$$

Since KAINER's analytical work has been extended through a numerical integration process [6] to drag computations on pointed-tip wings, the $C_{D_{ij}}^*$'s obtained with the two independent procedures for an arrow wing and a diamond wing are also compared (see Figure 3). The maximum deviation in these cases are:

$$\text{Arrow wing:} \quad M = 2.0, \quad n_{max} = 30, \quad \Delta_{max} = 1.6\%;$$

$$\text{diamond wing:} \quad M = 2.0, \quad n_{max} = 20, \quad \Delta_{max} = 5\%.$$

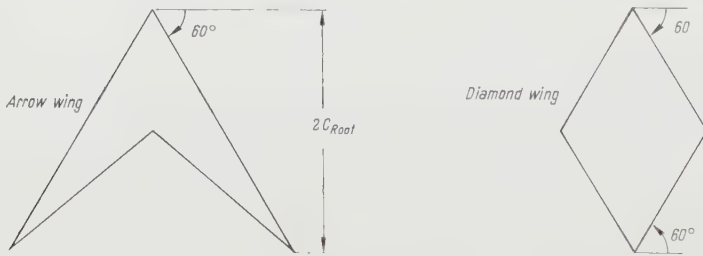


Figure 3
Pointed-tip wings.

It should be noted that KAINER's results for other than delta wings can not be considered as rigorous since they are obtained through a numerical integration process. The fact that in the present numerical setup using velocity potential influence coefficients n_{max} can easily be made larger than 30 indicates that more accuracy can be achieved than actually is anticipated in using linearized potential flow theory.

In order to illustrate the adequacy of the approximation of the optimum warping by the first ten terms of a power series in the nondimensional stream- and span-wise coordinates, the near optimum drag for a prescribed lift has been computed for the wing planform shown in Figure 4. For two Mach numbers corresponding to a sonic and supersonic leading edge condition the results are compared in Table 2 with the corresponding values obtained by using the harmonic method [13].

Table 2
Comparison of Harmonic and Numerical Methods

Mach number	$\left(\frac{C_D}{\beta C_L^2}\right)$ flat plate	$\left(\frac{C_D}{\beta C_L^2}\right)$ harmonic	$\left(\frac{C_D}{\beta C_L^2}\right)$ numerical
$M = 2.0$	0.234	0.1835	0.1865
$M = 2.5$	0.2315	0.2169	0.218

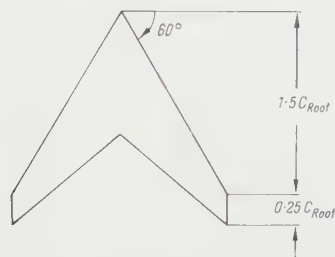


Figure 4
 Swept wing with side edges.

Concluding Remarks

The values for C_{Dij} obtained with this numerical method show good agreement with the corresponding analytical and semi-analytical values in the case of delta and pointed tip wings. There is no indication that the numerical method should be less accurate in cases of more general planforms, e. g., planforms with leading and trailing edges in the form of piecewise continuous curves, for which no analytical results are available for verification.

The possibility of a check of the final answer in the form of the near optimum drag against the value obtained from the harmonic method makes the numerical procedure outlined in this paper a convincing and practical method of solving the optimum drag problem.

REFERENCES

- [1] E. W. GRAHAM, *A Drag Reduction Method for Wings of Fixed Planform*, J. aeron. Sci. 19, No. 12, 823-825 (1952).
- [2] T. STRAND, *Minimum Drag Due to Lift for a Delta Wing with Sonic Leading Edges*, thesis (California Institute of Technology, 1954).
- [3] S. H. TSIEN, *The Supersonic Conical Wing of Minimum Drag*, J. aeron. Sci. 22, No. 12, 805-817 (1955).

- [4] T. DANSBY, R. T. STANCIL and J. D. STEWART, *Design of Minimum Drag Mean Surfaces for Pointed Tip Planforms at Supersonic Speeds*, Convair - Fort Worth Reports FZA - 114 and 115 (1957).
- [5] DORIS COHEN, *The Warping of Triangular Wings for Minimum Drag at Supersonic Speeds*, J. aeron. Sci. 24, No. 1, 67-68 (1957).
- [6] J. H. KAINER, *Calculation of Optimum Supersonic Delta Wings*, Convair San Diego Report ZA-259 (1957).
- [7] A. NIKOLSKY, Proceedings of the IXth International Congress of Applied Mechanics, Brussels, Belgium, September 1956.
- [8] M. N. KOGAN, *O Telakh Minimalnogo Soprotivleniia v Sverkhzvukovom Potoke Gaza*, Prikl. Mat. i Mekh. 21, No. 2, 207-212 (1957).
- [9] E. W. GRAHAM, *The Calculation of Minimum Supersonic Drag by Solution of an Equivalent Two-Dimensional Potential Problem*, Douglas Aircraft Report SM-22666 (1956).
- [10] R. T. JONES, *The Minimum Drag of Thin Wings in Frictionless Flow*, J. aeron. Sci. 18, No. 2, 75-81 (1951).
- [11] G. N. WARD, *On the Minimum Drag of Thin Lifting Bodies in Steady Supersonic Flows*, British ARC Report No. 18, 711 FM2459 (1956).
- [12] P. GERMAIN, *Sur le minimum de traînée d'une aile de forme en plan donnée*, C. R. 244, No. 9, 1135-1138 (1957).
- [13] H. YOSHIHARA, J. H. KAINER and T. STRAND, *On Optimum Thin Lifting Surfaces at Supersonic Speeds*, presented to the 26th Annual IAS Meeting in New York, January 1958.
- [14] S. PINES and J. DUGUNDJI, *Aerodynamic Flutter Derivatives of a Flexible Wing with Supersonic Edges*, ATC Report, No. ARTC-7 (1954).
- [15] S. PINES and J. DUGUNDJI, *Application of Aerodynamic Flutter Derivatives of Flexible Wings with Supersonic and Subsonic Edges*, Republic Aviation Corp., E-SAF-2.
- [16] TA LI, *Aerodynamic Influence Coefficients for an Oscillating Finite Thin Wing in Supersonic Flow*, J. aeron. Sci. 23, No. 7, 613-622 (1956).
- [17] H. ASHLEY and L. V. ANDREW, *Computation of Velocity Potential Aerodynamic Influence Coefficients for Unsteady Supersonic Flow - Applications to Flutter Stability Calculations*, Convair Dynamics Group Report DG-G-141.
- [18] A. DAWSON, V. EUBANKS and L. HARVELL, *Aerodynamic Influence Coefficient Program*, Convair Report ZA-270 (1957).

Zusammenfassung

Es wird ein numerisches Verfahren zur Ermittlung der annähernd optimalen Verwindung von dünnen Überschallflügeln beliebiger Form aufgezeigt. Die unbekannte Verwindung wird durch eine Reihe von Funktionen der in der Strömungs- und Flügelrichtung gemessenen Koordinaten approximiert. Mit Hilfe von Einflusszahlen wird die jedem der Glieder dieser Funktionsreihe entsprechende Geschwindigkeitspotentialverteilung berechnet, wobei die Gültigkeit der linearen Potentialströmungstheorie vorausgesetzt und die Wechselwirkung zwischen Rumpf und Flügel vernachlässigt wird. Dies erlaubt, den durch die Verwindung verursachten Widerstand als quadratischen Ausdruck in den unbekannten Koeffizienten der Funktionsreihe darzustellen. Wenn die Strömungsgeschwindigkeit senkrecht zur Flügelvorderkante kleiner ist als die Schallgeschwindigkeit, dann muss bei der Widerstandsrechnung die Saugkraft an der Flügelvorderkante berücksichtigt und ebenfalls als Funktion der unbekannten Koeffizienten ausgedrückt werden. Schliess-

lich werden diese Koeffizienten bestimmt, indem der Widerstand zu einem Minimum gemacht wird unter Berücksichtigung von aerodynamischen und geometrischen Nebenbedingungen.

Das Verfahren lässt sich auf Tragflächen anwenden, deren Vorder- und Hinterkanten die Form von stückweise stetigen Kurven haben. Ferner lässt es sich ausdehnen auf Kombinationen von Flügeln, Höhenflossen und Flugzeuge des Ententyps, sofern diese annähernd in einer Ebene liegen. Ausserdem kann es ohne weiteres zur Ermittlung der optimalen Flügelstärkenverteilung in Flügeln beliebiger Form und Flügelkanten in Unter- oder Überschallströmung sowie stumpfen Hinterkanten herangezogen werden.

Für Flügel mit geraden Vorder- und Hinterkanten und Seitenkanten parallel zur freien Strömungsrichtung ist ein Programm für ein Digitalrechengerät aufgestellt worden. In diesem Programm wird die unbekannte Verwindung durch die ersten zehn Glieder einer Potenzreihe in den dimensionslosen Koordinaten in Strömungs- und Flügelrichtung angenähert. Analytische Ergebnisse für Deltaflügel sind anhand dieser numerischen Methode verifiziert worden, wobei gute Übereinstimmung beobachtet wurde.

(Received: May 17, 1958.)

Theory of Oscillation Type Viscometers IV: A Thick Disk¹⁾

By ALFONSO GILL AZPETA²⁾ and GORDON FRANK NEWELL³⁾, Providence, R. I., USA

Abstract

The viscous drag exerted by a fluid on an oscillating disk is determined by methods similar to those used in Part III. The present paper differs from Part III in that the boundary layer thickness is assumed here to be small compared with both the thickness and the radius of the disk. An extrapolation of the formulae derived here agree sufficiently well, however, with those derived for the thin disk (boundary layer thickness large compared with the thickness but small compared with the radius) that it is possible to make an interpolation between the present formulae and those of Part III that will permit the evaluation of the drag for arbitrary shape disks provided the boundary layer thickness is small compared with the radius.

¹⁾ This research was supported by the United States Air Force through the Air Force Office of Scientific Research of the Air Research and Development Command, under contract No. AF 18 (600) 1548. Reproduction in whole or in part is permitted for any purpose of the United States Government. Part of the work was done while one of the authors (G. F. N.) was being supported by a grant from the Alfred P. Sloan Foundation.

²⁾ Brown University, now at the University of Massachusetts, Amherst, Massachusetts.

³⁾ Brown University.

1. Introduction

This series of papers has dealt so far with the oscillation of a cup filled with a fluid [1,2]⁴ and a thin disk surrounded by a fluid [3]. The treatment of the thin disk dealt with a situation in which the thickness of the disk was small compared with the boundary layer thickness of the fluid which in turn was small compared with the radius of the disk.

Even if one has a disk with a thickness very small compared with its radius, the restriction on the boundary layer thickness considerably limits the range of fluids for which the results of [3] can be used satisfactorily. We consider now another range of conditions, namely that for which the boundary layer thickness is small compared with both the thickness of the disk and the radius. We refer to this as a 'thick' disk to distinguish it from [3] even though the disk may in fact be thin from the point of view of geometry alone provided the above conditions are true.

A significant fraction of the experimental data that has been taken using an oscillating disk falls into this latter range and the main difficulty that restricts the use of the instrument as a viscometer is the lack of an adequate theoretical treatment of the fluid motion near the edges where the cylindrical walls meet the top and bottom surfaces of the disk. Part III also dealt mainly with an edge correction but it was based initially upon the analysis of the fluid motion near the edge of a disk of zero thickness (near a 180° turn) whereas the present paper will be based mainly on an analysis of the fluid motion near right angle turns.

Although we use many of the same methods as described in Part III, the details are quite different. The notation and general formulation have been described in Part I and also reviewed briefly in Part III, so they will not be repeated again here.

In essence the problem is to evaluate the integral

$$D(s) = \frac{\varrho \delta^5 s}{I} \iint_A \xi^2 \frac{\partial w}{\partial \eta} d\sigma, \quad (1)$$

equation (I,16), in which w is a solution of the equation

$$-\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{3}{\xi} \cdot \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = s w \quad (2)$$

⁴) Numbers in brackets refer to References, page 34. Equation numbers and other references to earlier parts of this series will be denoted by the prefix I, II or III. For the most part, however, the present paper is dependent only on Part I which also contains a table of notation.

with the boundary conditions

$$w = 1 \quad \text{on the surface } A \text{ of the disk.} \quad (2a)$$

The geometry and some of the notation are shown in Figure 1. It is convenient to deviate slightly from our previous convention, however, and define the coordinate η to be measured from the bottom of the disk rather than from the plane of symmetry. The coordinates x, η measure positions relative to one edge of the disk whereas ξ, η are the usual cylindrical coordinates measured from

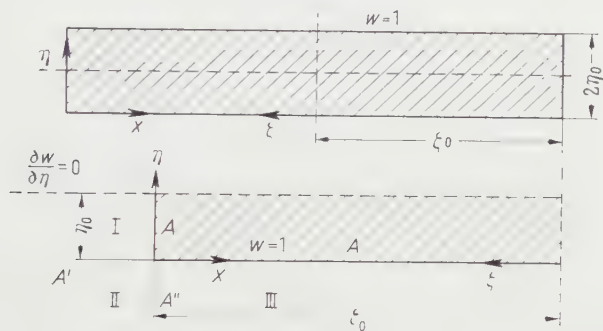


Figure 1
Geometry and notation.

the center of the bottom surface of the disk. The radius of the disk is ξ_0 , the thickness $2\eta_0$ and all lengths are measured in units of the boundary layer thickness $\delta = (\nu/\omega_0)^{1/2}$, as before. Because of the symmetry, it suffices to consider only the quarter space shown in Figure 1b, with the condition $\partial w / \partial \eta = 0$ at the symmetry plane $\eta = \eta_0$ and w finite on the axis $\xi = 0$ or $x = \xi_0$. The assumption that the boundary layer thickness is small compared with both the thickness and the radius of the disk is equivalent to the conditions

$$\eta_0 \gg 1 \quad \text{and} \quad \xi_0 \gg 1. \quad (3)$$

It is clear that the surfaces of constant w must be nearly vertical (w independent of η) in a region along the vertical walls of the disk and nearly horizontal (w independent of ξ) along the bottom of the disk except in the relatively small region within a distance of order 1 from the edge where the surfaces must join each other smoothly. The integral in equation (1), however, extends over the entire surface of the disk and the contribution to $D(s)$ from the region of distortion near the edge will be relatively small compared with the contribution from the remaining part of the surface.

One approximation we can make here is to neglect the edge entirely and consider a function w_1 defined in the various regions of Figure 1 by

$$w_1 = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\xi_0 K_1(\xi \sqrt{s})}{\xi K_1(\xi_0 \sqrt{s})} & \text{in I,} \\ 0 & \text{in II,} \\ \exp(\sqrt{s} \eta) & \text{in III} \end{array} \right\} \quad (4)$$

with K_j denoting the modified Bessel function of order j . This function does satisfy equations (2) and (2a) except for the fact that it is discontinuous across the boundaries A' , A'' of region II. Substitution of this into equation (1) gives for $D(s)$ the approximation

$$D_1(s) = m s^{3/2} \left[1 + 4 \frac{\eta_0}{\xi_0} \cdot \frac{K_2(\xi_0 \sqrt{s})}{K_1(\xi_0 \sqrt{s})} \right] \quad (5)$$

in which

$$m = \pi \varrho \delta^5 \xi_0^4 I^{-1}. \quad (6)$$

An asymptotic expansion of equation (5) for $\xi_0 \gg 1$ and $|s| \sim 1$ gives

$$D_1(s) = m s^{3/2} \left[1 + \frac{4 \eta_0}{\xi_0} \left(1 + \frac{3}{2 \xi_0 \sqrt{s}} + \frac{3}{8 \xi_0^2 s} + \dots \right) \right], \quad (5a)$$

an expression which has been used previously by KESTIN and WANG [4] and by KESTIN and MOSZYNSKI [5] to evaluate experimental data.

Although equation (4) represents a very good approximation to w far from the edge, it is very poor in and near region II. To improve this situation, it is convenient to modify equation (2) slightly. Everywhere that w itself has a value appreciably different from zero, the first derivative term in equation (2) is smaller than the term $s w$, or possibly one of the other terms of equation (2), by a factor of order ξ_0^{-1} or less. We shall, therefore, consider here the simpler equation

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = s w \quad (7)$$

subject to the same boundary conditions, equation (2a).

If we should also neglect the edge effects in a manner analogous to the above, we would obtain an even simpler approximation than equation (4) namely

$$w_0 = \left\{ \begin{array}{ll} \exp(\sqrt{s} x) & \text{in I,} \\ 0 & \text{in II,} \\ \exp(\sqrt{s} \eta) & \text{in III.} \end{array} \right\} \quad (8)$$

This satisfies equation (7) except for the discontinuities on A' , A'' , and leads to the expression

$$D_0(s) = m s^{3/2} \left(1 + 4 \frac{\eta_0}{\xi_0} \right). \quad (9)$$

Equations (8) and (9) represent the leading terms in the asymptotic expansion of equations (4) and (5).

Rather than trying to determine a continuous solution of equation (7) directly, we shall seek instead a second solution of equation (7)

$$w_2 = w - w_0, \quad (10)$$

which will give a continuous solution when added to w_0 . The advantage of this is that w_2 is expected to decay exponentially in all directions. We may, therefore, disregard, for the moment at least, the boundary conditions at $\eta = \eta_0 \gg 1$ and $x = \xi_0 \gg 1$ by asking instead that $w_2 \rightarrow 0$ for η or $x \rightarrow \infty$. From the boundary conditions on w and the properties of w_0 , we obtain the following conditions for w_2 :

$$w_2(x, \eta) = 0 \quad \text{on } A, \quad (11a)$$

$$w_2(0_+, \eta) - w_2(0_-, \eta) = -\exp(\sqrt{s} \eta) \quad \text{on } A'', \quad (11b)$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial x} \quad \text{is continuous across } A'', \quad (11c)$$

$$w_2(x, \eta) = w_2(\eta, x). \quad (11d)$$

Conditions (11b), (11c) and (11d) guarantee that w and $\partial w / \partial x$ are continuous across A'' and A' .

An evaluation of w_2 in section 2 will immediately give a first edge correction to $D_0(s)$, (correct to the lowest power of ξ_0^{-1}), which will be improved in section 3 using variational methods.

2. Solution at a Right Angle Turn

The technique for solving equations (7) and (11) is based in part on the Wiener-Hopf method used previously in section III 2., but the geometry of the present problem is much more difficult to handle. Although we are interested in the solution of equations (7) and (11) for complex values of s and particularly for $s \sim i$, it is convenient to think of s as a real positive number. We can always obtain formulae for complex values of s by suitable analytic continuation of formulae obtained for real positive s .

We are interested in a solution w_2 defined only for $\eta \leq 0$ or $x \leq 0$ but it is desirable to have w_2 formally defined everywhere. We, therefore, choose $w_2 \equiv 0$ for $x > 0$ and $\eta > 0$. Actually we can simultaneously obtain other useful solutions of equation (7) which are defined for $\eta > 0$ and $x > 0$. For example, we could solve the corresponding problem for the fluid motion inside a cup near the edge, a problem which was considered previously in section II 3. There are, however, easier ways of finding solutions of equation (7) for the inside of a right angle turn than the method to be described here and there is not much to be gained by considering the two problems together.

Since w_2 is bounded and goes to zero exponentially for x or $\eta \rightarrow \pm \infty$, the double Fourier transform

$$A(p, q) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta e^{i(p x + q \eta)} w_2(x, \eta) \quad (12)$$

is assumed to exist for all real p and q and have an inversion

$$w_2(x, \eta) = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \int_{-\infty}^{+\infty} dq e^{-i(p x + q \eta)} A(p, q). \quad (13)$$

If we take the double Fourier transform of equation (7) and integrate by parts, we see that $A(p, q)$ satisfies the equation

$$\begin{aligned} (p^2 + q^2 + s) A(p, q) = & \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta e^{i q \eta} \left\{ \left[\frac{\partial w_2}{\partial x} - i p w_2 \right]_{x=0_-} - \left[\frac{\partial w_2}{\partial x} - i p w_2 \right]_{x=0_+} \right\} \\ & + \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{i p x} \left\{ \left[\frac{\partial w_2}{\partial \eta} - i q w_2 \right]_{\eta=0_-} - \left[\frac{\partial w_2}{\partial \eta} - i q w_2 \right]_{\eta=0_+} \right\}. \end{aligned}$$

Using the boundary conditions, equation (11), this can be simplified to

$$(p^2 + q^2 + s) A(p, q) = f(q) + f(p) - p (q - i\sqrt{s})^{-1} - q (p - i\sqrt{s})^{-1}, \quad (14)$$

in which

$$f(p) = \int_0^{\infty} dx e^{i p x} \left[\frac{\partial w_2}{\partial \eta} \right]_{\eta=0_-}. \quad (15)$$

Although $A(p, q)$ and $f(p)$ are both unknown, equation (14) at least imposes restrictions on the functional form of $A(p, q)$. Furthermore we see from equation (15) that $f(p)$ is defined and analytic for $0 \leq \text{Im } p$, i.e., in the upper half p -plane.

We now turn our attention to the properties of $w_2(x, 0_-)$, which is known to vanish for $x > 0$.

$$h(p) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipx} w_2(x, 0_-) dx = \int_{-\infty}^0 e^{ipx} w_2(x, 0_-) dx \quad (16)$$

is therefore defined and analytic for $\text{Im } p \leq 0$, in the lower half p -plane.

We can obtain a relation between the unknown functions $h(p)$ and $f(p)$ by making a partial inversion of $A(p, q)$, namely

$$h(p) = \lim_{\gamma \rightarrow 0_-} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iqy} A(p, q) dq. \quad (17)$$

The integral can be evaluated by substituting $A(p, q)$ from equation (14). Since $f(q)$ is analytic for $\text{Im } q \geq 0$, the path of integration can be closed in the usual way by a semi-circle in the upper half plane. The only singularities enclosed by the contour are simple poles at $q = i(s + p^2)^{1/2}$ and $q = i\sqrt{s}$. We thus obtain

$$2(s + p^2)^{1/2} h(p) = f(p) + f(i(s + p^2)^{1/2}) - \frac{i[\sqrt{s} - (s + p^2)^{1/2}]}{p} + \frac{\sqrt{s} - ip}{(p^2 + s)^{1/2}}. \quad (18)$$

This equation, as derived, is valid for real values of p , but the analytic continuations of $f(p)$ and $h(p)$ must satisfy equation (18) everywhere. Furthermore $f(p)$ must be analytic in the upper half plane and $h(p)$ analytic in the lower half plane. This information will permit us to determine the singularities of $h(p)$ in the upper half plane and the singularities of $f(p)$ in the lower half plane.

The presence of $f(i(s + p^2)^{1/2})$ as well as $f(p)$ in equation (18) will cause rather complicated branch points at $p = \pm i\sqrt{s}$. If we were to investigate the properties of $f(p)$ and $h(p)$ in the p -space, we would sooner or later be forced to perform an analytic continuation up infinitely many Riemann sheets. We can avoid this unpleasant necessity and at the same time simplify the algebra by making a multiple-valued transformation of the independent variable from p to θ . We let

$$p = i\sqrt{s} \sin \theta, \quad (19)$$

which gives

$$(s + p^2)^{1/2} = \sqrt{s} \cos \theta = \sqrt{s} \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right). \quad (19a)$$

This transformation produces a one-to-one mapping of the entire p -plane into a vertical strip in the complex θ -space with $-\pi/2 < \text{Re } \theta \leq \pi/2$. It also

maps the p -plane into every strip $(2m-1)\pi/2 < \operatorname{Re} \theta \leq (2m+1)\pi/2$ for every integer m .

For convenience in notation we write

$$f[\theta] \equiv f(i\sqrt{s} \sin \theta) = f(p), \quad h[\theta] \equiv h(i\sqrt{s} \sin \theta) = h(p) \quad (20)$$

so that equation (18) takes the form

$$2\sqrt{s} \cos \theta h[\theta] = f[\theta] + f\left[\frac{\pi}{2} - \theta\right] + \sec \theta + \operatorname{cosec} \theta + \tan \theta - \cot \theta. \quad (21)$$

Since $f(p)$ is analytic in the upper half plane, $f[\theta]$ is analytic in the image region $0 \leq \operatorname{Re} \theta \leq \pi/2$, regions I, I' of Figure 2. In particular, $f(p)$ is analytic

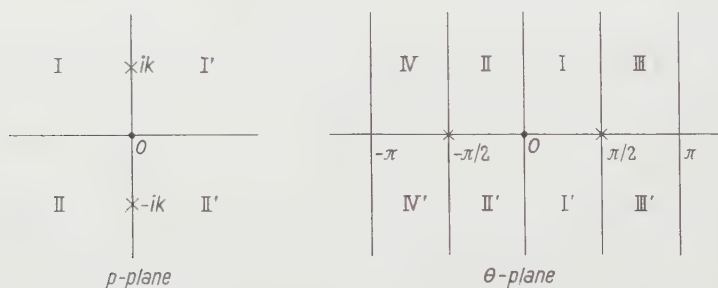


Figure 2

A multi-valued mapping, equation (19). The p -plane is on the left, the θ -plane on the right.

at $p = i\sqrt{s}$ and since $\sin(\pi/2 + \theta) = \sin(\pi/2 - \theta)$, equation (20) implies that the analytic continuation of $f[\theta]$ to the right of regions I, I' must satisfy the condition

$$f\left[\frac{\pi}{2} + \theta\right] = f\left[\frac{\pi}{2} - \theta\right]. \quad (22)$$

By similar arguments, we conclude that $h[\theta]$ is analytic in the strip $-\pi/2 \leq \operatorname{Re} \theta \leq 0$, regions II, II' and that the analytic continuation of $h[\theta]$ to the left of these regions must satisfy the condition

$$h\left[-\frac{\pi}{2} + \theta\right] = h\left[-\frac{\pi}{2} - \theta\right]. \quad (23)$$

Equations (22) and (23) imply that $f[\theta]$ is analytic at least in regions I, I', III and III' whereas $h[\theta]$ is analytic at least in regions II, II', IV and IV'.

Equation (21) now shows that with $h[\theta]$ analytic in II, II', IV and IV', the analytic continuation of $f[\theta]$ into these regions has only one singularity, a

simple pole on the boundary at $\theta = -\pi$. By similar arguments we conclude that $h[\theta]$ has a second order pole at $\theta = \pi/2$. We could now proceed to find the singularities of $f[\theta]$ in the next two strips to the right of III, III' and $h[\theta]$ in the strips to the left of IV, IV' using equations (22) and (23). Equation (21) would then determine the singularities of $h[\theta]$ and $f[\theta]$ respectively in these strips. By iterating this procedure, which is equivalent to the analytic continuation up successive Riemann sheets of the p -plane, we could determine the singularities of $f[\theta]$ and $h[\theta]$ in every strip.

A systematic way of doing this continuation is by means of a difference equation. If we solve equation (21) for $h[\theta]$ and substitute into equation (23), we obtain an equation involving only the function $f[\theta]$. By using equation (22) also, this equation can be put into the form

$$f[2\pi + \theta] + f\left[\frac{3\pi}{2} + \theta\right] + f\left[\frac{\pi}{2} + \theta\right] + f[\theta] = -2 \operatorname{cosec} \theta. \quad (24)$$

The most general solution of this finite difference equation is

$$f[\theta] = A(\theta) \cos \frac{2\theta}{3} + B(\theta) \sin \frac{2\theta}{3} + [C(\theta) + \theta D(\theta)] \cos(2\theta) + \operatorname{cosec} \theta, \quad (25)$$

in which $A(\theta)$, $B(\theta)$, $C(\theta)$ and $D(\theta)$ are unspecified periodic functions of period $\pi/2$.

If we allow $A(\theta)$ to have a singularity at some point $\theta = \theta_0$, then it will also have identical singularities at $\theta_0 + j\pi/2$ for every integer value of j including four points in the strip $-\pi < \operatorname{Re} \theta \leq \pi$. Since $f[\theta]$ is analytic everywhere in this strip, all of these singularities must be cancelled by singularities of $B(\theta)$, $C(\theta)$, $D(\theta)$ and/or $\operatorname{cosec} \theta$. The coefficients of $A(\theta)$, $B(\theta)$, $C(\theta)$ and $D(\theta)$ are linearly independent functions, however, and except for $\theta_0 = 0$ or $\pi/4$, the matrix of the four coefficients evaluated at each of the four points in question is non-singular. We conclude from this that it is impossible to choose $A(\theta)$, $B(\theta)$, $C(\theta)$ and $D(\theta)$ in such a way that their singularities cancel in equation (25) at all four points. The only places that these functions may have singularities are at the points $\theta = j\pi/2$ and $\theta = \pi/4 + j\pi/2$. The former singularities are necessary to cancel the poles of $\operatorname{cosec} \theta$ in equation (25). The latter may occur only in $C(\theta)$ and $D(\theta)$ and then only because the coefficient $\cos(2\theta)$ vanishes at these points.

The most general form for the $A(\theta)$ etc. consistent with the above description is

$$\left. \begin{aligned} A(\theta) &= A \cot(2\theta) + A'(\theta), \\ B(\theta) &= B \cot(2\theta) + B'(\theta), \\ C(\theta) &= C_1 \cot(2\theta) + C_2 \tan(2\theta) + C'(\theta), \\ D(\theta) &= D_1 \cot(2\theta) + D_2 \tan(2\theta) + D'(\theta), \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

in which A , B , C_1 , C_2 , D_1 , and D_2 are constants and $A'(\theta)$, $B'(\theta)$, $C'(\theta)$ and $D'(\theta)$ are entire periodic functions of period $\pi/2$. The additional requirement that the poles of the right side of equation (25) must have zero total residue at each of the four points $\theta = -\pi/2$, 0 , $+\pi/2$, and π gives us four simultaneous linear equations for the four constants A , B , C_1 , and D_1 , the solution of which is

$$A = \frac{4}{3}, \quad B = -\frac{4\sqrt{3}}{9}, \quad C_1 = \frac{2}{3} \quad \text{and} \quad D = \frac{4}{3\pi}. \quad (26a)$$

Equation (25) now takes the form

$$f[\theta] = \frac{2}{3} \cot(2\theta) \left[2 \cos \frac{2\theta}{3} - \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{2\theta}{3} + \left(1 - \frac{2\theta}{\pi} \right) \cos(2\theta) \right] - \operatorname{cosec} \theta + (C_2 + \theta D_2) \sin(2\theta) + A'(\theta) \cos \frac{2\theta}{3} + B'(\theta) \sin \frac{2\theta}{3} + [C'(\theta) + \theta D'(\theta)] \cos(2\theta). \quad (27)$$

We finally determine $f[\theta]$ uniquely by forcing it to vanish as $\operatorname{Im} \theta \rightarrow \pm \infty$. The necessity of this can be seen by the following arguments. We conclude from equations (15) and (16) along with a few obvious restrictions on the behavior of w_2 near $x = 0$, $\eta = 0$, that $f(p) \rightarrow 0$ for $\operatorname{Im} p \rightarrow +\infty$ and that $p h(p) \rightarrow -i$ for $\operatorname{Im} p \rightarrow -\infty$. This means that $f[\theta] \rightarrow 0$ for $\operatorname{Im} \theta \rightarrow \pm \infty$ with $0 \leq \operatorname{Re} \theta \leq \pi/2$ and because of equation (22) also with $\pi/2 \leq \operatorname{Re} \theta \leq \pi$. Similarly for $\operatorname{Im} \theta \rightarrow \pm \infty$, $\sin \theta h[\theta] \rightarrow 0$ for $-\pi \leq \operatorname{Re} \theta \leq 0$. These conditions along with equation (21) guarantee that $f[\theta] \rightarrow 0$ also for $\operatorname{Im} \theta \rightarrow \pm \infty$ and $\pi \leq \operatorname{Re} \theta \leq 0$. Finally equation (24) guarantees the same for all values of $\operatorname{Re} \theta$.

It is easy to select the unknown terms of equation (27) in such a way as to cancel the known infinite terms for $\theta \rightarrow \pm i\infty$. By choosing $B'(\theta) = 4/3$, one can eliminate the singularity due to the first term in equation (27). By choosing $A'(\theta) = 4/(3\sqrt{3})$, $C_2 = 2/3$ and $D_2 = -4/(3\pi)$ and finally $C'(\theta) = D'(\theta) = 0$, one successively cancels the singularities of the remaining terms. By using these values of $A'(\theta)$ etc. and some simple trigonometric identities, we obtain as a possible solution

$$f[\theta] = \frac{2}{3 \sin(2\theta)} \left[\frac{4}{\sqrt{3}} \cos \left(\frac{4\theta}{3} - \frac{\pi}{6} \right) + 1 - \frac{2\theta}{\pi} - 3 \cos \theta \right]. \quad (28)$$

If $f'[\theta]$ were any other solution, then $f'[\theta] - f[\theta]$ would be of the same form as the unknown part of equation (27), i.e.,

$$f'[\theta] - f[\theta] = (C'_2 + \theta D'_2) \sin(2\theta) + A''(\theta) \cos \frac{2\theta}{3} + B''(\theta) \sin \frac{2\theta}{3} + [C''(\theta) + \theta D''(\theta)] \cos(2\theta), \quad (29)$$

with $A''(\theta)$ etc. entire and periodic with period $\pi/2$. Furthermore $f[\theta] - f\theta$ must vanish for $\text{Im } \theta \rightarrow \pm\infty$, $\text{Re } \theta$ arbitrary.

The coefficients of $A''(\theta)$ etc. in equation (29) are not periodic with period $\pi/2$ and if we replace θ by $\theta + j\pi/2$ for various integer j , we obtain new expressions involving $A''(\theta - j\pi/2) = A''(\theta)$ which must also vanish for $\text{Im } \theta \rightarrow \pm\infty$. One can easily construct in this way six linearly independent expressions involving the six unknowns C'_2 , D'_2 , $A''(\theta)$ etc. all of which must vanish for $\text{Im } \theta \rightarrow \pm\infty$. We conclude from this that $C'_1 = D'_1 = 0$ and that $A''(\theta)$, $B''(\theta)$, $C''(\theta)$ and $D''(\theta)$ all must vanish individually for $\text{Im } \theta \rightarrow \pm\infty$. The only entire periodic function which vanishes for $\text{Im } \theta \rightarrow \pm\infty$ is the null function. We therefore conclude that $A''(\theta)$ etc. are all identically zero and $f[\theta] = f'\theta$ is a unique solution.

Having found $f\theta$, we can now determine $f(p)$ from equation (20), $A(p, q)$ from equation (14) and finally $w_2(x, \eta)$ from equation (13). Fortunately we will not need to evaluate $w_2(x, \eta)$ explicitly because all the things we wish to calculate can be expressed directly in terms of $f[\theta]$.

Our immediate objective is to find $D(s)$, equation (1), which is given in terms of our approximate w by

$$\left. \begin{aligned} D(s) \sim D_0(s) + \varrho \delta^5 s I^{-1} \int_A \xi^2 \left[\frac{\partial w_2}{\partial \eta} \right] d\sigma \\ - D_0(s) + m s \xi_0^{-1} \left\{ \int_0^{\eta_0} d\eta \left[\frac{\partial w_2}{\partial x} \right]_{x=0} + \int_0^{\xi_0} dx \left(1 - \frac{x}{\xi_0} \right)^3 \left[\frac{\partial w_2}{\partial \eta} \right]_{\eta=0} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

The integrands in the above integrals decrease exponentially and so for $\xi_0, \eta_0 \gg 1$, we replace the upper limits of integration, η_0 and ξ_0 , by ∞ . We then expand $(1 - x/\xi_0)^3$ and notice from equation (15) and (11d) that the integrals in question can be expressed in terms of $f(p)$ and its derivatives at $p = 0$. These in turn can be expressed in terms of $f'\theta$ and its derivatives at $\theta = 0$ through equation (20) and evaluated explicitly from equation (28). We thus obtain another approximation to $D(s)$, namely

$$D_2(s) = D_0(s) + m s^{3/2} \left[\frac{16}{3\pi} \left(\frac{4\pi}{3\sqrt{3}} - 1 \right) \frac{1}{\xi_0 \sqrt{s}} - \frac{10}{9(s\xi_0^2)} + \dots \right]. \quad (31)$$

The errors in this approximation to $D(s)$ are of two types. One type consists of negative exponentials in η_0 and ξ_0 or quantities of comparable magnitude that arise from neglecting the boundary conditions at $\eta = \eta_0$ and $\xi = \xi_0$. The other errors are a result of replacing equation (3) by equation (7).

The complete asymptotic expansion for $D(s)$ is expected to be of the form

$$\left. \begin{aligned} \frac{D(s)}{(m s^{3/2})} = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{(\sqrt{s} \xi_0)^j} + \frac{4 \eta_0}{\xi_0} \left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_j}{(\sqrt{s} \xi_0)^j} \right] \\ + \text{exponentials in } (\xi_0, \eta_0) . \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Equation (31), in effect, determines the coefficient a_1 of equation (32) but the approximations made above are such that it does not give the correct value of a_2 nor any of the b_j 's. Actually the b_j 's have nothing to do with the edge effect and they are correctly given by equations (5) and (5a) or by replacing $D_0(s)$ in equation (31) by $D_1(s)$.

By using a variational method we shall now try to find the correct a_2 and obtain an estimate of some of the exponentially small terms.

3. Variational Method

The results of the previous section can be improved by using the variational form for $D(s)$ derived in section III 4,

$$D(s) = \frac{e^{\delta^5 s}}{I} \iiint_V d\tau \xi^2 \left[\left(\frac{\partial w}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 + s w^2 \right]. \quad (33)$$

To use this effectively we must construct an approximation to w which exactly satisfies the boundary conditions of Figure 1. The best solution that we can construct from the solutions at hand is the following:

$$w(x, \eta) = \begin{cases} w_2(x, \eta) + w_2(x, 2\eta_0 - \eta) + w_0(x, \eta) & \text{in I and II,} \\ w_2(x, \eta) + w_0(x, \eta) & \text{in III.} \end{cases} \quad (34)$$

This is a solution of equation (7) which satisfies the boundary conditions at $\eta = \eta_0$, is equal to 1 on A and is continuous across A' and A'' . It is deficient in only two respects; it does not satisfy equation (2) and there is a slight (exponentially small in η_0) discontinuity in the derivative of w across A'' .

We can integrate equation (33) by parts to obtain

$$D(s) = \frac{e^{\delta^5 s}}{I} \left\{ \iiint_S d\sigma \xi^2 w \frac{\partial w}{\partial \eta} - \iiint_V d\tau \xi^2 w \left[\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{3}{\xi} \cdot \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - s w \right] \right\} \quad (35)$$

in which the surface S must now include the two sides of the surfaces A' and A'' as well as the surface A . By substituting equation (34) for w , using the boundary conditions on w_0 and w_2 and the fact that they are solutions of equation (7),

we can decompose equation (35) into the following terms

$$D(s) = \frac{4ms}{\xi_0} \left\{ \int_0^{\eta_0} d\eta \left. \frac{\partial w_0}{\partial x} \right|_{x=0_-} + \int_0^{\xi_0} dx \left(1 - \frac{x}{\xi_0}\right)^3 \left. \frac{\partial w_0}{\partial \eta} \right|_{\eta=0_-} + \int_0^\infty d\eta \left. \frac{\partial w_2}{\partial x} \right|_{x=0_-} \right. \\ \left. + \int_0^{\xi_0} dx \left(1 - \frac{x}{\xi_0}\right)^3 \left. \frac{\partial w_2}{\partial \eta} \right|_{\eta=0_-} - \int_{-\infty}^0 d\eta [1 - w_2(x, \eta)] \frac{\partial}{\partial x} \right. \\ \left. < w_2(x, 2\eta_0 - \eta) \right|_{x=0_-} + \frac{3}{\xi_0} \int_{-\infty}^0 dx \int_0^{\eta_0} d\eta \left(1 - \frac{x}{\xi_0}\right)^2 (w_0 + w_2) \\ < \frac{\partial}{\partial x} (w_0 + w_2) + \frac{3}{\xi_0} \int_{-\infty}^0 dx \int_{-\infty}^0 d\eta \left(1 - \frac{x}{\xi_0}\right)^2 (w_0 + w_2) \\ < \frac{\partial}{\partial x} (w_0 + w_2) \left. \right\}, \quad (36)$$

with the first five terms coming from the surface integral and the last two from the volume integral.

By using equation (34) for w , we can expect to determine $D(s)$ correctly to only one power of ξ_0 more than found in the previous section. We will, therefore, discard any terms of equation (36) proportional to ξ_0^{-3} or $\exp(-\sqrt{s}\xi_0)$. This leads us to replace the upper limit of integration ξ_0 in the fourth term by ∞ and the $(1 - x/\xi_0)^2$ in the sixth and seventh terms by 1. We then notice that the first four terms give $D_2(s)$, equation (31), and that the sixth and seventh terms can be integrated with respect to x . The fifth term is exponentially small in η_0 but since nothing else limits the range of η_0 , this term is worth keeping. We use equation (11d) and the inversion of equation (15) to replace $\partial w_2/\partial x$ in this term and so transform equation (36) into

$$D(s) = D_2(s) - \frac{2ms}{\pi\xi_0} \left\{ \int_{-\infty}^0 d\eta \int_{-\infty}^\infty dp e^{-i p (2\eta_0 - \eta)} f(p) [1 - w_2(0, \eta)] + \frac{6ms}{\xi_0^2} \right. \\ \left. + \int_0^{\eta_0} d\eta [w_0(0, \eta) + w_2(0, \eta)]^2 + \int_{-\infty}^0 d\eta [w_0(\xi_0, \eta) + w_2(\xi_0, \eta)]^2 \right\}. \quad (37)$$

The integral over η in the second term can be evaluated with the help of equation (16); the integrand of the third term is 1 because of the boundary conditions; and in the last term $w_2(\xi_0, \eta)$ is exponentially small and can be neglected. We now obtain

$$D(s) = D_2(s) - \frac{2ms}{\pi\xi_0} \int_{-\infty - i\epsilon}^{-\infty + i\epsilon} dp e^{-2\eta_0 p i} f(p) [(i p)^{-1} - h(p)] + \frac{6ms}{\xi_0^2} \left[\eta_0 + \frac{1}{2\sqrt{s}} \right]. \quad (38)$$

The term proportional to η_0 in effect gives us the coefficient b_1 in equation (32), a term which we already knew was correctly given by the third term of equation (5a). To extend the results a little further we will now include also the fourth term from equation (5a), a term which we know is correct but which we can not find from the present calculations using equation (34). The last term in equation (38) combines with the last term of $D_2(s)$ given in equation (31) to produce the coefficient a_2 in equation (32).

We are not able to evaluate the remaining integral in equation (38) explicitly but we can reduce it to a more tractable form by changing the integration variable from p to θ , equation (19), and then substituting for $f[\theta]$ and $h[\theta]$ using equations (28) and (21). The θ integration, which is along a vertical line to the left of the origin is then deformed to a vertical line through $\theta = -\pi/2$ and by substituting $\theta = i\theta' - \pi/2$, we can reduce this to an integral along the real line.

We thus obtain as our final expression for $D(s)$

$$D(s) = m s^{3/2} \left\{ 1 + \frac{16}{3\pi} \left(\frac{4\pi}{3\sqrt{3}} - 1 \right) \frac{1}{\xi_0 \sqrt{s}} + \frac{17}{9 \xi_0^2 s} + O(\xi_0^{-3} s^{-3/2}) \right. \\ \left. + \frac{4 \eta_0}{\xi_0} \left[1 + \frac{3}{2 \xi_0 \sqrt{s}} + \frac{3}{8 \xi_0^2 s} + O(\xi_0^{-3} s^{-3/2}) \right] \right. \\ \left. + (\xi_0 \sqrt{s})^{-1} Q(\sqrt{s} \eta_0) \right\} \text{ for } \eta_0, \xi_0 \gg 1 \quad (39)$$

in which

$$Q(\sqrt{s} \eta_0) = -\frac{256}{9\pi} \int_0^\infty d\theta' \frac{\sinh^4(2\theta'/3) \exp(-2s^{1/2} \eta_0 \cosh \theta')}{\sinh^2(2\theta')} \quad (39a)$$

In addition to the errors indicated, there is an error due to the discontinuity in the derivative of w in equation (34). This discontinuity is of order $\exp(-2\eta_0 \sqrt{s})$ or for $s \sim i$ of order $\exp(-\sqrt{2} \eta_0)$. The variational procedure will give $D(s)$ correctly at least to order $\xi_0^{-1} \exp(-\sqrt{2} \eta_0)$ and it is reasonable to assume that the error in $m^{-1}D(s)$ from this source is no larger than order $\xi_0^{-1} \exp(-2\sqrt{2} \eta_0)$. The results of the next section indicate, however, that this error might even be considerably smaller. Since, if need be, we could easily obtain as many terms as we wish in the series multiplying η_0/ξ_0 in equation (39), the limitation on the use of equation (39) is, at worst, determined by the errors of order $(\xi_0 \sqrt{s})^{-3}$ and $\xi_0^{-1} \exp(-2\sqrt{2} \eta_0)$.

Present applications of the oscillation type viscometer, however, call for a determination of the viscosity from observation of the decrement of oscillation in which case one is usually interested only in the imaginary part of $D(s)$. Also one wants to know $D(s)$ for $s = \pm (i - \Delta) \omega$ and in the present situation one finds that $\omega \sim 1 - \Delta$. For good experimental measurements, it is necessary

that $\lambda \lesssim 1/10$ and preferably that $\lambda \sim 1/100$. In calculating the smallest terms of equation (39), it suffices therefore to approximate them by their values at $s = i$.

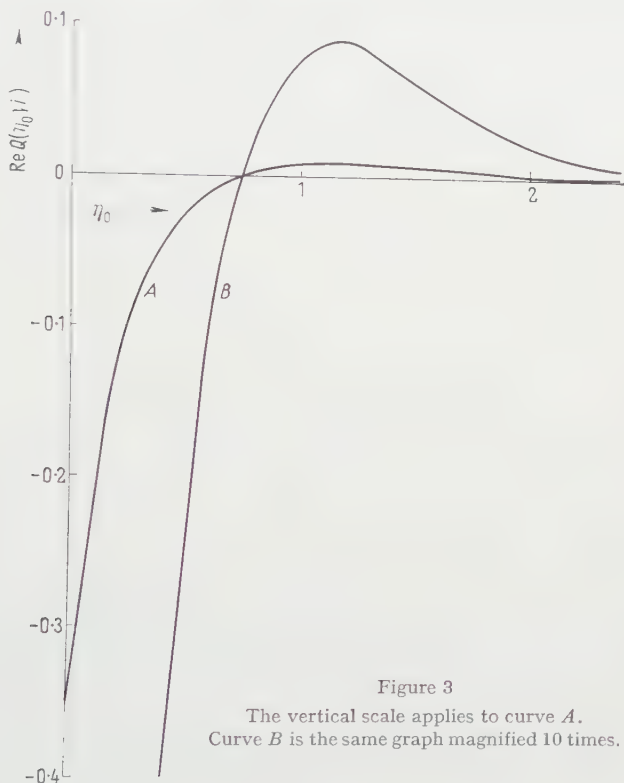


Figure 3

The vertical scale applies to curve A.
Curve B is the same graph magnified 10 times.

We make use of this in two ways. First we note that the terms $m s^{3/2} O(\xi_0^{-3} s^{-3/2})$ and $m s^{3/2} (4 \eta_0 / \xi_0) O(\xi_0^{-3} s^{-3/2})$ will be real and independent of s . They contribute nothing to $\text{Im } D(s)$. The errors in $\text{Im } D(s)$ therefore depend upon the next terms of the series namely $m O(\xi_0^{-4} s^{-1/2})$ and $m(4 \eta_0 / \xi_0) O(\xi_0^{-4} s^{-1/2})$. Secondly we note that the last term in equation (39) is at least no larger than order $\xi_0^{-1} \exp(-\sqrt{2} \eta_0)$. We may take $s = i$ in this term and consider only the imaginary part. Since $Q(\sqrt{s} \eta_0)$ is multiplied by s , it suffices to evaluate only $\text{Re } Q(\sqrt{i} \eta_0)$ as a function of the one real parameter η_0 . The integral in question was evaluated by numerical integration for several values of η_0 and the results are plotted in Figure 3. Since this term of equation (39) is very small if one is working in a range where equation (39) is a valid approximation, values of $\text{Re } Q(\sqrt{i} \eta_0)$ taken from this graph should be sufficiently accurate.

Equation (39) was derived by assuming η_0 and $\xi_0 \gg 1$ but from our crude estimates of the errors we can now define more precisely this range of η_0 and ξ_0 . We show in Figure 4 the regions of the (η_0, ξ_0) -plane in which equation (39) is

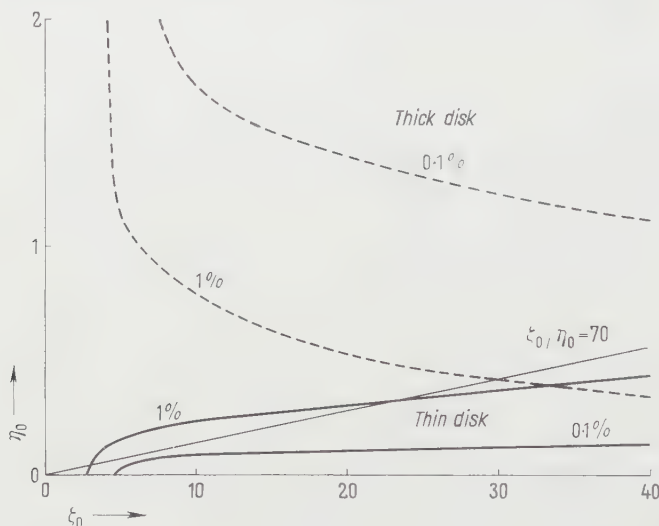


Figure 4

The regions above the broken lines labeled 1% and 0.1% are regions in which the thick disk formulae are estimated to be correct to within 1% and 0.1% respectively. The regions below the solid curves represent the corresponding regions where the thin disk formulae apply. The straight line represents a fixed geometry with $\xi_0/\eta_0 = 70$.

accurate to 1% and 0.1% assuming that the fractional errors in $\text{Im } D(s)$ are approximately ξ_0^{-4} and $\xi_0^{-1} \exp(-2 \pm 2 \eta_0)$. Note that the condition $\eta_0 \gg 1$ can be interpreted very loosely.

For any given disk, η_0/ξ_0 is a constant and the various possible values of η_0 and ξ_0 lie on a line of slope η_0/ξ_0 through the origin. As a practical matter, equation (39) is probably best suited to disks for which $\eta_0/\xi_0 \gtrsim 1/4$. In such a case the error in $\text{Im } D(s)$ is always dominated by the error of order ξ_0^{-4} and one can obtain accuracies of 0.1% for $\xi_0 \gtrsim 7$ and 1% for $\xi_0 \gtrsim 4$.

4. Reformulation of the Thin Disk

If one is dealing with a very thin disk for which $\eta_0/\xi_0 \ll 1$, then for various boundary layer thicknesses one may have a situation in which $\eta_0 \ll 1 \ll \xi_0$ or in which $1 \ll \eta_0 \ll \xi_0$. In the former case the formulae of the present paper apply and in the latter case the formulae of Part III apply. Figure 4 shows the region of the (η_0, ξ_0) -plane in which the thin disk formulae of Part III apply

and one sees that a line of constant $\eta_0/\xi_0 \ll 1$ will pass through both the 'thin disk' and 'thick disk' regions.

Unfortunately there are practical limitations on how small one can make η_0/ξ_0 and most of the experimental data do not clearly fall into ranges where either the thin disk or thick disk formulae are valid. Much of these data fall into the intermediate range $\eta_0/\xi_0 = O(1) \lesssim \xi_0$. We will now try to demonstrate the possibility of interpolating between the limiting cases and thereby obtaining a procedure for dealing with the intermediate case.

We begin by writing $D(s)$ in the form

$$D(s) = m s^{3/2} \left\{ 1 + \frac{2}{\xi_0 s^{1/2}} + \frac{3}{2 \xi_0^2 s} - \frac{3}{4 \xi_0^3 s^{3/2}} + \frac{3}{2 \xi_0^4 s^2} + \dots \right. \\ \left. - \frac{4 \eta_0}{\xi_0} \left[1 + \frac{3}{2 \xi_0 s^{1/2}} + \frac{3}{8 \xi_0^2 s} + \dots \right] \right. \\ \left. + \frac{\varepsilon_1(\eta_0/\sqrt{s})}{\xi_0 s^{1/2}} + \frac{\varepsilon_2(\eta_0/\sqrt{s})}{\xi_0^2 s} + \frac{\varepsilon_3(\eta_0/\sqrt{s})}{\xi_0^3 s^{3/2}} + \dots \right\} \quad (40)$$

in which $\varepsilon_1(\eta_0/\sqrt{s})$ etc. are as yet unspecified functions which are in fact defined by this equation.

The first series in $(\xi_0 s^{1/2})^{-1}$ is taken from the formula for the thin disk, Part III, whereas the series multiplying $4 \eta_0/\xi_0$ is taken from equation (39). This choice is somewhat artificial but it does have the desirable feature that for only moderately large values of ξ_0 the first series is correctly given and dominates the part proportional to η_0/ξ_0 which is incorrect for $\eta_0 \ll 1$. For moderately large η_0 , $1 \ll \eta_0 \ll \xi_0$, the error in the first series is small while the series proportional to η_0 is described correctly. The burden of finding $D(s)$, however, falls on finding the $\varepsilon_1(\eta_0/\sqrt{s})$ etc. and the real motivation for writing $D(s)$ in this form is to make these terms small over the entire range $\eta_0 \ll \xi_0$ while keeping the formula reasonably simple.

From equation (39) and equation (58) of Part III, we see that the $\varepsilon_i(\eta_0/\sqrt{s})$ satisfy the following equations:

$$\varepsilon_1(\eta_0/\sqrt{s}) = \begin{cases} \frac{16}{3\pi} \left(\frac{4\pi}{3\sqrt{3}} - 1 - \frac{3\pi}{8} \right) + O(\sqrt{s} \eta_0) + O(e^{-2\sqrt{2}\eta_0}) & \text{for } \eta_0 \gg 1, \\ \frac{4\sqrt{s} \eta_0}{\pi} [-\log(\eta_0/\sqrt{s}) - 1.00] + O(\eta_0^2) & \text{for } \eta_0 \ll 1, \end{cases} \quad (41a)$$

$$\varepsilon_2(\eta_0/\sqrt{s}) = \begin{cases} \frac{7}{18} + O(e^{-2\sqrt{2}\eta_0}) & \text{for } \eta_0 \gg 1, \\ \frac{6\sqrt{s} \eta_0}{\pi} [-\log(\eta_0/\sqrt{s}) - 1.1] + O(\eta_0^2) & \text{for } \eta_0 \ll 1, \end{cases} \quad (41b)$$

$$\varepsilon_3(\eta_0 \sqrt{s}), \quad \varepsilon_4(\eta_0 \sqrt{s}) = \begin{cases} O(1) & \text{for } \eta_0 \gg 1, \\ O(\sqrt{s} \eta_0) & \text{for } \eta_0 \ll 1. \end{cases} \quad (41c)$$

Since these give only relatively small contributions to $D(s)$ and we are interested only in $\text{Im } D(s)$, it suffices to consider only the quantities $\text{Im } i \varepsilon_1(\eta_0 \sqrt{i})$, $\text{Im } i^{1/2} \varepsilon_2(\eta_0 \sqrt{i})$, $\text{Im } \varepsilon_3(\eta_0 \sqrt{i})$ and $\text{Im } i^{-1/2} \varepsilon_4(\eta_0 \sqrt{i})$. The third of these quanti-

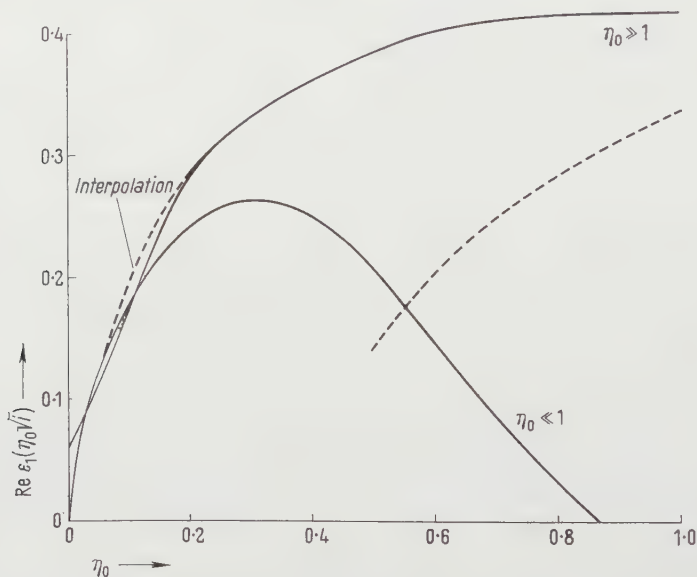


Figure 5

The curve $\eta_0 \gg 1$ corresponds to the thick disk formula, the curve $\eta_0 \ll 1$ to the thin disk formula, equation (41a). The broken line at the right indicates the magnitude of the error estimated in section 3. The broken line at the left represents a possible interpolation between the two curves.

ties has the limiting values 0 and $O(\eta_0) \ll 1$ and is to be multiplied by ξ_0^{-3} whereas the fourth is at most of order 1 and is to be multiplied by ξ_0^{-4} . We neglect these. The limiting forms of the remaining two quantities are shown in Figures 5 and 6 by the solid lines.

The behavior of the curves for $\eta_0 \gg 1$ is rather spectacular, particularly in Figure 5. First of all the range of η_0 shown in Figure 5 lies mostly outside the range where equation (39) is supposed to be valid and if we assume an error $-\exp(-2\sqrt{2}\eta_0)$, which would be consistent with our previous estimates, we would obtain the broken line on the right side of Figure 5. The curve $\eta_0 \gg 1$ extended to $\eta_0 \ll 1$ comes surprisingly close, however, to the correct curve for $\eta_0 \ll 1$ shown by the other solid curve. In view of this, it seems that the errors

'of order' $\exp(-2\frac{1}{2}\eta_0)$ are probably only a very small multiple (perhaps as little as 1.50) of $\exp(-2\frac{1}{2}\eta_0)$. One should also note that we have already subtracted away from the coefficient of $(\xi_0/s)^{-1}$ in $D(s)$ an amount $2 + 4\eta_0$ and that the vertical scale of Figure 5 runs only to 0.4. Also shown in Figure 5 by a broken line is a possible interpolation between the two curves $\eta_0 \ll 1$ and $\eta_0 > 1$ in the region $\eta_0 \sim 0.1$. From the shape of these curves it seems reasonable to assume that this interpolation curve may be correct to within about

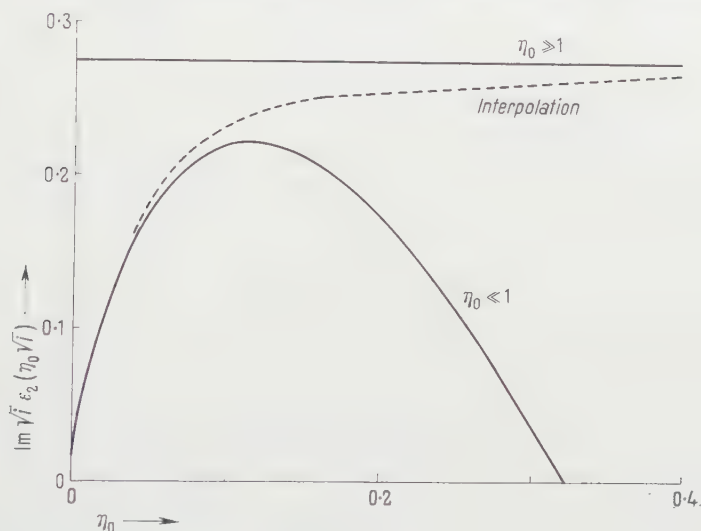


Figure 6

A graph of equation (41b) with the same notation as in Figure 5.

0.01 (absolute error). The resulting error in $D(s)$ is, however, smaller than the error in $\text{Im } i \epsilon_1 (\eta_0 \sqrt{i})$ by a factor $\xi_0^{-1} \ll 1$.

In Figure 6 we note that the range of η_0 is smaller than that of Figure 5 and the interpolation curve is more questionable. It seems unlikely, however, that the broken line would be in error by more than about ± 0.05 and this would contribute to $D(s)$ an error of only $(\pm 0.05)/\xi_0^2$.

We speculate that equation (40) along with Figures 5 and 6 or the limiting relations, equation (41), gives $\text{Im } D(s)$ correctly to within fractional errors of roughly $(0.01)/\xi_0$, $(0.05)/\xi_0^2$ and $1/\xi_0^4$ each of which is less than 0.002 for $\xi_0 > 5$. Collectively the errors in $\text{Im } D(s)$ should be less than 0.5% for $\xi_0 > 5$. By the same arguments we would conclude that equation (39) itself is probably correct to 0.5% for $\xi_0 > 5$ and $\eta_0 > 0.2$, a range which greatly exceeds the more conservative estimates of the previous section.

5. Conclusions

The main problem treated here was the evaluation of the function $D(s)$ which is, in effect, the viscous drag exerted by the fluid on the oscillating disk. The functions $D(s)$ is to be used in the formulae of Part I, particularly equation (I, 44), to obtain a relation between the decrement of oscillation and the viscosity. The actual determination of the viscosity from the measured values of the decrement can be done in nearly the same manner as described previously for the large cup in Part II and the thin disk of Part III. This evaluation is not significantly more difficult with the new formula for $D(s)$ than with less accurate approximate formulae for $D(s)$ presently in use. Equation (39), however, is sufficiently accurate to open the way to the use of the oscillating disk for precision absolute measurements of viscosity.

It is also worth noting that the method of solution for the fluid flow near the right angle turn obtained in section 2, can also be applied to the solution of certain other problems, for example heat transfer near a right angle turn.

Acknowledgments

The authors are indebted to Professor J. KESTIN for many helpful discussions which motivated this investigation.

REFERENCES

- [1] J. KESTIN and G. F. NEWELL, *Theory of Oscillation Type Viscometers: The Oscillating Cup*, Part I, Z. angew. Math. Phys. 8 (6), 433 (1957).
- [2] D. A. BECKWITH and G. F. NEWELL, *Theory of Oscillation Type Viscometers: The Oscillating Cup*, Part II, Z. angew. Math. Phys. 8 (6), 450 (1957).
- [3] A. G. AZPEITIA and G. F. NEWELL, *Theory of Oscillation Type Viscometers III: A Thin Disk*, Z. angew. Math. Phys. 9a (2), 97 (1958).
- [4] J. KESTIN and H. E. WANG, *Corrections for the Oscillating Disk Viscometer*, J. appl. Mech. 24, 197 (1957).
- [5] J. KESTIN and J. R. MOSZYNSKI, *On the Measurement of the Viscosity of Steam by the Observation of Small Oscillations*, Fifth International Conference on Steam Properties, London, England (1956).

Zusammenfassung

Der Einfluss der Zähigkeitskräfte auf eine in einer Flüssigkeit schwingende Scheibe wird nach den gleichen Methoden wie in Teil III behandelt. Jedoch wird im Unterschied dazu vorausgesetzt, dass die Grenzschichtdicke klein ist im Verhältnis zur Dicke und zum Radius der Scheibe. Die abgeleiteten Formeln lassen sich mit gutem Ergebnis für die dünne Scheibe extrapolieren (hier ist die Grenzschichtdicke jedoch gross, verglichen mit der Scheibendicke, aber klein gegenüber dem Radius), so dass es möglich ist, zwischen diesen Formeln und denen des Teils III zu interpolieren. Damit wird die Berechnung des Reibungsmomentes für Scheiben unterschiedlichster Form ermöglicht, vorausgesetzt, dass die Grenzschichtdicke klein ist gegenüber dem Radius der Scheibe.

(Received: December 21, 1957.)

Sur la résolution numérique dans les cas limites des équations différentielles linéaires à coefficients sinusoïdaux

Par JEAN PATRY, Zürich¹⁾

Introduction

Les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques font l'objet de publications de plus en plus nombreuses, car leur importance est considérable et la détermination numérique de leurs solutions pose déjà des problèmes difficiles à résoudre. Il y a quelque temps²⁾, l'auteur a présenté trois méthodes générales pour résoudre les équations linéaires à coefficients sinusoïdaux. La forme des solutions et le procédé à employer pour calculer ces dernières dépendent du domaine de convergence envisagé. Ces domaines sont au nombre de trois, sont séparés les uns des autres par des courbes de forme très simple (droites ou cercles suivant les cas) et seront désignés au cours de cette étude par l'expression «domaines fondamentaux». Dans la publication susmentionnée, la validité des méthodes de résolution n'a été démontrée qu'à l'intérieur des domaines fondamentaux. Il s'agit maintenant d'étendre ces résultats aux limites elles-mêmes.

Après un rappel des propriétés fondamentales de ces équations (chapitre 1), il sera démontré que les s solutions, ainsi que les s premières dérivées de chacune d'elles, sont régulières aux points singuliers, si une condition très simple est satisfaite. Dans le cas général, on peut montrer que les séries correspondantes convergent aussi sur les limites des domaines fondamentaux (chapitre 2). La méthode numérique, valable dans le domaine intermédiaire, se révèle aussi utilisable, si ce domaine disparaît, c'est-à-dire, si les deux limites de convergence sont superposées, à la condition que les solutions restent régulières sur ces limites (chapitre 3). Si les deux rangées de points singuliers sont elles-mêmes confondues, la méthode peut être légèrement modifiée, afin d'améliorer la précision des résultats. L'étude numérique d'une équation particulière de ce type (chapitre 4) permet de comparer les valeurs obtenues à l'aide de ces différentes méthodes avec les expressions que donne la résolution analytique de cette équation. La correspondance est telle, que la valeur pratique de cette étude peut être considérée comme démontrée.

¹⁾ Réacteur SA.

²⁾ JEAN PATRY, *Über die linearen Differentialgleichungen mit sinusförmigen Koeffizienten* (Juris-Verlag, Zürich 1957).

1. Les propriétés fondamentales

11. Les équations de base

Les bases analytiques pour l'étude de la convergence sur la limite des domaines fondamentaux se trouvent dans la publication mentionnée dans l'introduction et qui sera désignée par I. Il est cependant avantageux de rassembler ici celles qui seront nécessaires en indiquant éventuellement le numéro dans I de la formule considérée, afin d'en faciliter le contrôle.

L'objet de cette étude est l'équation différentielle suivante :

$$\sum_{k=0}^s (e_k + f_k e^{-ix} + g_k e^{ix}) \frac{d^k u}{dx^k} = 0 \quad (11.1)$$

avec les constantes quelconques e_k , f_k et g_k . La substitution

$$Z = e^{ix} \quad (11.2)$$

(I:11.2)

conduit à l'équation polynomiale équivalente :

$$\sum_{k=0}^s (F_k + E_k Z + G_k Z^2) Z^k \frac{d^k u}{dZ^k} = 0 \quad (11.3)$$

(I:11.3)

avec les nouvelles constantes

$$\left. \begin{aligned} E_k &= \sum_{m=k}^s d_{km} e_m \quad (E_s = e_s), \\ F_k &= \sum_{m=k}^s d_{km} f_m \quad (F_s = f_s), \\ G_k &= \sum_{m=k}^s d_{km} g_m \quad (G_s = g_s). \end{aligned} \right\} \quad (11.4)$$

(I:11.4)

L'équation polynomiale a quatre points singuliers :

$$Z = 0, \quad Z = \infty, \quad \left\{ \quad (11.5) \right.$$

$$Z_1 = -\frac{e_s}{2g_s} (1 - \sqrt{1 - 4\varphi}), \quad Z_2 = -\frac{e_s}{2g_s} (1 + \sqrt{1 - 4\varphi}). \quad \left. \right\} \quad (11.6)$$

Le paramètre φ est ainsi défini :

$$\varphi = \frac{f_s g_s}{e_s^2}. \quad (11.6)$$

(I:11.7)

Dans le cas général, les deux singularités particulières Z_1 et Z_2 sont déterminées, en plus de (11.5), par l'inégalité

$$|Z_1| \leq |Z_2|. \quad (11.7)$$

(I:11.8)

Selon le théorème (I:2), chacune des singularités est un pôle, si elle ne coïncide pas avec une autre singularité. En plus, si les deux points Z_1 et Z_2 sont confondus, ils correspondent à un pôle, si une condition très simple est satisfaite :

$$F_{s-1} + E_{s-1} Z_1 + G_{s-1} Z_1^2 = 0. \quad (11.8)$$

(I:11.12)

En introduisant dans l'équation (11.1) l'expression

$$u = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_n e^{i(\mu+n)x} \quad (11.9)$$

(I:11.13)

pour la solution, on obtient un système d'équations récurrentes, le système fondamental:

$$A(\mu+n) D_{n-1} + B(\mu+n) D_n + C(\mu+n) D_{n+1} = 0 \quad (11.10)$$

(I:11.18)

avec les définitions:

$$\left. \begin{aligned} A(\mu) &= \sum_{k=0}^s i^k (\mu-1)^k g_k, & B(\mu) &= \sum_{k=0}^s i^k \mu^k e_k, \\ C(\mu) &= \sum_{k=0}^s i^k (\mu+1)^k f_k. \end{aligned} \right\} \quad (11.11)$$

(I:11.19)

L'expression (11.9) se simplifie dans le domaine de l'origine ($|Z| < |Z_1|$) et dans celui du point infini ($|Z| > |Z_2|$), car D_n est nul pour des valeurs négatives de n dans le premier cas, pour des valeurs positives dans le second. La solution s'obtient alors par récurrence directe à partir de D_0 . Dans le domaine intermédiaire, la série est infinie dans les deux directions ($-\infty < n < +\infty$) et la méthode directe n'est plus applicable. Les domaines fondamentaux, qui correspondent aux domaines de convergence des différentes formes de la solution sont ainsi définis:

$$\left. \begin{aligned} |Z| < |Z_1| & \text{ domaine I,} & |Z| > |Z_2| & \text{ domaine II,} \\ |Z_1| < |Z| < |Z_2| & \text{ domaine III.} \end{aligned} \right\} \quad (11.12)$$

Les limites de convergence (frontières des domaines fondamentaux) sont donc les suivantes:

$$|Z| = |e^{ix}| = |Z_1| \quad (11.13)$$

et

$$|Z| = |e^{ix}| = |Z_2|.$$

Si ces deux limites sont confondues, la validité de la méthode numérique, valable à l'intérieur du domaine III, doit être démontrée, car ce domaine disparaît. Dans de nombreux problèmes, il est cependant nécessaire de trouver une solution convergente sur cette limite.

Dans de nombreuses applications, l'équation différentielle présente certaines propriétés de symétrie, qui conduisent à des simplifications importantes pour la recherche des solutions. Nous considérerons d'une part les équations symétriques:

$$e_{2k-1} = 0, \quad f_k = g_k(-1)^k. \quad (11.14)$$

(I:21.1a')

et les équations antisymétriques d'autre part:

$$e_{2k} = 0, \quad f_k = g_k(-1)^{k-1}. \quad (11.15)$$

(I:21.1a'')

Les équations différentielles réelles (définies dans I:21.1b) ne permettent pas de simplifications importantes et ne seront pas étudiées spécialement.

Les solutions des équations avec symétrie doivent jouir de propriétés analogues à celles de l'équation différentielle elle-même. On en déduit les relations suivantes:

$$\mu'' = -\mu', \quad D_n'' = \pm D_{-n}' \quad (11.16)$$

(I:21.3a'')

et en particulier,

$$\mu = 0, \quad D_n = \pm D_{-n}, \quad \mu = 1/2, \quad D_n = \pm D_{1-n}. \quad (11.17)$$

(I:21.7a)

Les propriétés de symétrie se retrouvent encore dans le système fondamental pour les équations symétriques:

$$A(\mu + n) = C(-\mu - n), \quad B(\mu + n) = B(-\mu - n) \quad (11.18)$$

(I:21.2a')

et pour les équations antisymétriques:

$$A(\mu + n) = -C(-\mu - n), \quad B(\mu + n) = -B(-\mu - n), \quad B(0) = 0.$$

(I:21.2a'')

Ces propriétés de symétrie ont encore d'autres conséquences qui seront, éventuellement, mentionnées en temps opportun.

12. La méthode numérique

La résolution numérique du système fondamental (11.10) dans le domaine III présente des difficultés supplémentaires, car les séries avec n positif et celles avec n négatif ne convergent, dans le cas général, que dans les domaines I et II respectivement, selon le théorème de POINCARÉ (théorèmes I: 4 et 5). Pour assurer la convergence dans le domaine III, il faut déterminer les valeurs caractéristiques de μ ou d'une autre grandeur, la grandeur caractéristique.

La méthode numérique permet de tourner ces difficultés en réalisant d'emblée la convergence des séries. L'équation caractéristique exprime l'égalité des coefficients de FOURIER D_n calculés à partir des n positifs et ceux calculés à partir des n négatifs.

Le procédé de calcul est le suivant. On introduit de nouveaux paramètres:

$$\delta_n = C(\mu + n) \frac{D_{n+1}}{D_n}, \quad \varepsilon_n = A(\mu - n) \frac{D_{n-1}}{D_n}. \quad (12.1)$$

$$(I:14.5)$$

Les valeurs de δ_N et de ε_{-N} sont définies par approximation:

$$\left. \begin{aligned} \delta_N &= \frac{1}{2} B(\mu + N) \left[1 - \sqrt{1 - 4\varphi(\mu + N + 1)} \right], \\ \varepsilon_{-N} &= \frac{1}{2} B(\mu - N) \left[1 - \sqrt{1 - 4\varphi(\mu - N)} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (12.2)$$

La fonction $\varphi(\mu + n)$ est une généralisation de la grandeur φ :

$$\varphi(\mu + n) = \frac{A(\mu + n) C(\mu + n - 1)}{B(\mu + n) B(\mu + n - 1)}. \quad (12.3)$$

$$(I:13.2)$$

Le nombre N doit être choisi suffisamment grand pour que la précision des résultats corresponde aux nécessités, mais il n'est pas infini. Le signe devant la racine dans (12.2) est choisi de manière à rendre la valeur absolue des deux grandeurs considérées la plus petite possible, afin de garantir la convergence.

Les paramètres δ_n et ε_n pour les autres valeurs de n ($0 \leq n < N$) se déduisent des équations récurrentes suivantes:

$$\delta_n = \frac{A(\mu + n + 1) C(\mu + n)}{B(\mu + n + 1) - \delta_{n+1}}, \quad \varepsilon_n = \frac{A(\mu - n) C(\mu - n - 1)}{B(\mu - n - 1) - \varepsilon_{n-1}}. \quad (12.4)$$

$$(I:14.7)$$

L'équation caractéristique

$$B(\mu) = \delta_0 + \varepsilon_0 \quad (12.5)$$

$$(I:14.8)$$

se résout par approximations successives (voir: I, paragraphe 14).

La validité de cette méthode se démontre à partir du théorème suivant (I: théorème 13):

Théorème 1: *Les trois conditions suivantes sont nécessaires et suffisantes pour garantir la validité de la méthode numérique:*

$$|\alpha'_N - \alpha_N| < M_1 |\alpha'_N|, \quad (12.6)$$

(I:15.2)

$$|\alpha'_0 - \alpha_0| < M_2 |\alpha'_0| \quad (12.7)$$

(I:15.3)

et

$$\sum_{n=0}^N |D'_n - D_n| |Z^n| + \sum_{n=N+1}^{\infty} |D_n Z^n| < M_3. \quad (12.8)$$

(I:15.4)

Dans ces relations, M_1 , M_2 et M_3 sont des grandeurs bornées qui peuvent être choisies aussi petites que l'on veut. Les valeurs idéales sont désignées par α_n et D_n , les valeurs approchées, calculées par la méthode numérique, par α'_n et par D'_n . Enfin, il faut tenir compte de la définition des α_n :

$$\alpha_n = \frac{\delta_n}{B(\mu + n)} = - \frac{C(\mu + n)}{B(\mu + n)} \frac{D_{n+1}}{D_n}. \quad (12.9)$$

(I:15.1)

Les paragraphes 15 et 16 de la publication I montrent que ces conditions sont remplies, si l'on reste à l'intérieur du domaine III.

13. Application du théorème de Fuchs

La méthode directe pour calculer les solutions de (11.1) dans les domaines latéraux I et II (I: paragraphe 12) se base sur le théorème de FUCHS (I: théorème 3, seconde partie). Ce théorème peut aussi être utilisé pour obtenir les solutions autour des points singuliers Z_1 et Z_2 , si le point considéré n'est pas une singularité essentielle, c'est-à-dire dans tous les cas où Z_1 et Z_2 sont distincts et, en outre, si Z_1 et Z_2 sont confondus et que l'équation (11.8) est satisfaite.

La substitution

$$Z = Z_n + Z' \quad (13.1)$$

dans l'équation (11.3) amène l'origine sur le point singulier Z_n envisagé. L'équation différentielle prend la forme

$$\sum_{k=0}^s (F'_k + E'_k Z' + G'_k Z'^2) (Z_n + Z')^k \frac{d^k u}{dZ'^k} = 0. \quad (13.2)$$

Les nouveaux paramètres E'_k , F'_k et G'_k se déduisent des anciens à l'aide des relations

$$G'_k = G_k, \quad E'_k = E_k + 2 G_k Z_n, \quad F'_k = F_k + E_k Z_n + G_k Z_n^2. \quad (13.3)$$

Les relations (11.5) et (13.3) permettent de calculer les valeurs de E'_s , F'_s et G'_s :

$$\left. \begin{aligned} G'_s &= G_s = g_s, \quad F'_s = 0, \\ E'_s &= g_s (Z'_n - Z_n) = e_s - \frac{e_s g_s}{g_s} (1 \pm \sqrt{1 - 4\varphi}). \end{aligned} \right\} \quad (13.4)$$

Z'_n désigne le second point singulier. Si donc les deux points singuliers sont confondus, E'_s est nul.

Selon le théorème (I:7), une solution au moins peut s'écrire:

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} P_m Z'^{(\mu+m)}. \quad (13.5)$$

On en déduit le nouveau système fondamental

$$\sum_{k=0}^{s+1} Q_k (\mu + m) P_{m-k} = 0. \quad (13.6)$$

Les nouvelles grandeurs P_m et $Q_k (\mu + m)$ jouent dans cette étude un rôle analogue à celui des D_n et des $A (\mu - n)$, $B (\mu - n)$ et $C (\mu + n)$ dans la méthode directe habituelle. Ces relations seront très utiles au chapitre 2, où la valeur de la solution dans le domaine du point singulier sera étudiée en détail.

2. La convergence des séries

21. Les solutions analytiques autour de Z_1

La convergence des séries sur les limites de convergence peut être étudiée à l'aide de deux méthodes bien différentes. Une étude analytique de toutes les solutions dans le domaine du point singulier permet de déterminer, si elles sont toutes régulières dans ce domaine. Il est alors vraisemblable que les séries, dont le domaine de convergence est limité par ce point, convergent aussi en ce point. Une étude de la convergence elle-même des séries est aussi possible dans bien des cas. Elle doit faire appel à un critère de convergence très précis, car les critères classiques ne sont pas suffisants. Ces deux méthodes seront utilisées dans ce travail aussi loin que possible et conduiront à des résultats identiques.

L'étude du domaine autour de Z_1 et celle du domaine autour de Z_2 sont identiques, si l'on désigne par Z_n le point singulier envisagé et par Z'_n l'autre point singulier. Pour simplifier l'écriture, nous ne considérerons que le point Z_1 pour Z_n , Z_2 remplaçant Z'_n .

Les solutions valables autour de Z_1 sont définies par (13.5) et (13.6). L'équation caractéristique est la suivante:

$$Q_0(\mu) = 0, \quad (21.1)$$

et détermine les valeurs caractéristiques de μ qui seules sont intéressantes ici.

Les grandeurs $Q_k(\mu)$ se rapportent aux termes suivantes de l'équation différentielle:

$$\left. \begin{aligned} Q_0(\mu) &\sim E'_s Z' Z_1^s \frac{d^s u}{dZ'^s} + F'_{s-1} Z_1^{s-1} \frac{d^{s-1} u}{dZ'^{s-1}}, \\ Q_1(\mu) &\sim G' Z'^2 Z_1^s \frac{d^s u}{dZ'^s} + s E' Z'^2 Z_1^{s-1} \frac{d^s u}{dZ'^s} + E'_{s-1} Z' Z_1^{s-1} \frac{d^{s-1} u}{dZ'^{s-1}} \\ &\quad + (s-1) F'_{s-1} Z' Z_1^{s-1} \frac{d^{s-1} u}{dZ'^{s-1}} + F'_{s-2} Z_1^{s-2} \frac{d^{s-2} u}{dZ'^{s-2}}, \text{ etc.} \end{aligned} \right\} \quad (21.2)$$

On en déduit le théorème 2:

Théorème 2: Les grandeurs $Q_k(\mu)$ peuvent s'écrire, si k est plus petit que $(s-1)$, sous la forme d'un produit de $(s-k)$ facteurs:

$$Q_k(\mu) = q_k(\mu) \cdot (\mu - k) \cdot (\mu - k - 1) \cdots (\mu - s + 2). \quad (21.3)$$

Le premier de ces facteurs est de degré $(k+1)$ en μ et dépend de l'équation différentielle envisagée. Les autres sont définis par l'équation (21.3) elle-même.

Ce théorème permet de déterminer immédiatement $(s-1)$ valeurs caractéristiques de μ :

$$\mu_k = k - 1 \leq s - 2. \quad (21.4)$$

Dans le seul cas, où Q_0 serait identiquement nul, l'équation caractéristique ne serait plus (21.1) et le nombre des valeurs caractéristiques entières diminuerait. Comme ce cas particulier sera étudié en détail plus loin, il n'y a pas de raison de l'approfondir ici.

Le théorème 2 permet de démontrer en plus la propriété suivante:

Théorème 3: Les $(s-1)$ solutions se rapportant aux $(s-1)$ valeurs caractéristiques entières de μ définies par le théorème 2 sont toutes de premier rang.

Démonstration: On déduit du théorème 2 les relations suivantes:

$$Q_k(m) = 0 \quad \text{pour } 0 \leq m - k \leq s - 2 - k. \quad (21.5)$$

Les solutions sont définies par la relation (13.5), où l'on pose :

$$P_m = 0 \quad \text{pour } m < 0. \quad (21.6)$$

Les premières relations de récurrence (13.6) sont toutes identiquement satisfaites, quels que soient les P_m pour $0 \leq m \leq s-2$. La relation

$$\sum_{k=0}^{s-1} Q_k (s-1) P_{s-1-k} = 0 \quad (21.7)$$

est la première qui permet de déterminer un coefficient $P_m(P_{s-1})$. Ainsi, les $(s-1)$ premiers coefficients de la série représentant la solution, peuvent être choisis arbitrairement et donnent lieu à $(s-1)$ solutions linéairement indépendantes de la forme (13.5), c'est-à-dire de premier rang.

La dernière solution nécessaire dans la région du point singulier Z_1 , se rapporte à la valeur caractéristique déterminée par l'équation

$$q_0(\mu_s) = 0. \quad (21.8)$$

Seule cette solution ou l'une de ses s premières dérivées, peut présenter un pôle en Z_1 . Il nous faut donc calculer cette s -ième valeur caractéristique.

22. Les coefficients d_{km} de la transformation linéaire

L'équation caractéristique (21.8) peut s'écrire en tenant compte de (21.2) :

$$q_0(\mu_s) = Z_1 E'_s (\mu_s - s + 1) + F'_{s-1} = 0. \quad (22.1)$$

Comme nous l'avons remarqué, cette équation peut aussi être identiquement satisfaite. Il faut, dans ce cas, étudier $q_1(\mu)$. Pour cela, il est nécessaire de calculer les coefficients d_{km} de la transformation linéaire (11.4) avec $k = s-1$ et $k = s-2$.

De la substitution (11.2) on peut déduire :

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dx} &= i Z \frac{du}{dZ}, \\ \frac{d^2u}{dx^2} &= -Z^2 \frac{d^2u}{dZ^2} = Z \frac{du}{dZ}, \\ \frac{d^3u}{dx^3} &= -i Z^3 \frac{d^3u}{dZ^3} - 3i Z^2 \frac{d^2u}{dZ^2} - i Z \frac{du}{dZ}, \\ \frac{d^4u}{dx^4} &= Z^4 \frac{d^4u}{dZ^4} + 6 Z^3 \frac{d^3u}{dZ^3} + 7 Z^2 \frac{d^2u}{dZ^2} + Z \frac{du}{dZ}, \text{ etc.} \end{aligned} \right\} \quad (22.2)$$

Il en résulte les relations suivantes:

$$\left. \begin{aligned} d_{k,k} &= i^{k-s}, \\ d_{k,k+1} &= i (d_{k-1,k} + k d_{k,k}) = k (k+1) \frac{i^{k+1-s}}{2}, \\ d_{k,k+2} &= i (d_{k-1,k+1} + k d_{k,k+1}) = \left(\frac{k^4 + 3k^2}{8} + \frac{5k^3 + k}{12} \right) i^{k+2-s}. \end{aligned} \right\} \quad (22.3)$$

La dernière relation fut calculée de la façon suivante. On peut s'assurer que $d_{k,k+2}$ doit être de la forme:

$$d_{k,k+2} = (a k^4 + b k^3 + c k^2 + d k) i^{k+2-s}. \quad (22.4)$$

Le terme constant est nul, car on a:

$$d_{0,2} = 0. \quad (22.5)$$

Les valeurs de $d_{k,k+2}$ pour k plus petit que 5 permettent de déterminer les coefficients a , b , c et d .

Les coefficients d_{km} pour $m > k + 2$ peuvent être calculés de la même manière, mais nous n'en aurons pas besoin.

23. La valeur de μ_s

La dernière solution de l'équation différentielle, celle qui correspond à la valeur caractéristique μ_s , reste bornée ainsi que ses s premières dérivées dans le domaine du point Z_1 , si la partie réelle de μ_s est égale ou supérieure à s . On peut supposer que les séries valables dans les domaines I et III convergent, dans ce cas, aussi sur la limite de convergence.

La valeur de μ_s est déterminée à partir de (22.1):

$$\mu_s = s - 1 - \frac{F'_{s-1}}{Z_1 E'_s}. \quad (23.1)$$

Les équations (13.3) et (13.4) conduisent à la relation:

$$\mu_s = s - 1 - \frac{F_{s-1} + E_{s-1} Z_1 + G_{s-1} Z_1^2}{g_s (Z_2 - Z_1) Z_1}. \quad (23.2)$$

La transformation linéaire (11.2) et les valeurs des d_{km} , calculés au paragraphe précédent, permettent d'écrire:

$$\left. \begin{aligned} &F_{s-1} + E_{s-1} Z_1 + G_{s-1} Z_1^2 \\ &= -i (f_{s-1} + Z_1 e_{s-1} + Z_1^2 g_{s-1}) + (f_s + Z_1 e_s + Z_1^2 g_s) \frac{s(s-1)}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (23.3)$$

La deuxième partie du membre de droite est nulle, en raison de l'équation de définition de Z_1 .

Pour terminer, la valeur de μ_s peut se calculer dans le cas général à l'aide de la formule suivante:

$$\mu_s = s - 1 + \left(\frac{f_{s-1}}{e_s Z_1} + \frac{e_{s-1}}{e_s} + \frac{g_{s-1} Z_1}{e_s} \right) \frac{i}{\sqrt{1 - 4\varphi}} \quad (23.4)$$

avec les définitions

$$Z_1 = -\frac{e_s}{2g_s} (1 - \sqrt{1 - 4\varphi}), \quad \frac{1}{Z_1} = -\frac{e_s}{2f_s} (1 + \sqrt{1 - 4\varphi}). \quad (23.5)$$

Les résultats d'une étude autour du point Z_2 sont les mêmes, sauf que le signe devant la racine est changé.

Théorème 4: *Toutes les solutions de l'équation différentielle (11.1) ainsi que les s premières dérivées de chacune d'elles sont régulières dans le domaine des singularités Z_1 et Z_2 respectivement, si la relation suivante est satisfaite:*

$$\operatorname{Re} \left(\frac{i e_{s-1}}{e_s} - \frac{i g_{s-1}}{2 g_s} - \frac{i f_{s-1}}{2 f_s} \right) \pm \frac{1}{\sqrt{1 - 4\varphi}} + \operatorname{Re} \left(\frac{i g_{s-1}}{2 g_s} - \frac{i f_{s-1}}{2 f_s} \right) > 1. \quad (23.6)$$

Le signe devant la racine est positif pour le domaine autour de Z_1 , négatif pour celui autour de Z_2 .

24. Le cas particulier $Z_1 = Z_2$

Le point singulier $Z_1 = Z_2$ n'est une singularité essentielle que si la relation (11.8) n'est pas satisfaite, c'est-à-dire si $q_0(\mu)$ n'est pas identiquement nul. De (23.3) on déduit:

$$f_{s-1} + Z_1 e_{s-1} + Z_1^2 g_{s-1} = 0 \quad (24.1)$$

avec

$$Z_1 = Z_2 = -\frac{e_s}{2g_s} = -\frac{2f_s}{e_s}, \quad \varphi = \frac{1}{4}. \quad (24.2)$$

On en tire la condition préliminaire

$$\frac{e_{s-1}}{e_s} = \frac{f_{s-1}}{2f_s} + \frac{g_{s-1}}{2g_s}. \quad (24.3)$$

Les valeurs caractéristiques de μ sont déterminées par la grandeur $q_1(\mu)$:

$$\left. \begin{aligned} q_1(\mu) = & (\mu - s)(\mu + 1 - s) Z_1^2 G'_s + (\mu - s)(\mu + 1 - s) s Z_1 E'_s \\ & + (\mu + 1 - s) Z_1 E'_{s-1} + (\mu + 1 - s)(s - 1) F'_{s-1} + F'_{s-2}. \end{aligned} \right\} \quad (24.4)$$

Cette fonction est quadratique en μ et donne les deux valeurs caractéristiques qui manquent, car le théorème 2 n'en détermine que $(s-2)$.

La transformation linéaire (11.4) et les relations (22.3) conduisent aux expressions

$$\left. \begin{aligned} G'_s &= g_s, \\ E'_s &= g_s (Z_1 - Z_2) = 0, \\ E'_{s-1} &= -i e_{s-1} - 2i Z_1 g_{s-1}, \\ F'_{s-1} &= 0, \\ F'_{s-2} &= (f_{s-2} - Z_1 e_{s-2} - Z_1^2 g_{s-2}). \end{aligned} \right\} \quad (24.5)$$

On obtient enfin:

$$\left. \begin{aligned} q_1(\mu) &= (\mu - s)^2 \frac{e_s^2}{4 g_s} + (\mu - s) \left(\frac{e_s^2}{4 g_s} + i \frac{e_s e_{s-1}}{2 g_s} - i \frac{e_s^2 g_{s-1}}{2 g_s^2} \right) \\ &+ i \frac{e_s e_{s-1}}{2 g_s} - i \frac{e_s^2 g_{s-1}}{2 g_s^2} - f_{s-2} + \frac{e_s e_{s-2}}{2 g_s} - \frac{e_s^2 g_{s-2}}{4 g_s^2} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (24.6)$$

Pour déterminer si les solutions correspondant à μ_s et μ_{s-1} sont régulières ainsi que leurs s premières dérivées au point singulier, il faut tenir compte du fait que le plus petit exposant de Z' est égal à $(\mu - 1)$.

Théorème 5: Si $s \geq 2$, les deux solutions et les deux premières dérivées de chacune d'elles sont régulières dans le domaine du point singulier $Z_1 = Z_2$ si l'on a μ_1 entier et positif et

$$\operatorname{Re} \mu_2 > 3 \quad (24.7)$$

ou si la première relation est remplacée par

$$\operatorname{Re} \mu_1 > 3. \quad (24.8)$$

Théorème 6: Si s est plus grand que 2, la condition nécessaire et suffisante pour que les s solutions et les s premières dérivées de chacune d'elles soient régulières au point $Z_1 = Z_2$, s'écrit:

$$\operatorname{Re} \mu_{s-1} > s + 1, \quad \operatorname{Re} \mu_s > s + 1. \quad (24.9)$$

On peut enfin déduire de toutes ces relations le théorème 7 pour $s = 1$.

Théorème 7: La solution et sa première dérivée d'une équation différentielle de premier ordre sont régulières dans la condition suivante:

$$\operatorname{Re} (\mu - 1) \geq 1 \quad (24.10)$$

avec

$$(\mu - 1) = 2i \left(\frac{g_0}{g_1} - \frac{e_0}{e_1} \right). \quad (24.11)$$

Démonstration du théorème 7: De (24.4) on tire pour $s = 1$:

$$q_1(\mu) = (\mu - 1) (Z_1^2 G'_1 + Z_1 E'_1) + Z_1 E'_0. \quad (24.12)$$

Les relations (24.5) conduisent alors à la valeur caractéristique (24.11).

La condition particulière (24.7) du théorème 5 provient du fait que la solution correspondant à μ_1 est certainement du premier rang, car il n'y a aucune valeur caractéristique en dehors de μ_1 et μ_2 . Pour des valeurs supérieures de s , il est quelquefois nécessaire d'introduire des solutions de second rang. La s -ième dérivée d'une telle solution contient un terme de la forme:

$$\frac{d^s}{dZ'^s} (Z'^{\mu-1} \ln Z') = (\mu - 1) (\mu - 2) \cdots (\mu - s) Z'^{\mu-s-1} \ln Z' + \cdots. \quad (24.13)$$

Ce terme est infini au point $Z' = 0$ si la partie réelle de μ n'est pas plus grande que $(s + 1)$, ce qui conduit au théorème 6.

25. Les propriétés particulières des équations différentielles avec symétrie

Les équations différentielles avec symétrie jouissent de propriétés particulières en rapport avec les problèmes envisagés.

Théorème 8: *Les solutions des équations différentielles avec symétrie ont le même caractère (régulier ou singulier) autour des deux points singuliers.*

Démonstration du théorème 8: Ce théorème se déduit directement des propriétés de symétrie, car les deux points singuliers sont symétriques l'un par rapport à l'autre. Il peut aussi être démontré par l'analyse. De (11.14) ou de (11.15) on tire les relations:

$$\frac{e_{s-1}}{e_s} = 0, \quad \frac{f_{s-1}}{f_s} + \frac{g_{s-1}}{g_s} = 0. \quad (25.1)$$

La condition (23.6) se simplifie:

$$\operatorname{Re} \left(\frac{i g_{s-1}}{g_s} \right) > 1. \quad (25.2)$$

Elle est donc la même pour les deux points singuliers.

Théorème 9: *Pour les équations différentielles avec symétrie, la condition préliminaire $q_0(\mu) \equiv 0$ dans les cas $Z_1 = Z_2$ est toujours satisfaite.*

Démonstration du théorème 9: De (24.2) on déduit:

$$Z_1 = Z_2 = -\frac{e_s}{2 g_s} = \pm 1. \quad (25.3)$$

La relation (24.1) est alors toujours satisfaite, si l'on tient compte de (25.1).

L'équation caractéristique (24.6) peut aussi se simplifier:

$$\frac{q_1(\mu)}{g_s} = (\mu - s)^2 + (\mu - s) \left(1 - \frac{2i g_{s-1}}{g_s} \right) - \frac{2i g_{s-1}}{g_s} + \frac{2e_{s-2}}{e_s} - \frac{2g_{s-2}}{g_s} = 0. \quad (25.4)$$

Les valeurs caractéristiques se calculent à l'aide de la formule:

$$\mu = s - \frac{1}{2} + \frac{i g_{s-1}}{g_s} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{i g_{s-1}}{g_s} \right)^2 + 2 \frac{g_{s-2}}{g_s} - 2 \frac{e_{s-2}}{e_s}}. \quad (25.5)$$

On en tire une condition suffisante pour que les solutions et leurs s premières dérivées restent régulières:

Théorème 10: *Une équation différentielle d'ordre supérieur à 2, et jouissant de propriétés de symétrie, a des solutions régulières ainsi que les s premières dérivées de chacune d'elles, si toutes les fractions de la relation (25.5) sont réelles et si la condition supplémentaire suivante est satisfaite:*

$$\frac{3}{2} < \left(\frac{i g_{s-1}}{g_s} \right) < \frac{1}{2} + \frac{e_{s-2}}{2 e_s} - \frac{g_{s-2}}{2 g_s}. \quad (25.6)$$

Ces conditions sont suffisantes, mais non nécessaires. La première de ces conditions est réalisée dans la plupart des applications pratiques.

26. L'étude directe des séries

Les résultats du paragraphe 23 peuvent être confirmés par l'étude directe des solutions normales valables dans les domaines I, II et III. Il est ainsi possible d'établir une condition garantissant la convergence des séries correspondantes, non seulement à l'intérieur du domaine, mais sur la limite elle-même. Si l'on demande que la s -ième dérivée de la solution converge aussi sur cette limite, la condition obtenue est identique à (23.6).

Les critères classiques de convergence ne s'appliquent pas à la limite-même du domaine de convergence. Il faut donc se baser sur le théorème suivant (voir I: théorème auxiliaire 2):

Théorème auxiliaire 1: *La série $S_n(\mu)$, définie ci-dessous, converge pour toutes les valeurs positives de n , car sa valeur est comprise entre les deux limites suivantes:*

$$\frac{1}{n \mu^n} < S_n(\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k + \mu} \right)^{n+1} < \frac{1}{n(\mu - 1)^n}, \quad n < 0. \quad (26.1) \quad (I:13.17)$$

On peut en déduire la condition pour le rapport D_{n-1}/D_n :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D_{n-1}}{D_n} = Z_1 \lim \left(\frac{\mu + n}{\mu + n - 1} \right)^t = (1 + t y) Z_1 \quad (26.2)$$

avec l'inégalité

$$\operatorname{Re} t > 1 \quad (26.3)$$

et la définition

$$y = \frac{1}{\mu + n}. \quad (26.4)$$

L'opération de la dérivation a pour effet de diminuer l'exposant t d'une unité. Pour garantir la convergence de la s -ième dérivée, il faut remplir la condition

$$\operatorname{Re} t > s + 1. \quad (26.5)$$

Nous considérons le système récurrent à la limite. Nous obtenons:

$$\frac{D_{n-1}}{D_n} = (1 + t y) Z_1 \quad (26.6)$$

et

$$\left. \begin{aligned} & Z_1^2 (1 + t y)^2 [g_s (\mu + n - 1)^s - i g_{s-1} (\mu + n - 1)^{s-1}] \\ & + Z_1 (1 + t y) [e_s (\mu + n)^s - i e_{s-1} (\mu + n)^{s-1}] \\ & + [f_s (\mu + n - 1)^s - i f_{s-1} (\mu + n - 1)^{s-1}] = 0. \end{aligned} \right\} \quad (26.7)$$

Nous pouvons négliger les termes quadratiques en y après avoir divisé toute l'équation par $(\mu + n)^s$:

$$\left. \begin{aligned} & Z_1^2 (1 + 2 t y) [g_s (1 - s y) - i g_{s-1} y] + Z_1 (1 + t y) [e_s - i e_{s-1} y] \\ & + [f_s (1 + s y) - i f_{s-1} y] = 0. \end{aligned} \right\} \quad (26.8)$$

Cette équation contient un terme constant qui est nul par définition, un terme linéaire qui détermine la valeur de t et un terme quadratique qui peut être négligé:

$$t (2 g_s Z_1^2 + e_s Z_1) - s (Z_1^2 g_s - f_s) - i (Z_1^2 g_{s-1} + Z_1 e_{s-1} + f_{s-1}) = 0. \quad (26.9)$$

A cause de (11.5) on peut écrire:

$$2 g_s Z_1^2 + e_s Z_1 = Z_1^2 g_s - f_s = -(Z_1 e_s + 2 f_s) \quad (26.10)$$

et enfin

$$2 g_s Z_1^2 + e_s Z_1 = Z_1 e_s \sqrt{1 - 4 \varphi}. \quad (26.11)$$

Pour finir, on obtient la valeur de t :

$$t = s + \left(\frac{i g_{s-1}}{2 g_s} - \frac{i f_{s-1}}{2 f_s} \right) - \frac{1}{\sqrt{1 - 4 \varphi}} \left(\frac{i g_{s-1}}{2 g_s} + \frac{i f_{s-1}}{2 f_s} - \frac{i e_{s-1}}{e_s} \right). \quad (26.12)$$

La condition (26.5) est donc identique à la condition (23.6), de sorte que le théorème suivant est démontré.

Théorème 11: Les deux propriétés suivantes sont réalisées simultanément si la condition:

$$\operatorname{Re} \left(\frac{i g_{s-1}}{2 g_s} - \frac{i f_{s-1}}{2 f_s} \right) \pm \operatorname{Re} \left(\frac{i e_{s-1}}{e_s} - \frac{i f_{s-1}}{2 f_s} - \frac{i g_{s-1}}{2 g_s} \right) \frac{1}{\sqrt{1-4\varphi}} > 1 \quad (26.13)$$

est satisfaite:

- Les points singuliers Z_1 et Z_2 respectivement sont des pôles pour aucune des solutions de l'équation différentielle, ainsi que pour aucune des s premières dérivées de chacune d'elles.
- Les séries qui représentent les solutions et leurs s premières dérivées dans les domaines I et III, resp. II et III convergent aussi sur la limite de ces domaines.

Cette condition n'est pas valable si les points Z_1 et Z_2 sont confondus. Elle prend une forme simplifiée

$$\operatorname{Re} \left(i \frac{g_{s-1}}{g_s} \right) > 1 \quad (26.14)$$

si l'équation différentielle est symétrique ou antisymétrique.

On peut supposer que les propriétés a) et b) sont aussi réalisées en même temps, même si Z_1 est égal à Z_2 . Les conditions correspondantes furent étudiées au paragraphe 24.

3. La méthode numérique dans le cas $|Z_1| = |Z_2|$

31. Les conditions fondamentales

La validité de la méthode numérique fut démontrée (dans I, paragraphes 15 et 16) pour l'intérieur du domaine III:

$$|Z_1| < |Z| < |Z_2|. \quad (31.1)$$

Il est possible d'étendre ce domaine de validité en deux phases. Tout d'abord on montre que les séries valables dans le domaine III correspondent aux solutions de l'équation différentielle, aussi sur la limite de convergence, si les dites séries y convergent. Ensuite, on étudie la validité de la méthode numérique quand les valeurs absolues de Z_1 et de Z_2 sont égales. Le domaine III selon (11.12) a entièrement disparu. Il ne reste qu'une courbe:

$$|Z_1| = |Z| = |Z_2| \quad \text{domaine III}' \quad (31.2)$$

sur laquelle la méthode numérique est applicable.

Le théorème (I: théorème 15), qui détermine la validité de la méthode numérique dans le domaine III, ne peut cependant pas s'appliquer au domaine III'. Il faut donc se baser sur les définitions (12.9) et sur le théorème 1.

La première condition (12.6) se démontre dans le cas général ($|Z_1| < |Z_2|$) de la façon suivante. De nouveaux paramètres η'_n sont ainsi définis:

$$\alpha_n = \varrho_1 (\mu + n) + \eta'_n. \quad (31.3)$$

(I:15.24)

La relation de récurrence (12.4) peut s'écrire:

$$\alpha_{n-1} = 1 - \frac{\varphi(\mu + n)}{[\varrho_1(\mu + n) + \eta'_n]} \quad (31.4)$$

et conduit à une équation récurrente pour les $|\eta'_n|$:

$$|\eta'_{n-1}| < r' |\eta'_n| + |\varrho_1(\mu + n) - \varrho_1(\mu + n - 1)| \quad (31.5)$$

(I:15.25)

avec la définition:

$$1 > r' > \left| \frac{\varrho_1(\mu + n)}{1 - \varrho_1(\mu + n)} \right|. \quad (31.6)$$

(I:15.26)

La démonstration envisagée n'était pas valable si r' est égal à 1. La fonction $\varrho_1(\mu + n)$ peut cependant être développée en série de MACLAURIN:

$$\varrho_1(\mu + n) = \varrho_1(\infty) + \frac{\varrho'}{\mu + n} + \frac{\varrho''}{(\mu + n)^2} + \dots \quad (31.7)$$

Si n est assez grand, on peut écrire:

$$|\varrho_1(\mu + n) - \varrho_1(\mu + n - 1)| < \frac{2k |\varrho^{(k)}|}{(\mu + n)^{k+1}} \quad (31.8)$$

où $\varrho^{(k)}$ correspond au premier coefficient ϱ' , ϱ'' , etc., qui soit différent de zéro.

De (31.5) et de (31.8) on déduit

$$|\eta'_{n-1}| < 2 |\varrho^{(k)}| \sum_{m=0}^{\infty} \frac{k}{(\mu + n + m)^{k+1}} < \frac{2 |\varrho^{(k)}|}{|\mu + n - 1|^k} \quad (31.9)$$

avec

$$r' = 1, \quad (31.10)$$

si l'on tient compte du théorème auxiliaire 1.

Théorème 12: Les paramètres η'_n diminuent donc toujours au moins comme $(1/n)$ quand n tend vers l'infini. La condition (12.6) se trouve réalisée dans tous les cas, même si seul le domaine III' subsiste.

32. Les autres conditions du théorème 1

La seconde condition du théorème 1 est toujours réalisée en même temps que la première, de sorte qu'il n'est pas nécessaire de l'étudier. La troisième condition ne fut démontrée que si le point Z est à l'intérieur du domaine III. Il faut donc étudier spécialement le cas, où ce point se trouve sur la limite de convergence.

La série dans l'équation (12.8) se subdivise en trois parties.

$$\left. \begin{aligned} \sum_1 &= \sum_{n=0}^{N''} |D'_n - D_n| |Z^n|, \\ \sum_2 &= \sum_{n=N''+1}^N |D'_n - D_n| |Z^n|, \\ \sum_3 &= \sum_{n=N+1}^{\infty} |D_n Z^n|. \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} (32.1) \\ (I:15.34) \end{array}$$

La valeur de N'' est choisie de telle sorte que la relation suivante est satisfaite:

$$|\delta \alpha_n| \leq |\delta \alpha_N| \quad (N'' \leq n < N) \quad (32.2) \quad (I:15.35)$$

avec la définition:

$$\delta \alpha_n = \frac{\alpha'_n - \alpha_n}{\alpha_n}. \quad (32.3) \quad (I:15.22)$$

Il est enfin possible de poser:

$$D'_{N''} = D_{N''}. \quad (32.4) \quad (I:15.36)$$

La somme partielle \sum_1 tend toujours vers 0 quand N tend vers ∞ , car elle se compose d'un nombre fini de termes qui ont tous la valeur limite 0. La somme partielle \sum_3 correspond au reste d'une série qui définit la solution exacte. Ce reste tend vers 0 aussitôt que la dite série converge.

La somme partielle \sum_2 doit être examinée de façon très attentive. De (32.2), de (32.4) et de la définition (12.9) pour α_n on peut tirer:

$$|D'_n - D_n| \leq |D_n| [(1 + |\delta \alpha_N|)^{n-N''} - 1]. \quad (32.5) \quad (I:15.38)$$

Cette grandeur peut être transformée à l'aide du théorème auxiliaire 2:

Théorème auxiliaire 2: Dans tous les cas, l'inégalité suivante est satisfaite:

$$(1 + |\delta \alpha_N|)^{n-N''} - 1 < n |\delta \alpha_N| \exp (n |\delta \alpha_N|). \quad (32.6)$$

Démonstration: La formule binômiale de NEWTON a la forme:

$$(1 + |\delta \alpha_N|)^{n-N''} - 1 = (n - N'') |\delta \alpha_N| + (n - N'') (n - N'' - 1) \frac{|\delta \alpha_N|^2}{2!} + \dots \quad (32.7)$$

La comparaison avec la série représentant la fonction exponentielle conduit à la relation suivante si $n \geq N''$:

$$(1 + |\delta \alpha_N|)^{n-N''} - 1 < (n - N'') |\delta \alpha_N| \exp \{ (n - N'') |\delta \alpha_N| \}. \quad (32.8)$$

Les nombres n et N'' sont tous les deux positifs ou nuls et le premier est plus grand que le second. La relation (32.8) est donc valable. Le remplacement de $(n - N'')$ par n augmente le membre de droite de (32.8) et conduit au membre de droite de (32.6).

Les termes de \sum_2 se composent de deux facteurs, dont le second peut être transformé à l'aide de (32.6). Le premier peut aussi être remplacé par une expression simple, quand on tient compte de la convergence de la série:

$$|D_n Z^n| < \frac{M}{n^{k'}}, \quad (32.9)$$

k' étant plus grand que 1. La relation (31.9) conduit à l'expression

$$\sum_{n=N''+1}^N |D'_n - D_n| |Z^n| < \sum_n \frac{M'}{N^k n^{k'-1}}, \quad (32.10)$$

car la fonction exponentielle de (32.6) est bornée ($k' > 1$). M et M' sont deux grandeurs qui restent bornées. On peut dans chaque cas les considérer comme des constantes.

Le théorème auxiliaire 1 permet de calculer la somme dans (32.10):

$$\left. \begin{aligned} \sum_2 &< \frac{M'}{k' - 2} \cdot \frac{1}{N^{k' - 2} \cdot N^k} & (k' > 2), \\ &< \frac{M'}{N^k} \ln \frac{N}{N''} & (k' = 2), \\ &< \frac{M'}{2 - k'} \cdot \frac{N^{2-k'}}{N^k} & (k' < 2). \end{aligned} \right\} \quad (32.11)$$

Dans les premiers cas, la limite est nulle quand N tend vers ∞ , car le facteur N^k dans le dénominateur est plus important que $\ln N$. Dans le troisième cas, l'exposant de N est $(2 - k' - k)$. Il est toujours négatif, car k et k' sont plus grand que 1. La troisième condition est donc remplie, si la série converge et si la relation (31.9) est satisfaite avec $k \geq 1$.

33. La première condition dans le cas $|Z_1| = |Z_2|$

Le cas $|Z_1| = |Z_2|$ se différencie du cas général, seulement par le fait que les deux grandeurs $\varrho_1(\infty)$ et $\varrho_2(\infty) = 1 - \varrho_1(\infty)$ sont conjuguées complexe et ont la même valeur absolue. Cependant, ce n'est pas toujours le cas pour $\varrho_1(\mu + n)$ et $\varrho_2(\mu + n)$, si $(\mu + n)$ reste fini.

Théorème 13: Les trois conditions du théorème 1 sont aussi réalisées, si $|Z_1|$ est égal à $|Z_2|$ et si, par contre, Z_1 n'est pas égal à Z_2 , à la condition que les séries convergent en ces deux points.

Démonstration: La série de MACLAURIN pour $\varrho_1(\mu + n)$ a toujours la forme (31.7) quand $Z_1 \neq Z_2$, car la racine ne donne lieu à aucun membre avec l'exposant $(1/2)$. La relation (31.9) fut obtenue avec l'hypothèse $r' = 1$. Elle est donc aussi valable si Z_1 et Z_2 ont la même valeur absolue. Ce cas ne se différencie pas de façon essentielle du cas général.

Il serait cependant intéressant de trouver un procédé spécial, afin d'améliorer la précision des résultats. Soit

$$\varphi(\mu + n) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varphi_m}{(\mu + n)^m} \quad (\varphi_0 = \varphi) \quad (33.1)$$

et

$$\varrho_1(\mu + n) = \frac{1}{2} \left[1 - \beta + \frac{2\varphi_1}{\beta(\mu + n)} + \dots \right] \quad (\beta = \sqrt{1 - 4\varphi_0}). \quad (33.2)$$

La valeur de α'_N sera ainsi définie:

$$\alpha'_N = \frac{1}{2} \left[1 - \beta + \frac{\gamma}{(\mu + N)} \right]. \quad (33.3)$$

Le nouveau paramètre γ doit être choisi de façon que la relation de récurrence n'en modifie pas la valeur:

$$\frac{1}{2} \left(1 - \beta + \frac{\gamma}{\mu + N - 1} \right) = \frac{\varphi_0 + \varphi_1 / (\mu + N)}{(1/2) [1 + \beta + \gamma / (\mu + N)]}. \quad (33.4)$$

On en déduit:

$$(1 - \beta^2) + \gamma \left(\frac{1 + \beta}{\mu + N - 1} - \frac{1 - \beta}{\mu + N} \right) = 4\varphi_0 + \frac{4\varphi_1}{\mu + N}. \quad (33.5)$$

Les termes constants sont égaux selon la définition de β . La valeur de γ s'obtient à l'aide de la relation

$$\gamma = \frac{2\varphi_1}{\beta}, \quad (33.6)$$

car tous les termes d'ordres supérieurs sont négligés. La grandeur β peut prendre n'importe quelle valeur à l'exception de 0. La relation (33.6) correspond cependant exactement à la formule approchée (31.3). La méthode habituelle conduit donc aux résultats les plus précis, aussitôt que β n'est pas nul.

Théorème 14: Dans tous les cas, où les points singuliers Z_1 et Z_2 sont séparés ($\beta \neq 0$), la relation suivante est satisfaite:

$$|\delta\alpha_N| < \frac{M''}{N^2}. \quad (33.7)$$

M'' est un nombre réel, positif et borné.

Cette inégalité est en général plus sévère que la relation (31.9). La méthode numérique est donc valable si les séries obtenues convergent.

34. La première condition avec $Z_1 = Z_2$

Les séries valables dans le domaine III' ne convergent, si $Z_1 = Z_2$, que si la condition préliminaire (24.3) est satisfaite.

Théorème 15: La condition préliminaire (24.3) conduit à la relation:

$$\varphi_1 = 0. \quad (34.1)$$

Démonstration: Les définitions (11.11) pour $A(\mu+n)$, $B(\mu+n)$ et $C(\mu+n)$ et celle de $\varphi(\mu+n)$ nous donne la relation suivante:

$$\varphi(\mu+n) = \left. \begin{aligned} & \frac{g_s - i \frac{g_{s-1}}{\mu+n-1} - \frac{g_{s-2}}{(\mu+n-1)^2} - \dots}{e_s - i \frac{e_{s-1}}{\mu+n-1} - \frac{e_{s-2}}{(\mu+n-1)^2} - \dots} \\ & \times \frac{f_s - i \frac{f_{s-1}}{\mu+n} - \frac{f_{s-2}}{(\mu+n)^2} - \dots}{e_s - i \frac{e_{s-1}}{\mu+n} - \frac{e_{s-2}}{(\mu+n)^2} - \dots} \end{aligned} \right\} \quad (34.2)$$

Le membre de droite peut se développer en série de MACLAURIN:

$$\varphi(\mu+n) = \varphi \left[1 - \frac{i}{\mu+n} \left(\frac{g_{s-1}}{g_s} + \frac{f_{s-1}}{f_s} - 2 \frac{e_{s-1}}{e_s} \right) + \dots \right]. \quad (34.3)$$

La valeur de φ_1 selon la définition (33.1) est donc nulle.

Le théorème 15 a une conséquence très importante. La relation (31.7) est aussi valable quand $Z_1 = Z_2$ si les séries convergent, car l'expression sous la

racine dans la définition de $q_1(\mu + n)$ est du deuxième ordre en $(\mu + n)$. La grandeur k dans la relation (31.9) est au moins égale à 1 et la méthode numérique est applicable.

Le procédé de calcul peut être amélioré, et l'écriture simplifiée, en raison des relations suivantes, qui sont valables dans le cas étudié ici:

$$\varphi = \frac{1}{4}, \quad q_1(\infty) = \frac{1}{2}. \quad (34.4)$$

Soit les paramètres suivants:

$$p_n = \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4\varphi(\mu + n)}, \quad q_n = \frac{1}{2} - \alpha_n. \quad (34.5)$$

La méthode normale donne:

$$q_N = p_N \quad (34.6)$$

et

$$q_{n-1} = \frac{q_n + 2p_n^2}{1 + 2q_n}. \quad (34.7)$$

On en déduit:

$$q_{N-1} = q_N. \quad (34.8)$$

Cette solution n'est pas idéale, car les paramètres q_n devraient être en première approximation inversement proportionnels à $(\mu + n)$. Il est donc avantageux de modifier la relation (34.6):

$$q_N = \gamma p_N \quad (34.9)$$

et de définir γ de façon à satisfaire l'équation

$$q_{N-1} = \gamma p_{N-1}. \quad (34.10)$$

La relation de récurrence (34.7) est toujours valable:

$$\gamma p_{N-1} = \frac{\gamma p_N + 2p_N^2}{1 + 2\gamma p_N}, \quad (34.11)$$

c'est-à-dire:

$$\left. \begin{aligned} 2\gamma^2 p_N p_{N-1} + \gamma (p_{N-1} - p_N) - 2p_N^2 &= 0, \\ \gamma &= -\frac{1}{4} \left(-\frac{1}{p_N} - \frac{1}{p_{N-1}} \right) + \sqrt{\frac{1}{16} \left(\frac{1}{p_N} - \frac{1}{p_{N-1}} \right)^2 + \frac{p_N}{p_{N-1}}}. \end{aligned} \right\} \quad (34.12)$$

Cette relation peut être simplifiée si N est très grand:

$$\frac{1}{p_N} - \frac{1}{p_{N-1}} = \frac{N}{\sqrt{\varphi_2}} - \frac{N-1}{\sqrt{\varphi_2}} = \frac{1}{\sqrt{\varphi_2}}, \quad \frac{p_N}{p_{N-1}} = 1. \quad (34.13)$$

On en déduit pour terminer :

$$q'_N = \gamma \frac{\sqrt{\varphi_2}}{N} = \frac{1}{N} \left[\sqrt{\varphi_2 + \frac{1}{16}} - \frac{1}{4} \right]. \quad (34.14)$$

Les valeurs correspondantes des paramètres q_n seront désignés par q'_n pour les différencier des valeurs obtenues par la méthode numérique normale. Les erreurs commises sur q'_n sont du second ordre en $(\mu + N)^{-1}$, de sorte que le théorème 13 peut être encore étendu au cas $Z_1 = Z_2$:

Théorème 16 : *La méthode numérique est applicable à l'intérieur du domaine III sans restriction, elle conduit aussi à la solution sur les limites de convergences, si la série correspondante converge sur cette limite. La méthode numérique est encore valable dans le domaine III' si la solution est représentée par une série convergente dans ce domaine. Il est toujours possible de déterminer la valeur approchée de α_N de façon à satisfaire la relation*

$$|\delta \alpha_N| < \frac{M^*}{N^2}. \quad (34.15)$$

Les critères de convergence ont été exposés dans le chapitre précédent.

4. Un exemple numérique

41. La solution analytique

L'étude d'un procédé de calcul ne saurait être complète, s'il n'est pas démontré pratiquement à l'aide d'un exemple numérique. Il est alors avantageux de choisir dans ce but une équation différentielle, dont la ou les solutions peuvent être déterminées avec toute la précision nécessaire. Une équation simple, ne comportant qu'un ou deux paramètres arbitraires, présente aussi de grands avantages.

L'équation différentielle suivante remplit ces deux conditions :

$$(1 + 2 \vartheta \cos x) \frac{du}{dx} + 2 p \vartheta \sin x u = 0. \quad (41.1)$$

Nous considérerons p et ϑ comme réels, quoique cela ne soit pas nécessaire. C'est une équation du type antisymétrique qui a une solution symétrique dans le domaine III :

$$\mu_{III} = 0 \quad (41.2)$$

selon (I, paragraphe 21). Cette solution est unique, puisque l'équation est du premier ordre.

La solution analytique de (41.1) est la suivante:

$$u = K (1 + 2 \vartheta \cos x)^p, \quad \frac{du}{dx} = -2p \vartheta \sin x K (1 + 2 \vartheta \cos x)^{p-1}. \quad (41.3)$$

Les points singuliers sont déterminés par la relation:

$$\cos x_0 = -\frac{1}{2\vartheta}. \quad (41.4)$$

Ces valeurs de x_0 sont par paires conjuguées complexe si $|\vartheta|$ est inférieur à 0,5, elles sont symétriques par rapport à l'origine, dès que $|\vartheta|$ dépasse 0,5, elles sont enfin superposées ($Z_1 = Z_2$) quand $|\vartheta| = 0,5$.

Le cas $\vartheta = 0,5$ est particulièrement intéressant. De (41.3), on peut déduire:

$$(1 + \cos x)^p = 2 \left(\cos \frac{x}{2} \right)^{2p} \quad (41.5)$$

et par dérivation:

$$\frac{du}{dx} = -K 2^p p \sin \frac{x}{2} \left(\cos \frac{x}{2} \right)^{2p-1}. \quad (41.6)$$

La valeur de du/dx pour $x = x_0$ dépend de la valeur de p . Dans le cas général, on obtient:

$$\left(\frac{du}{dx} \right)_{x_0} = 0 \quad (p > 1), \quad \left(\frac{du}{dx} \right)_{x_0} = \infty \quad (p < 1). \quad (41.7)$$

Dans le cas $\vartheta = 0,5$, il vient par contre:

$$\left(\frac{du}{dx} \right)_{x_0} = 0 \quad \left(p > \frac{1}{2} \right), \quad \left(\frac{du}{dx} \right)_{x_0} = \infty \quad \left(p < \frac{1}{2} \right), \quad \vartheta = 0,5. \quad (41.8)$$

Cette différence dans la valeur limite de p au sujet de la convergence des séries, s'est déjà manifestée au chapitre 2, où le cas $Z_1 = Z_2$ a dû être étudié séparément.

Enfin, il faut remarquer que la solution reste toujours réelle pour x réel, sauf si ϑ est plus grand que 0,5. La parenthèse de (41.3) change alors de signe et la solution peut devenir complexe.

42. Les méthodes générales de calcul

Le système fondamental correspondant à (41.1) s'écrit:

$$\vartheta (\mu + n - 1 - p) D_{n-1} + (\mu + n) D_n + \vartheta (\mu + n + 1 + p) D_{n+1} = 0. \quad (42.1)$$

On en déduit immédiatement les valeurs caractéristiques:

$$\mu = -1 - p \quad \text{domaine I}; \quad \mu = 1 + p \quad \text{domaine II}; \quad \mu = 0 \quad \text{domaine III}. \quad (42.2)$$

La valeur caractéristique pour le domaine III se déduit de la propriété de symétrie de l'équation différentielle.

La condition de convergence se déduit dans le cas général du théorème 4 :

$$\operatorname{Re} (p) > 1 . \quad (42.3)$$

Cette valeur limite correspond exactement à celle que donne la solution analytique et que précise les relations (41.7).

Dans le cas spécial $\vartheta = 0,5$, on déduit du théorème 7 :

$$\operatorname{Re} (2p) > 1, \quad p > 0,5 , \quad (42.4)$$

la valeur déterminée par la solution analytique (voir 41.8).

Les équations spéciales de la méthode numérique sont les suivantes :

$$\varphi(n) = \vartheta^2 \frac{(n-1-p)(n+p)}{n(n-1)} = \vartheta^2 \left(1 - \frac{p+p^2}{n^2-n} \right) \quad (42.5)$$

et

$$\delta_n = -\vartheta (n+p+1) \frac{D_{n+1}}{D_n} = \vartheta^2 \frac{n(n+1)-p(p+1)}{n+1-\delta_{n+1}} . \quad (42.6)$$

En raison de la symétrie, il n'est pas nécessaire de calculer les ε_n .

On peut enfin remarquer que la solution présente une forme polynomiale selon I: théorème 29, quand p est un entier positif :

$$A(n=p+1) = 0, \quad C(n=-p-1) = 0, \quad (42.7)$$

car la valeur de m définie par la relation (I:22.1) est la suivante :

$$m = -2p - 2 < -1 . \quad (42.8)$$

Dans ce cas, le développement de FOURIER de la solution analytique (41.3) ne comporte, en effet, qu'un nombre fini de termes.

43. Les résultats numériques pour $|Z_1| < |Z_2|$

Les résultats généraux obtenus par la théorie des méthodes numérique et directe correspondent exactement à ceux d'une étude de la solution analytique. Une étude numérique avec les valeurs

$$\vartheta = 0,25, \quad Z_1 = -0,267949, \quad Z_2 = -3,732051 \quad (43.1)$$

et

$$\vartheta = 0,5, \quad Z_1 = Z_2 = -1 \quad (43.2)$$

nous permettra de confirmer cette correspondance.

Le cas (43.1) ne présente pas grand intérêt, sauf pour les valeurs de x :

$$|e^{ix}| = |Z_1| \quad \text{ou} \quad |e^{ix}| = |Z_2|. \quad (43.3)$$

Par suite de la symétrie, les résultats sont, d'ailleurs, les mêmes pour ces deux valeurs.

Considérons les nouvelles grandeurs:

$$D'_n = |Z_2|^n D_n. \quad (43.4)$$

La solution $u(x)$ peut s'écrire:

$$u(x' + i x'') = \sum_{-\infty}^{+\infty} D'_n e^{i(\mu+n)x'}, \quad x'' = \ln |Z_1|. \quad (43.5)$$

Les tableaux 1 et 2 contiennent les valeurs de D'_n calculées par la méthode directe, les tableaux 3 et 4, celles que donne la méthode numérique. Le nombre N de la méthode numérique est égal à 32, mais les valeurs de D'_{31} et de D'_{32} sont considérées comme insuffisamment exactes. Les valeurs choisies pour p se situent de part et d'autre de la limite $p = 1$, afin que l'influence de cette limite soit visible. Ces mêmes tableaux numériques contiennent aussi les valeurs de $(\mu + n) D'_n$ et de $(\mu + n)^2 D'_n$, qui permettent d'évaluer la convergence des séries.

Le tableau 5 contient les valeurs numériques de D_n , calculées par la méthode numérique. Elles conduisent directement à la solution avec x réel. Dans le tableau 6 sont, enfin, rassemblées les valeurs de u et u' pour différentes valeurs de x . Les valeurs analytiques, tirées de (41.3) avec $K = 1$ sont désignées par u_{th} , les valeurs calculées et normalisées par u_e . Pour calculer ces dernières, les séries ont été prolongées au delà de $n = 30$ à l'aide d'une formule approchée.

La correspondance entre u_{th} et u_e est pratiquement idéale, sauf pour les valeurs de $u'(Z_1)$. La limite de convergence n'est pas respectée, car elle se situe à $p = 1,055$ dans les résultats de la méthode directe, à $p = 0,945$ dans ceux de la méthode numérique. Ces seules différences proviennent d'une inexactitude dans le prolongement de la série. Il faut remarquer que l'exposant k , utilisé pour le prolongement, n'est connu qu'à 5% environ. Comme cet exposant est très proche de 1, la valeur de $(k - 1)$ peut présenter une erreur supérieure à 100%.

44. Les résultats numériques pour $Z_1 = Z_2$

Le cas Z_1 égal à Z_2 est encore plus intéressant que le précédent, car la méthode numérique n'est pas applicable selon les théorèmes généraux (cf. I, paragraphes 15 et 16). Il a été démontré dans le chapitre 3 qu'il est avantageux d'introduire une valeur de α'_N différente de celle que l'on utilise ordinairement.

Les tableaux numériques contiennent des résultats obtenus à partir des deux formules, afin de permettre une comparaison.

La limite de convergence se situe à $p = 0,5$. Choisissons, pour cette raison, les valeurs suivantes de p :

$$p = 0,5 \quad \text{et} \quad p = 0,6. \quad (44.1)$$

La relation (34.14) et la définition (42.5) donnent la valeur:

$$q'_N = \frac{1}{N} \left[\sqrt{\frac{p(p+1)}{4} + \frac{1}{16}} - \frac{1}{4} \right] = \frac{p}{2N}. \quad (44.2)$$

Théorème 17: La relation (44.2) pour q'_N est aussi valable pour q'_n quel que soit n . Elle est donc rigoureusement exacte.

Démonstration du théorème 17: Dans le cas considéré, on obtient à l'aide de la relation de récurrence (34.7):

$$q'_{n-1} = \frac{\frac{p}{2n} - \frac{p(p-1)}{2n(n-1)}}{1 + p/n} = \frac{p}{2(n-1)} \quad (44.3)$$

ce qu'il fallait démontrer.

L'étude analytique peut être encore prolongée dans le cas $p = 0,5$:

Théorème 18: Les coefficients D'_n de la solution exacte (valeur approchée $q'_N =$ valeur exacte) de (41.1) avec $p = 0,5$ correspondent à l'équation:

$$D'_N = \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2 - 1} D'_0. \quad (44.4)$$

Démonstration du théorème 18: De (44.3) ainsi que des définitions pour δ_n , α_n et q_n , on peut déduire:

$$\delta_1 = 1 \cdot \alpha_1 = (1 - p)/2. \quad (44.5)$$

La relation de récurrence (42.6) permet de calculer la valeur de δ_0 :

$$\delta_0 = \frac{1}{4} \cdot \frac{0 - p(p+1)}{1 - (1-p)/2} = -\frac{p}{2} = -\frac{1}{4} \quad (44.6)$$

dans le cas $p = 0,5$. On obtient, enfin, le premier rapport D_1/D_0 :

$$\frac{D_1}{D_0} = -\frac{2\delta_0}{1,5} = \frac{1}{3} = \frac{1}{4 \cdot 1 - 1}. \quad (44.7)$$

Le cas général conduit à la relation:

$$\delta_n = n \alpha_n = \frac{n}{2} - \frac{p}{2}, \quad \frac{D_{n+1}}{D_n} = -\frac{n-p}{2} \cdot \frac{2}{n+1+p} = -\frac{n-1/2}{n+1+1/2}. \quad (44.8)$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur de (44.8) par $4(n+1/2)$, on obtient:

$$\frac{D_{n+1}}{D_n} = -\frac{4n^2-1}{4(n+1)^2-1}. \quad (44.9)$$

La relation (44.4) se déduit de (44.7) et de (44.9) par induction totale.

On peut encore remarquer au sujet de théorème 18, que les coefficients indiqués par ce théorème, sont les coefficients de FOURIER de la fonction

$$(1 + \cos x)^{1/2} = \sqrt{2} |\cos(x/2)| \quad (44.10)$$

à un facteur près. La méthode numérique modifiée conduit donc, dans ce cas extrême, à des résultats d'une précision analytique.

Les tableaux 7 et 8 contiennent les valeurs calculées pour $p = 0,5$, les tableaux 9 et 10, celles qui correspondent à $p = 0,6$. Pour permettre une comparaison entre la méthode numérique normale et la méthode améliorée, les valeurs de q_n et de $n D_n$ sont aussi indiquées. Les différences $(q_n - q'_n)$ et $(n D_n - n D'_n)$ diminuent quand n diminue, malgré que q_n et $n D_n$ augmentent dans les mêmes conditions. Les erreurs relatives sont rapidement très petites.

Quelques valeurs de $u(x)$ et de $u'(x)$ sont réunies dans le tableau 11. Les valeurs de u_{th} et u_c correspondent de nouveau aux valeurs analytiques avec $K = 1$, et aux valeurs calculées et normalisées. La correspondance peut être considérée comme idéale.

45. Quelques remarques sur le cas $|Z_1| = |Z_2|$

Aucun calcul numérique n'a été effectué avec une valeur de ϑ plus grande que 0,5. Il est cependant possible d'examiner quelques difficultés qui pourraient se présenter. Tout d'abord, les valeurs de α_n ne restent pas réelles. Il y a deux solutions possibles qui sont conjuguées complexes. Ce résultat semble en contradiction avec la définition (41.3) de la solution analytique. Dans le cas $\vartheta > 0,5$, l'expression entre parenthèses change de signe. Comme p n'est pas un nombre entier, la fonction u n'est pas entièrement réelle et ses coefficients de FOURIER ne le sont pas non plus. Les deux valeurs possibles de α_N conduisent à deux possibilités pour la représentation de $(-1)^p$.

Une difficulté se présente aussi si β est très petit. La valeur de N doit être très grande, sinon la précision des résultats laisse à désirer. Cette difficulté se

présente toujours, si les deux points singuliers sont très rapprochés sans être confondus. Ce domaine fait la transition entre les conditions normales (23.6) pour la convergence des séries et les conditions exceptionnelles du paragraphe 24. Cette transition s'effectue de façon progressive dans le sens que les conditions exceptionnelles semblent réalisées pour les faibles valeurs de n , alors que les conditions normales apparaissent pour des valeurs de n d'autant plus grandes, que la distance $Z_2 - Z_1$ est plus petite.

La dernière difficulté qui pourrait se présenter, est liée à la relation :

$$e_s = 0, \quad \varphi(\infty) = \infty. \quad (45.1)$$

La méthode numérique est alors inutilisable. Seule une méthode directe dans le domaine du point Z_1 peut conduire au résultat cherché. Comme l'on a :

$$Z_2 = -Z_1, \quad (45.2)$$

tout le domaine III' se trouve à l'intérieur et sur la limite du domaine de convergence de la série ainsi obtenue.

Il est ainsi démontré que les méthodes directes et numériques, exposées en détail dans la publication I, sont applicables dans tous les cas, où les solutions et leurs premières dérivées (jusqu'à l'ordre s y compris) sont convergentes. Ce résultat ne peut pas s'obtenir par l'étude directe des fractions continues.

Zusammenfassung

Die linearen Differentialgleichungen mit sinusförmigen Koeffizienten weisen im allgemeinen drei Konvergenzgebiete auf, in welchen die Lösungen als quasi-periodische Fourier-Reihen dargestellt werden können. Die Theorie dieser Gleichungen wird auf die Fälle erweitert, in welchen die Lösungen auf die Konvergenzgrenzen gesucht werden. Es zeigt sich, dass die Lösungen auf den Grenzlinien dann konvergieren, wenn besondere Bedingungen erfüllt sind, und dass die numerische Methode für das mittlere Gebiet immer anwendbar ist, wenn die gesuchte Lösung konvergiert, auch in dem Fall, wo die beiden Grenzlinien zusammenfallen und wo deshalb das mittlere Gebiet keine Fläche mehr aufweist. Diese analytischen Ergebnisse erläutern die numerische Auswertung eines Beispiels.

(Reçu: le 3 Février 1958.)

Tableau 1
Les coefficients de Fourier D'_n par la méthode directe

n	$p = 0,90$			$p = 0,95$		
	D'_n	$(\mu + n) D'_n$	$(\mu + n)^2 D'_n$	D'_n	$(\mu + n) D'_n$	$(\mu + n)^2 D'_n$
1	1,00000	-0,90000	0,81000	1,00000	-0,95000	0,90250
2	0,96462	0,096462	0,009646	1,01821	0,05091	0,00255
3	0,012923	0,014215	0,015637	0,040924	0,042970	0,04512
4	0,013389	0,028117	0,059046	0,0065793	0,013488	0,02765
5	-0,0075077	-0,023274	-0,072149	-0,0036874	-0,011247	-0,03430
6	0,0047605	0,019518	0,080024	0,0023069	0,009343	0,03784
7	-32889	-16773	-85542	-15763	-7960	-4020
8	24120	14712	89749	11455	6930	4193
9	-18472	-13115	-93117	-8705	-6137	-4327
10	14618	11841	95912	6842	5508	4434
11	-0,0011868	-0,010800	-0,098280	-0,0005322	-0,004997	-0,04522
12	9836	9934	10033	4552	4575	4588
13	-8291	-9203	-10215	-3818	-4219	-4662
14	7088	8576	10377	3250	3916	4719
15	-6132	-8033	-10523	-2800	-3654	-4768
16	0,0005363	0,007558	0,10657	0,0002438	0,003425	0,04812
17	-4727	-7138	-10778	-2143	-3225	-4854
18	4201	6764	10890	1898	3046	4889
19	-3760	-6430	-10995	-1693	-2887	-4922
20	3386	6129	11093	1520	2744	4953
21	-0,0003066	-0,005856	-0,11185	-0,0001372	-0,002614	-0,04980
22	2790	5608	11272	1245	2496	5004
23	-2550	-5381	-11354	-1135	-2389	-5029
24	2340	5171	11428	1039	2291	5052
25	-2155	-4978	-11499	-955	-2201	-5073
26	0,0001992	0,004801	0,11570	0,0000881	0,002119	0,05096
27	-1846	-4633	-11629	-815	-2042	-5115
28	1716	4479	11690	756	1970	5132
29	-1599	-4333	-11742	-704	-1904	-5150
30	1495	4201	11804	657	1843	5170

Tableau 2
Les coefficients de Fourier D'_n par la méthode directe

n	$p = 1,05$			$p = 1,10$		
	D'_n	$(\mu + n) D'_n$	$(\mu + n)^2 D'_n$	D'_n	$(\mu + n) D'_n$	$(\mu + n)^2 D'_n$
1	1,00000	-1,05000	1,10250	1,00000	-1,1000	1,21000
2	1,12539	-0,05627	0,002814	1,17898	-0,11790	0,01179
3	0,105542	0,10026	0,09525	0,142158	0,12794	0,11515
4	-0,0061946	-0,012079	-0,023554	-0,0117736	-0,022370	-0,04250
5	0,0034261	0,010107	0,029816	0,0065043	0,018862	0,05470
6	-0,0020865	-0,008242	-0,032556	-0,0039081	-0,015242	-0,05944
7	13943	6902	34165	25826	12655	6201
8	-9947	-5918	-35212	-18254	-1077J	-6354
9	7441	5171	35938	13548	9348	6450
10	-5770	-4587	-36467	-10434	-8243	-6512
11	0,0004601	0,004118	0,03686	0,0008271	0,007361	0,06551
12	-3753	-3734	-3715	-6709	-6642	-6576
13	3118	3414	3738	5546	6045	6588
14	-2630	-3143	-3756	-4658	-5543	-6596
15	2248	2911	3770	3965	5115	6598
16	-0,0001943	-0,002710	-0,03780	-0,0003414	-0,004745	-0,06596
17	1696	2536	3791	2969	4424	6592
18	-1493	-2381	-3798	-2604	-4140	-6583
19	1324	2244	3804	2302	3890	6574
20	-1182	-2122	-3809	-2049	-3668	-6566
21	0,0001061	0,002011	0,03811	0,0001835	0,003468	0,06555
22	-958	-1911	-3812	-1652	-3287	-6541
23	869	1821	3815	1495	3125	6531
24	-792	-1738	-3815	-1359	-2976	-6517
25	725	1664	3819	1241	2842	6508
26	-0,0000666	-0,001595	-0,03820	-0,0001137	-0,002717	-0,06494
27	614	1532	3822	1046	2605	6486
28	-568	-1474	-3825	-965	-2499	-6472
29	527	1420	3827	893	2402	6461
30	-490	-1370	-3829	-829	-2313	-6453

Tableau 3
Les coefficients de Fourier D'_n par la méthode numérique

n	$p = 0,90$			$p = 0,95$		
	D'_n	$(\mu + n) D'_n$	$(\mu + n)^2 D'_n$	D'_n	$(\mu + n) D'_n$	$(\mu + n)^2 D'_n$
-3	0,000006	-0,000018	0,000054	0,000003	-0,000009	0,000027
-2	-0,000214	0,000428	-0,000856	-0,000112	0,000224	-0,000448
-1	0,060867	-0,060867	0,060867	0,063947	-0,063947	0,063947
0	1,000000	0,000000	0,000000	1,000000	0,000000	0,000000
1	0,84777	0,84777	0,84777	0,89065	0,89065	0,89065
2	-0,041506	-0,083012	-0,16602	-0,021767	-0,043534	-0,087068
3	0,015058	0,045174	0,13552	0,0075323	0,022597	0,067791
4	-0,0078558	-0,031423	-0,12569	-0,0038338	-0,015335	-0,061341
5	0,0048499	0,024250	0,12125	0,0023277	0,011639	0,058193
6	-0,0033038	-0,019823	-0,11894	-0,0015659	-0,009395	-0,056372
7	24015	16811	11767	11268	7888	55213
8	-18278	-14622	-11698	-8505	-6804	-54432
9	14398	12958	11662	6652	5987	53881
10	-11648	-11648	-11648	-5348	-5348	-53479
11	0,0009627	0,010590	0,11649	0,0004395	0,004835	0,053180
12	-8096	-9715	-11658	-3677	-4412	-52949
13	6908	8980	11675	3123	4060	52779
14	-5967	-8354	-11695	-2686	-3760	-52646
15	5208	7812	11718	2335	3503	52538
16	-0,0004587	-0,007339	-0,11743	-0,0002049	-0,003278	-0,052454
17	4073	6924	11771	1813	3082	52396
18	-3642	-6556	-11800	-1616	-2909	-52358
19	3277	6226	11830	1450	2755	52345
20	-2965	-5930	-11860	-1308	-2616	-52320
21	0,0002696	0,005662	0,11889	0,0001187	0,002493	0,052347
22	-2462	-5416	-11916	-1081	-2378	-52320
23	2258	5193	11945	989	2275	52318
24	-2079	-4990	-11975	-908	-2179	-52301
25	1921	4803	12006	837	2093	52313
26	-0,0001780	-0,004628	-0,12033	-0,0000774	-0,002012	-0,052322
27	1654	4466	12058	718	1939	52342
28	-1542	-4318	-12089	-668	-1870	-52371
29	1441	4179	12119	623	1807	52394
30	-1350	-4050	12150	-582	-1746	-52380

Tableau 4
Les coefficients de Fourier D'_n par la méthode numérique

n	$p = 1,05$			$p = 1,10$		
	D'_n	$(\mu + n) D'_n$	$(\mu + n)^2 D'_n$	D'_n	$(\mu + n) D'_n$	$(\mu + n)^2 D'_n$
-3	-0,000003	0,000009	-0,000027	-0,000005	0,000015	-0,000045
-2	0,000122	-0,000244	0,000488	0,000255	-0,000510	0,001020
-1	0,069988	-0,069988	0,069988	0,072949	-0,072949	0,072949
0	1,000000	0,000000	0,000000	1,000000	0,000000	0,000000
1	0,97481	0,97481	0,97481	1,01601	1,01601	1,01601
2	0,023744	0,047488	0,09498	0,049409	0,098818	0,19764
3	-0,0074198	-0,022259	-0,06678	-0,014613	-0,043839	-0,13152
4	0,0035882	0,014353	0,05741	0,0068814	0,027526	0,11010
5	-0,0021057	-0,010528	-0,05264	-0,0039681	-0,019841	-0,09920
6	0,0013810	0,008286	0,04972	0,0025686	0,015412	0,09247
7	-9752	-6826	-4778	-17924	-12547	-8783
8	7237	5790	4632	13187	10550	8440
9	-5578	-5020	-4518	-10090	-9081	-8173
10	4428	4428	4428	7958	7958	7958
11	-0,0003598	-0,003958	-0,04354	-0,0006430	-0,007073	-0,07780
12	2980	3576	4291	5299	6358	7629
13	-2508	-3260	-4238	-4438	-5769	-7500
14	2139	2995	4193	3769	5277	7387
15	-1845	-2768	-4152	-3239	-4859	-7288
16	0,0001608	0,002573	0,04117	0,0002812	0,004499	0,07199
17	-1413	-2402	-4083	-2463	-4187	-7118
18	1251	2252	4054	2175	3915	7047
19	-1116	-2120	-4028	-1934	-3675	-6982
20	1001	2002	4004	1730	3460	6920
21	-0,0000903	-0,001896	-0,03982	-0,0001556	-0,003268	-0,06862
22	819	1802	3964	1407	3095	6810
23	-746	-1716	-3947	-1278	-2939	-6761
24	682	1637	3929	1166	2798	6716
25	-626	-1565	-3912	-1068	-2670	-6675
26	0,0000576	0,001498	0,03895	0,0000981	0,002551	0,06632
27	-532	-1436	-3877	-904	-2441	-6590
28	493	1380	3864	836	2341	6554
29	-458	-1328	-3851	-775	-2248	-6518
30	427	1281	3843	721	2162	6485

Tableau 5
Les coefficients de Fourier D_n

n	$p = 0,90$	0,95	1,00	1,05	1,10
0	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
1	0,227160	0,238650	0,250000	0,261190	0,272240
2	-0,002980	-0,001563	0,000000	0,001695	0,003547
3	0,000290	0,000145	0,000000	-0,000142	-0,000281
4	-0,000041	-0,000020	0,000000	0,000018	0,000035
5	0,000007	0,000003	0,000000	-0,000003	-0,000005

Tableau 6
Les valeurs de $u(z)$ et $u'(x)$ pour $\vartheta = 0,25$

	p	0,90	0,95	1,05	1,10
Méthode numérique	$u_{th}(0)$	1,440397	1,469896	1,530720	1,562070
	$u_c(0)$	1,440405	1,469898	1,530723	1,562066
	$u_{th}(\pi)$	0,535887	0,517632	0,482968	0,466517
	$u_c(\pi)$	0,535894	0,517637	0,482972	0,466511
	$u_{th}(\pi/2)$	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
	$u_c(\pi/2)$	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
	$u'_{th}(\pi/2)$	0,450000	0,475000	0,525000	0,550000
	$u'_c(\pi/2)$	0,450005	0,474994	0,524999	0,550001
	$u_{th}(Z_1)$	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
	$u_c(Z_1)$	0,000037	0,000059	0,000012	0,000032
	$u_{th}(-Z_1)$	1,86607	1,93187	2,07053	2,14354
	$u_c(-Z_1)$	1,86608	1,93187	2,07053	2,14351
	$u'_{th}(Z_1)$	∞	∞	0,00000	0,00000
	$u'_c(Z_1)$	∞	-26,11	0,4283	0,4294
	$u'_{th}(-Z_1)$	0,72723	0,79470	0,94139	1,02100
	$u'_c(-Z_1)$	0,72727	0,79472	0,94139	1,02094
Méthode directe	$u_c(Z_1)$	0,000204	-0,000078	0,000103	-0,000129
	$u_c(-Z_1)$	1,86607	1,93187	2,07053	2,14354
	$u'_c(Z_1)$	∞	∞	∞	0,6676
	$u'_c(-Z_1)$	0,72713	0,79470	0,94138	1,02088

Tableau 7
Les résultats pour $\vartheta = 0,5$ et $p = 0,5$

n	q_n	q'_n	D'_n	$n D_n$	$n D'_n$
1	0,250033	0,250000	0,333333	0,333319	0,333333
2	0,125082	0,125000	- 0,0666667	- 0,1333096	- 0,133333
3	0,0834608	0,0833333	0,0285714	0,0856803	0,0857142
4	0,0626722	0,0625000	- 0,0158730	- 0,0634476	- 0,0634920
5	0,0502166	0,0500000	0,0101010	0,0504500	0,0505051
6	0,0419275	0,0416667	- 0,00699300	- 0,0418921	- 0,0419580
7	360193	357143	512820	358206	358974
8	315992	312500	- 392157	- 312849	- 313726
9	281712	277778	309598	277653	278638
10	254378	250000	- 250627	- 249532	- 250627
11	0,0232095	0,0227273	0,00207040	0,0226540	0,0227744
12	213601	208333	- 173914	- 207383	- 208697
13	198022	192309	148149	191170	192594
14	184734	178573	- 127715	- 177268	- 178801
15	173279	166667	111236	165212	166854
16	0,0163314	0,0156250	- 0,00097753	- 0,0154653	- 0,0156405
17	154577	147060	86581	145328	147188
18	146862	138889	- 77221	- 137029	- 138998
19	140009	131579	69301	129593	131672
20	133890	125000	- 62540	- 122892	- 125080
21	0,0128400	0,0119048	0,00056722	0,0116819	0,0119116
22	123453	113636	- 51680	- 111289	- 113696
23	118980	108696	47282	106232	108749
24	114921	104167	- 43422	- 101587	- 104213
25	111228	100000	40016	97305	100040
26	0,0107858	0,00961538	- 0,00036996	- 0,0093345	- 0,0096190
27	104776	925926	34305	89672	92624
28	101952	892857	- 31898	- 86251	- 89314
29	993595	862068	29735	83062	86232
30	969763	833333	- 27785	- 80076	- 83335

Tableau 8
Les résultats pour $\vartheta = 0,5$ et $p = 0,5$

n	q_n	q'_n	D'_n	$n D_n$	$n D'_n$
31	0,00947824	0,00806451	0,00026021	0,007728	0,008067
32	927606	781250	- 24420	- 7465	- 7814
33	908958	757576	22962	7217	7577
34	891747	735294	- 21631	- 6983	- 7355
35	875855	714286	20412	6762	7144
36	0,00861178	0,00694445	- 0,00019294	- 0,006552	- 0,006946
37	847624	675676	18265	6354	6758
38	835110	657895	- 17316	- 6165	- 6580
39	823562	641026	16439	5985	6411
40	812913	0,00625000	- 15627	- 5814	- 6251
41	0,00803104	0,00609756	0,00014874	0,005650	0,006098
42	794082	595238	- 14174	- 5494	- 5953
43	785798	581395	13522	5344	5814
44	778208	568181	- 12914	- 5201	- 5682
45	771273	555556	12346	5064	5556
46	0,00764957	0,00543478	- 0,00011815	- 0,004932	- 0,005435
47	759227	531915	11318	4806	5319
48	754055	520833	- 10851	- 4684	- 5208
49	749398	510204	10413	4567	5102
50	745262	500000	- 10001	- 4454	- 5000
51	0,00741610	0,00490196	0,00009613	0,004345	0,004903
52	738422	480769	- 9247	- 4240	- 4808
53	735680	471698	8901	4138	4718
54	733368	462963	- 8574	- 4040	- 4630
55	731470	454546	8265	3945	4546
56	0,00729974	0,00446429	- 0,00007972	- 0,003852	- 0,004464
57	728867	438597	7695	3763	4386
58	728138	431035	- 7432	- 3677	- 4311
59	727778	423729	7182	3593	4237
60	727778	416667	- 6945	- 3511	- 4167

Tableau 9
Les résultats pour $\vartheta = 0,5$ et $p = 0,6$

n	q_n	q'_n	D'_n	$n D_n$	$n D'_n$
1	0,300013	0,300000	0,375000	0,374994	0,375000
2	0,150043	0,150000	- 0,0576922	- 0,115375	- 0,115384
3	0,100073	0,100000	0,0224359	0,0672939	0,0673077
4	0,0751043	0,0750000	- 0,0117057	- 0,0468048	- 0,0468228
5	0,0601374	0,0600000	0,00710703	0,0355128	0,0355352
6	0,0501718	0,0500000	- 0,00473802	- 0,0284014	- 0,0284281
7	430645	428571	336649	235342	235654
8	377439	375000	- 250529	- 200067	- 200423
9	336148	333333	193116	173404	173804
10	303199	300000	- 153035	- 152591	- 153036
11	0,0276319	0,0272727	0,00124011	0,0135924	0,0136412
12	253992	250000	- 102358	- 122297	- 122830
13	235169	230769	85800	110963	111540
14	219101	214286	- 72871	- 101398	- 102019
15	205237	200000	62594	93225	93891
16	0,0193167	0,0187500	- 0,00054298	- 0,0086166	- 0,0086877
17	182573	176471	47511	80014	80769
18	173211	166667	- 41891	- 74605	- 75404
19	164888	157895	37189	69816	70659
20	157449	150000	- 33217	- 65546	- 66434
21	0,0150768	0,0142857	0,00029834	0,0061719	0,0062651
22	144743	136364	- 26930	- 58269	- 59246
23	139289	130435	24420	55145	56166
24	134336	125000	- 22236	- 52301	- 53366
25	129824	120000	20325	49702	50812
26	0,0125703	0,0115385	- 0,00018644	- 0,0047320	- 0,0048474
27	121931	111111	17158	45128	46327
28	118471	107143	- 15838	- 43103	- 44346
29	115291	103448	14661	41229	42517
30	112365	100000	- 13607	- 39489	- 40821

Tableau 10
Les résultats pour $\vartheta = 0,5$ et $p = 0,6$

n	q_n	q'_n	D'_n	$n D_n$	$n D'_n$
31	0,0109668	0,00967741	0,00012660	0,0037870	0,0039246
32	107180	937499	- 11806	- 36358	- 37779
33	104883	909090	11033	34944	36409
34	102761	882352	- 10331	- 33616	- 35125
35	100799	857142	9693	32372	33926
36	0,00989854	0,00833333	- 0,00009110	- 0,0031198	- 0,0032796
37	973082	810811	8577	30088	31735
38	957579	789474	- 8088	- 29043	- 30734
39	943255	769231	7639	28057	29792
40	930031	750000	- 7225	- 27120	- 28900
41	0,00917835	0,00731707	0,00006843	0,0026232	0,0028056
42	906603	714285	- 6490	- 25389	- 27258
43	896276	697674	6163	24587	26501
44	886802	681818	- 5859	- 23822	- 25780
45	878134	666666	5576	23090	25092
46	0,00870229	0,00652173	- 0,00005313	- 0,0022393	- 0,0024440
47	863048	638297	5067	21723	23815
48	856556	624999	- 4838	- 21086	- 23222
49	850722	612244	4623	20472	22653
50	845516	599999	- 4422	- 19885	- 22110
51	0,00840913	0,00588234	0,00004233	0,0019324	0,0021588
52	836888	576922	- 4056	- 18782	- 21091
53	833421	566037	3890	18264	20617
54	830493	555555	- 3733	- 17761	- 20158
55	828086	545454	3585	17276	19718
56	0,00826185	0,00535714	- 0,00003446	- 0,0016811	- 0,0019298
57	824776	526316	3314	16359	18890
58	823847	517242	- 3190	- 15927	- 18502
59	823387	508475	3072	15505	18125
60	823387	500000	- 2960	- 15096	- 17760

Tableau 11
Les valeurs de $u(x)$ pour $\vartheta = 0,5$

	$p = 0,50$		$p = 0,60$	
	u_c	u_{th}	u_c	u_{th}
$u(0)$	1,41421166	1,41421356	1,51571609	1,51571657
$u(\pi)$	- 0,0000010	0,00000000	0,00000076	0,00000000
$u(\pi/2)$	1,00000000	1,00000000	1,00000000	1,00000000
$u'(\pi/2)$	0,5000635	0,50000000	0,600157	0,60000000

On the Viscous Core of a Line Vortex II

By NICHOLAS ROTT, Ithaca, New York, USA¹⁾

In a previous note [1]²⁾, present author discussed some aspects of BURGERS' solution [2] for a vortex in a viscous fluid, which is aligned with an axisymmetric stagnation-point inflow. In the present note, the temperature distribution in this flow field will be calculated under certain limiting conditions.

It is assumed that a steady axisymmetric state is reached, where all functions of state depend only on the radius r . The energy equation is, under these conditions (see, e. g. [3]),

$$\varrho u T \frac{dS}{dr} = \mu \Phi + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(k r \frac{dT}{dr} \right), \quad (1)$$

where ϱ is the density, T the temperature, S the entropy, u the radial velocity, k the thermal conductivity, μ the viscosity and Φ the dissipation function, which has to be calculated for the flow pattern under consideration. Let the radial, circumferential and axial velocity components be

$$u = -a r, \quad v = v(r), \quad w = 2 a z, \quad (2)$$

or, the flow consists of an axisymmetric stagnation-point flow with the 'inflow-gradient' a and a circulatory motion with a velocity $v(r)$ not yet specified. For the velocity field (2) the dissipation is found to be

$$\mu \Phi = \mu \left(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right)^2 + 12 \mu a^2. \quad (3)$$

The second term is due to the 'basic' stagnation point flow; it will be neglected in the limit of 'high Reynolds number' circulatory motion which will be considered presently. Let v be given by BURGERS' solution

$$v = \frac{\Gamma_\infty}{2 \pi r} (1 - e^{-a r^2 / 2 v}) \quad (4)$$

($v = \mu/\varrho$). The total dissipation per unit height can be calculated neglecting the

¹⁾ Cornell University.

²⁾ Numbers in brackets refer to References, page 81.

second term in (3):

$$D = \mu \int_0^{\infty} \left(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right)^2 2\pi r dr. \quad (5)$$

The result is

$$D = \frac{\varrho}{4\pi} \frac{I_{\infty}^2 a}{\nu} \quad (6)$$

independent of μ , as was noticed by BURGERS. Let the value (6) be compared to the neglected term, which is in principle infinitely large; but let the radius A be calculated for which the neglected term equals the value D given by equation (6):

$$\pi A^2 \cdot 12 \mu a^2 = \frac{\varrho}{4\pi} \frac{I_{\infty}^2 a}{\nu}.$$

This leads to the radius

$$A = \frac{1}{4\pi\sqrt{6}} \frac{I_{\infty}}{\nu} r^*, \quad (7)$$

where the 'viscous core' radius is defined as

$$r^* = \sqrt{\frac{2\nu}{a}}. \quad (8)$$

For high values of I_{∞}/ν , i.e., for high Reynolds numbers, it takes a very big radius (compared to r^*) to give a 'basic flow' dissipation comparable to D . On the other hand, the bulk of D is contributed by the dissipation in a region with a radius which is not too big compared to r^* , e.g., $0.98 D$ is found within $10 r^*$. Thus, the proposed simplification implies that 'infinity' means a not too big multiple of r^* .

Replacing S in equation (1) for a perfect gas by

$$T dS = c_p dT - \frac{1}{\varrho} dp \quad (9)$$

the pressure will be computed, consistently with the previously made restriction to the vicinity of the core for high Reynolds numbers, from

$$\frac{dp}{dr} = \varrho \frac{v^2}{r} \quad (10)$$

(neglecting pressure changes due to the basic stagnation point flow) so that equation (1) becomes

$$\varrho u \left(c_p \frac{dT}{dr} - \frac{v^2}{r} \right) = \mu \left(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right)^2 + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(k r \frac{dT}{dr} \right). \quad (11)$$

This relation will be used for the calculation of the temperature distribution. An alternate form can be obtained by combining equation (11) with the Navier-Stokes equation for the circumferential velocity component $v(r)$. The latter equation is, without any simplification for high Reynolds numbers or low compressibility,

$$\varrho u \left(v + \frac{dv}{dr} \right) = \mu \left(\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} - \frac{v}{r^2} \right) + \frac{d\mu}{dr} \left(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right). \quad (12)$$

Multiplying (12) by v and adding it to (11) leads to the following energy equation:

$$\varrho u \left(c_p \frac{dT}{dr} + v \frac{dv}{dr} \right) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(k r \frac{dT}{dr} + \mu r v \frac{dv}{dr} - \mu v^2 \right). \quad (13)$$

The problem of the vortex core at high Reynolds numbers in a viscous compressible gas involves the simultaneous solution of equations (12), (13) and the continuity equation. At this point, a further simplifying assumption will be made, namely, compressibility effects will be considered small. The proposed solution uses the velocity distribution (2) and BURGERS' solution (4), which fulfill continuity and equation (12) for incompressible flow, i.e., $u = -ar$, $\varrho = \text{const}$, and $\mu = \text{const}$. The pressure distribution under this assumption was already given in the author's previous note; here, the temperature distribution will be calculated from equation (11) or (13), using again $u = -ar$ and constant values for ϱ , μ , and k , together with v given by (4). From the values of p and T found in these steps, the state of the gas is known and an iterative recalculation of the velocity field is possible. This plan leads to an expansion of the solution in powers of a 'Mach number' which will be defined below. Actually, in this note no iterative steps will be carried out; the only quantity to be calculated is the temperature, following the plan outlined above. The result represents the limiting temperature distribution for high Reynolds number Re and low Mach number M .

It is intuitively clear (and can be proved *a posteriori*) that the ratio of a typical circumferential velocity, e.g., v_{max} , and the sound velocity c is an appropriate definition of M . The value of the maximum velocity is

$$v_{max} = 0.64 \frac{\Gamma_\infty}{2 \pi r^*}. \quad (14)$$

The condition of high Re and low M leads to the following inequalities (numerical factors are omitted):

$$v \ll \Gamma_\infty \ll r^* c = \left(\frac{2v}{a} \right)^{1/2} c.$$

The possible range for Γ_∞ between these 'limits' is still very large, as the two limits lead to the inequality

$$cl \geq \frac{c^2}{v}$$

for the velocity gradient a . As v is of the order cl , where l is the mean free path, this condition is fulfilled by a wide margin for inflow-gradients of practical interest.

In a first example, let the temperature be calculated in the limit of vanishing thermal conductivity k , or infinite Prandtl number. In this case, the calculation of the temperature from equation (11) leads to a simple quadrature; v has to be introduced from equation (4), and for $u = -av$ the result is found in the following form: put

$$X = \frac{a}{2} \frac{v^2}{v^*} \quad (15)$$

and

$$H^* = \frac{\Gamma_\infty^2 a}{16 \pi^2 v} = \frac{\Gamma_\infty^2}{8 \pi^2 v^{*2}}. \quad (16)$$

The latter quantity is of the order of magnitude of the kinetic 'head' associated with the maximum circulatory velocity; actually from equation (14),

$$H^* = 2.44 \frac{v_{max}^2}{2}. \quad (16a)$$

With these notations, the temperature distribution for $k = 0$ is found to be

$$c_p T = c_p T_\infty - H^* \left[\frac{1}{X} (1 - e^{-2X}) - \frac{1}{X^2} (1 - e^{-X})^2 \right]. \quad (17)$$

The result is plotted in Figure 1 together with the 'kinetic' or 'stagnation enthalpy' which equals $c_p T$ augmented by

$$\frac{v^2}{2} = \frac{H^*}{X} (1 - e^{-X})^2. \quad (18)$$

It is seen that in the center, the (total) enthalpy is reduced as compared to the state at infinity; from (17), it is found that for $x = 0$,

$$c_p T_0 = c_p T_\infty - H^*, \quad (19)$$

a reduction more than twice as big as the kinetic head associated with v_{max} . This remarkable result is the consequence of two opposing effects, which determine T for $k = 0$: the dissipation acts as a steady heat source for the flow, but the gas is also cooled as it drops into a 'pressure pot' while moving toward the core; the net effect, for $k = 0$, is an appreciable cooling in the center.

The situation is further clarified by considering the case of an incompressible fluid, i.e., a liquid, for which the results differ essentially from those obtained above for the 'low Mach number' gas flow. The reason for this difference is that equation (9) is not appropriate for a liquid with an equation of

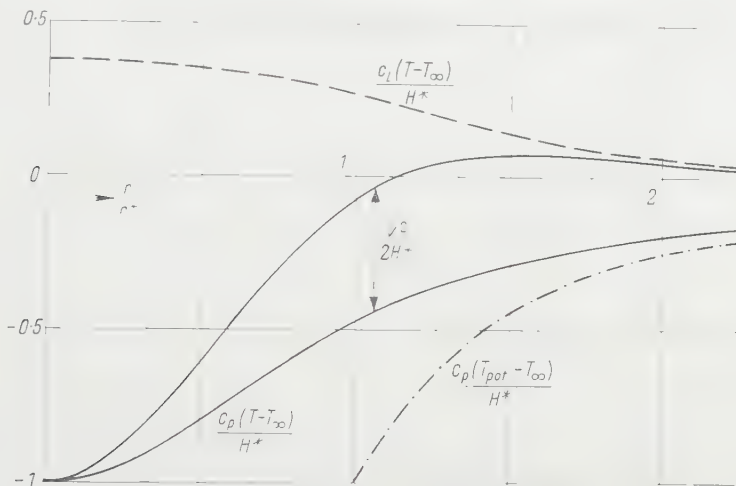


Figure 1

Temperature distributions near the viscous core of a vortex for zero heat conductivity (infinite Prandtl number). The solid curves represent the temperature and stagnation temperature (or enthalpy) for a gas. The broken curve (top) shows the temperature field in a liquid. The dash-dotted curve gives the temperature for an inviscid-isentropic (potential) vortex flow of a gas.

state quite different from the gas law. The proper equation to replace (9) is

$$T dS = c_l dT, \quad (20)$$

where c_l is the specific heat of the liquid at constant volume, and volume changes are neglected. Thus, for a liquid, the energy equation for $k = 0$ is simply

$$-a r c_l \frac{dT}{dr} = v \left(\frac{dv}{dr} - \frac{v^2}{r} \right). \quad (21)$$

The result of the integration is now

$$c_l T = c_l T_\infty + H^* \left[2 F(x) - \frac{2}{x} (e^{-x} - e^{-2x}) + \frac{1}{x^2} (1 - e^{-x})^2 \right] \quad (22)$$

where the function

$$F(x) = \int_x^\infty (e^{-x} - e^{-2x}) \frac{dx}{x} \quad (23)$$

already appeared in the author's previous note for the pressure calculation; it is easily found that

$$F(0) = \log 2. \quad (24)$$

The function (22) is also plotted in Figure 1, and now, as is to be expected, the temperature is always higher than T_∞ . Compared to the case of the gas, the heat sources remained the same, but the effect of cooling by expansion is absent. The temperature for $x = 0$ is now

$$c_l T_0 = c_l T_\infty + (2 \log 2 - 1) H^* = c_l T_\infty + 0.386 H^*. \quad (25)$$

Also shown in Figure 1, for comparison, is the temperature T_{pot} for an inviscid-isentropic gas flow; within the limits of the approximations for low Mach number flow,

$$c_p T_{pot} = c_p T_\infty - \frac{I_\infty^2}{8 \pi^2 r^2} = c_p T_\infty - \frac{H^*}{x}. \quad (26)$$

Next, the thermal conductivity will be re-introduced. Clearly its effect will be a reduction of the temperature-differences found for $k = 0$, i.e., less heating in liquids and less cooling in gases. In what follows, only the case of the gas will be treated.

Introducing the Prandtl number

$$\sigma = \frac{\mu c_p}{k}$$

and using temporarily the variable

$$Y = c_p r \frac{dT}{dr} - v^2 \quad (27)$$

equation (11) becomes, for constant ν and $u = -ar$,

$$\frac{\sigma a r}{\nu} Y + \frac{dY}{dr} = -\sigma r \left(\frac{dv}{dr} + \frac{v}{r} \right)^2 + 2(2\sigma - 1) v \frac{dv}{dr}. \quad (28)$$

Putting

$$Y = Z(r) e^{-\sigma a r^2 / 2 \nu}$$

the determination of Z is reduced to a quadrature, which can be carried out conveniently with the arrangement of the inhomogeneous term indicated in (28), where v from equation (4) has to be introduced. A second quadrature

yields T , and the final result, after some calculation, is

$$c_p T + \sigma v^2 = c_p T_\infty - H^* \left\{ \frac{2\sigma}{2-\sigma} \left\{ (3-2\sigma) F(x) - \int_x^\infty (e^{-\sigma x} - e^{-x}) \frac{dx}{x} \right\} + H^* \sigma (2\sigma - 1) \int_x^\infty e^{-\sigma x} \frac{dx}{x} \int_0^x (1 - e^{-x})^2 e^{\sigma x} \frac{dx}{x} \right\} \quad (29)$$

The result fails for $\sigma = 2$, which, however, does not represent an interesting case and can be calculated separately if needed. An interesting simplification is

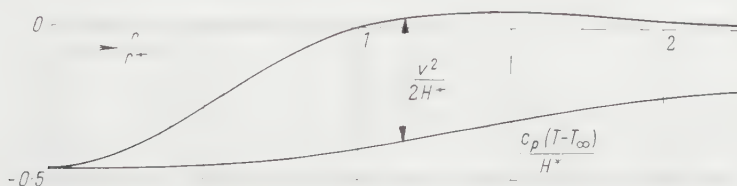


Figure 2

Temperature and stagnation temperature for a gas with Prandtl number 1/2.

found for the value $\sigma = 1/2$, when the term containing the double integral in (29) vanishes, and the explicit result is, using the function F defined by (23),

$$c_p T + \frac{1}{2} v^2 = c_p T_\infty - H^* \left[\frac{4}{3} F(x) - \frac{2}{3} F\left(\frac{x}{2}\right) \right]. \quad (30)$$

This relation is plotted in Figure 2. The cooling effect in the middle is reduced, compared to the case $\sigma = \infty$; using the limit (24), the result is now

$$c_p T_0 = c_p T_\infty - \left(\frac{2}{3} \log 2 \right) H^* = c_p T_\infty - 0.462 H^*. \quad (31)$$

For Prandtl number 1/2, the 'non-recovery' at the core still approximately equals the maximum kinetic head! Writing

$$c_p T_0 = c_p T_\infty - n(\sigma) H^* \quad (32)$$

a 'non-recovery factor' n is defined, which is a function of the Prandtl number. Besides for $\sigma = \infty$ and $\sigma = 1/2$, n can be calculated easily for $\sigma = 1$. The inner integral in the last term of (29) can be evaluated as a series:

$$I(x) = \int_0^1 (e^x + e^{-x} - 2) \frac{dx}{x} = 2 \left(\frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^4}{4 \cdot 4!} + \dots \right)$$

and the double integral becomes

$$\int_0^{\infty} I(x) e^{-x} \frac{dx}{x} = 2 \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \right) = \frac{\pi^2}{12}$$

so that

$$n(1) = 2 \log 2 - \frac{\pi^2}{12} = 0.564. \quad (33)$$

This value together with $n(1/2) = 0.462$ brackets the result for all gases within narrow limits.

The final result is that the steady line vortex aligned with a stagnation point represents for all gases (with $2/3 \leq \sigma < 1$) a 'refrigerator'. It is characteristic for this phenomenon – as a glance at the stagnation-enthalpy curves shows – that a small amount of cold gas is produced at the expense of a large amount of 'lukewarm' gas. Clearly the stagnation-enthalpy has to be considered for this final appraisal, and its maximum excess over $c_p T_\infty$ is far smaller than its greatest defect below its value at infinity. To say that the defect is formed at the expense of the excess is literally true: the flux of the quantity

$$c_p T + \frac{1}{2} v^2 - c_p T_\infty$$

in the axial direction, across a plane $z = \text{const}$, can be shown to be zero for all Prandtl numbers. This flux, as $w = 2 a z = \text{const}$ on the control surface, equals

$$\begin{aligned} 2\pi w \int_0^\infty \left(c_p T + \frac{1}{2} v^2 - c_p T_\infty \right) r dr \\ = \pi w \left(c_p T + \frac{1}{2} v^2 - c_p T_\infty \right) r^2 \Big|_0^\infty - \pi w \int_0^\infty \left(c_p \frac{dT}{dr} + v \frac{dv}{dr} \right) r^2 dr. \end{aligned}$$

The first term vanishes at both limits, and the integral can be shown to vanish by using the energy equation (13) with $v = \text{const}$ and $u = -ar$.

At this point it is unavoidable to think of the case of the Ranque-Hilsch tube. A regular solution of the Navier-Stokes equations has been found yielding refrigeration effects of the order of the maximum kinetic head; nevertheless, the applicability of the results to the Ranque-Hilsch phenomenon is very doubtful. First, the results so far do not explain the 'hot' end of the vortex tube; only modest values of heating were found. Second, the results are restricted to the limiting cases of high Reynolds number and low Mach number, and the latter restriction is very serious for the discussion of most of the vortex tube effects. The case of the 'high M ' vortex is soluble in principle, but not analytically. A solution of these cases with machine calculation has been initiated in-

independently by DONALDSON [4] (who also gave several analytical limits) and is already under way. But even if these restrictions are removed, it is not clear whether calculations based on a strongly simplified flow geometry can explain the vortex tube effect. In particular, the strong experimental evidence (with theoretical support) must be accounted for, which has been gathered at the 'Institut für Aerodynamik' (ETH, Zurich, 5-7), in favor of an explanation of the Ranque-Hilsch effect based on unsteady flow phenomena. It is even possible that both kinds of effects must be considered for a satisfactory explanation.

A further point can be clarified by considering the amount of refrigerated gas found in the solution above; it is of the order

$$\alpha \pi r^{*2} = 2 \pi z r.$$

This is a small amount depending on the kinematic viscosity but independent of the inflow gradient a . There seems to be no way to relate this result to experiences with the vortex tube.

The new result provided by this theory is that recovery rules from boundary-layer theory cannot be applied to the viscous core of a vortex. The main difference lies in the rôle played by the pressure in the two cases.

REFERENCES

- [1] N. ROTT, *On the Viscous Core of a Line Vortex*, Z. angew. Math. Phys. 9b, 543-553 (1958).
- [2] J. M. BURGERS, *Advances in Applied Mechanics*, vol. 1 (Academic Press, 1948).
- [3] L. HOWARD, *Modern Developments in Fluid Dynamics, High Speed Flow*, vol. 1 (Clarendon Press, 1953).
- [4] C. du P. DONALDSON, *Solutions of the Navier-Stokes Equations for Two and Three-Dimensional Vortices*, thesis (Princeton University, 1956).
- [5] H. SPRENGER, *Beobachtungen an Wirbelrohren*, Z. angew. Math. Phys. 2, 293-300 (1951).
- [6] J. ACKERET, *Über die Temperaturverteilung hinter angeströmten Zylindern*, Mitt. Inst. Aerodynamik, ETH Zürich, Nr. 21 (1954).
- [7] H. SPRENGER, *Über thermische Effekte in Resonanzrohren*, Mitt. Inst. Aerodynamik, ETH Zürich, Nr. 21 (1954).

Zusammenfassung

Die Temperaturverteilung wird berechnet im zähen Kern einer Wirbelströmung, welcher eine axisymmetrische Staupunktströmung überlagert ist. Im Grenzfall kleiner Zähigkeit und geringer Zusammendrückbarkeit werden geschlossene Lösungen für verschiedene Prandtl'sche Zahlen angegeben. Im Wirbelkern ergibt sich ein bemerkenswerter Kühlungseffekt; somit wird gezeigt, dass die Erfahrungen der Grenzschicht-Theorie nicht auf den Fall des zähen Wirbelkernes anwendbar sind.

(Received: June 23, 1958.)

Estimation of the Critical Viscous Sub-Layer in Shock Wave Boundary Layer Interaction

By AJIT KUMAR ROY, Bangalore, South India¹⁾

1. Introduction

One of the main complications caused by the boundary layer in a supersonic flow arises from the fact that a portion of the layer is subsonic. Any disturbance to the flow at any point on a body will effect the flow upstream through the agency of the subsonic part of the boundary layer which forms a channel for these disturbances to propagate along the body. Although the effects of the disturbance die down asymptotically because of the viscous action in the boundary layer, in practice, distances as a measure of upstream and downstream effects of the disturbance are defined well enough.

Experiments in the shock wave-boundary layer interactions were first made in Switzerland by ACKERET, FELDMANN and ROTT [2]²⁾ and in the USA by DONALDSON [1] and LIEPMANN [3]. Later on, more detailed study of the interaction problems with laminar and turbulent boundary layers on flat plates were made by LIEPMANN, ROSHKO, and DHAWAN [4] and others. In the present paper, experimental datas have been taken from the work of LIEPMANN, ROSHKO, and DHAWAN [4].

On the theoretical side, an exact mathematical theory is given by LIGHT-HILL [5], regarding the upstream influence through shock or expansion wave-boundary layer interaction, for small pressure rises. In his analysis, the boundary layer has been divided into viscous sublayer and outer inviscid layer. In the inner sublayer, disturbances are effected by viscosity and the Mach number remains small enough for compressibility to be neglected. Exact mathematical analysis for small perturbations as applied in hydrodynamical stability problems has been made in this case of flow without separation and the logarithmic decrement of the upstream influence under zero-heat transfer condition is estimated which confirms experimental results.

The present paper is concerned with the estimation of the viscous sub-layer, a fraction of the total boundary-layer thickness, which as in many other boundary layer problems [6] plays a significant role in such phenomenons and

¹⁾ Department of Aeronautics, Indian Institute of Science.

²⁾ Numbers in brackets refer to References, page 89.

for that purpose, similarity considerations, which serve a very useful tool, have been applied.

2. Notations

- a velocity of sound;
- b distance of the upstream influence measured from the point of incidence of the disturbance on the flat plate;
- C constant in the temperature-viscosity relation

$$- \sqrt{\frac{T_w}{T_\infty}} \left(\frac{T_\infty + S}{T_w - S} \right)$$
 (assumed 1.5 for the numerical evaluation in the present case under zero-heat transfer condition);
- S SUTHERLAND'S constant;
- F unknown function given by equation (1);
- l half the length of the plate;
- x distance of any point on the plate from the leading edge;
- $x_0 = (l - b)$;
- ρ density;
- p static pressure;
- R gas constant
 $= 8.31 \times 10^7 \text{ erg/}^\circ\text{K} \cdot \text{mol}$;
- T absolute temperature;
- $T_0 = 283^\circ \text{ K}$ (assumed in the present case for numerical evaluation);
- $T_1 = 293^\circ \text{ K}$ (assumed in the present case for numerical evaluation);
- $k = \Delta p / p_0$;
- p_0 one atmosphere in the present case;
- u velocity along the plate within the boundary layer;
- μ viscosity coefficient;
- $\nu = \mu / \rho$;
- δ boundary layer thickness;
- δ_c thickness of the critical viscous sublayer
 $= (x - x_0) \sqrt{F}$ as given in equation (9);
- γ ratio of the specific heats of the air (assumed 1.4);
- m tangent of the angle which a straight line makes with the positive direction of the abscissa.

Subscripts

- o Reservoir conditions;
- w conditions at the wall;
- 1 conditions at the outer edge of the boundary layer.

3. Theoretical Considerations

Any disturbance caused to the boundary layer (laminar or turbulent) leading to a positive (in the case of shock wave) or negative pressure gradient (in the case of expansion wave) causes the boundary layer to thicken or thin down [5]. In either cases, boundary layer begins to curve slightly upstream and the curvature of the boundary layer itself induces an additional pressure gradient in the same sense. This in turn, produces further thickening or thinning respectively of the boundary layer. The process repeats itself, pressure gradient decaying gradually as we follow upstream. Theoretically, the decay is an asymptotic one although in practice, upstream influences are defined well enough.

If Δp be the error induced in the pressure distribution along the flat plate at any point x because of the disturbance incident on it, then we expect the error in the pressure reading

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho u^2 F, \quad (1)$$

i.e., proportional to the dynamic pressure $\rho u^2/2$ and also a function of the Reynolds number

$$Re = (x - x_0) \frac{u}{\nu} \quad (2)$$

(i.e., a characteristic Reynolds number formed with the distance $x - x_0$) only, as we neglect the effect of compressibility. The final result will show whether we shall be justified to do so. Since the velocity in the boundary layer tends to zero at the wall it follows that the error tends to zero as the length $(x - x_0)$ is sufficiently small. The distance y from the wall which influences the propagation of the disturbance must be determined by experiment and from it, the effective velocity u for the given boundary layer profile $u(y)$. Let us consider the case when the velocity increases linearly in this region. This approximation is certainly correct when the distance $(x - x_0)$ is small enough.

We thus put

$$\frac{du}{dy} = \text{const.} \quad (3)$$

If we denote the velocity at a distance $y = (x - x_0)$ from the wall by

$$U_1 = (x - x_0) \frac{du}{dy}, \quad (4)$$

we expect the similarity of the processes when we have the same value of the Reynolds number

$$Re = \frac{U_1 (x - x_0)}{\nu} = \frac{(x - x_0)^2}{\nu} \cdot \frac{du}{dy}. \quad (5)$$

The error in the pressure reading is then

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho U_1^2 F = \frac{1}{2} \rho (x - x_0)^2 \frac{du}{dy} F, \quad (6)$$

where F is the proportionality factor depending on Reynolds number i.e.,

$$F = F \left[\frac{(x - x_0)^2}{\nu} \cdot \frac{du}{dy} \right]. \quad (7)$$

Furthermore, the function F will be dependent upon the dimensionless parameter d/l where d is the distance of the wedge from the plate. Again, we can rewrite equation (6) in the form

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho \left[\delta_c \frac{du}{dy} \right]^2, \quad (8)$$

where the characteristic length

$$\delta_c = (x - x_0) \sqrt{F}. \quad (9)$$

This characteristic length δ_c obviously denotes the thickness of the critical region of the boundary layer (namely, the critical viscous sub-layer of LIGHT-HILL) which is the determining factor in the propagation of disturbances upstream.

4. Numerical Evaluation

The tangential stress at the wall is given by

$$\tau_w = \left[\mu \frac{du}{dy} \right]_w. \quad (10)$$

In the laminar case, we have

$$\tau_w = \frac{\mu_1 u_1}{2 \cdot 918} \sqrt{\frac{u_1 C}{\nu_1 x}}$$

and

$$\delta = 5.836 \sqrt{\frac{\nu_1 x C}{u_1}} \left[1 + 0.417 M_1^2 \frac{\gamma - 1}{2} \right] \quad (\text{see Low [7]}). \quad (11)$$

Hence

$$\left[\frac{du}{dy} \right]_w = \frac{\mu_1 u_1}{2 \cdot 918} \cdot \frac{1}{\mu_w} \sqrt{\frac{u_1 C}{\nu_1 x}}.$$

Substituting this value of $[du/dy]_w$ in equation (6), we find,

$$F = \frac{1}{2} \rho \left[\frac{\Delta p}{(x - x_0)^2} \cdot \frac{h x}{\mu_1^3 C^3} \cdot \frac{2 (\rho_0/\rho_0) (\rho_0/\rho_1) \nu_1}{u_1^3} \left[1 + \frac{1}{6} M_1^2 \right] (2 \cdot 918)^2 \right]^2$$

under zero heat transfer condition when

$$\frac{\mu_1}{\mu_w} = C \frac{T_1}{T_w} \quad \left[1 + \frac{1}{6} M_1^2 \right]$$

and putting $k = \Delta p / p_0$ and $\varrho = \varrho_1$.

Further, we rewrite

$$F = F' C_1, \quad (12)$$

where

$$F' = \frac{k x}{(x - x_0)^2}$$

and

$$C_1 = \frac{2 (2.918)^2 R T_0 (\varrho_0 / \varrho_1) \nu_1}{u_1^3 C^3} \left[1 + \frac{1}{6} M_1^2 \right].$$

Again,

$$Re = \frac{(x - x_0)^2}{\sqrt{x} (2.918)} \cdot \frac{C^{3/2} u_1^{3/2}}{\left[1 + \frac{1}{6} M_1^2 \right] \nu_1^{3/2}} = Re' C_2, \quad (13)$$

where

$$Re' = \frac{(x - x_0)^2}{\sqrt{x}}$$

and

$$C_2 = \frac{C^{3/2} u_1^{3/2}}{\left(1 + \frac{1}{6} M_1^2 \right) \nu_1^{3/2}} \cdot \frac{1}{2.918}.$$

In the turbulent case,

$$\tau_w = 0.037 \varrho_1 u_1^2 Re^{-1/5} \left(\frac{T_w}{T_1} \right)^{-0.35}, \quad \delta = 0.38 Re^{-1/5} x$$

and

$$Re = x \frac{u_1}{\nu_1} \quad (\text{see LIGHTHILL [5]}). \quad (14)$$

Hence, under zero-heat transfer condition

$$F = \frac{k x^{2/5}}{(x - x_0)^2} \cdot \frac{2 R T_0 (\varrho_0 / \varrho_1) C^2 \nu_1^{8/5}}{(0.037)^2 u_1^{18/5}} \left[1 + \frac{M_1^2}{6} \right]^{2.7} = F' C_1, \quad (15)$$

where

$$F' = \frac{k x^{2/5}}{(x - x_0)^2}$$

and

$$C_1 = \frac{2 R T_0 (\varrho_0 / \varrho_1) C^2 \nu_1^{8/5}}{(0.037)^2 u_1^{18/5}} \left[1 + \frac{M_1^2}{6} \right]^{2.7}.$$

Further

$$Re = \frac{(x - x_0)^2}{x^{1/5}} \cdot \frac{0.037}{C} \cdot \frac{u_1^{9/5}}{\left[1 + \frac{M_1^2}{6}\right]^{1.35} v_1^{9/5}} = Re' C_2 \tag{16}$$

if we put

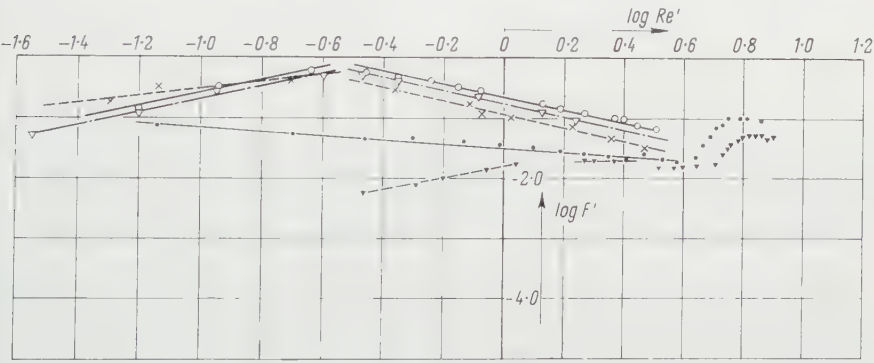
$$Re = \frac{(x - x_0)^2}{x^{1/5}}$$

and

$$C_2 = \frac{0.037 u_1^{9/5}}{C \left(1 + \frac{M_1^2}{6}\right)^{1.35} v_1^{9/5}}$$

5. Result

The adjoining figure shows the graphs between $\log F'$ and $\log Re'$ in the different cases. With the help of the conversion formulae (13), (14), (15) and (16), corresponding relations between $\log F$ and $\log Re$ have been obtained.



$\log F'$ plotted against $\log Re'$.

- laminar and ○ turbulent (reference Figure 19); × turbulent (reference Figure 21);
- ▼ laminar and ▽ turbulent (reference Figure 22).

Reference Figures 19 and 22 [4] are concerned with laminar and turbulent boundary layers, which are subjected to an incident shock generated by a wedge having the semi-aperture angles equal to 4.5° and 3°, placed in free stream of Mach numbers $M_1 = 1.44$ and 1.4, the Reynolds number (based on the distance from the leading edge) of the flow being 0.9×10^6 in both the cases and the distance d of the wedge from the plate being 2.5 and 2 cm, respectively, $l = 6$ cm in both the cases.

Reference Figure 21 [4] is adopted from the measurements of FAGE and SARGENT. Here a shock generated from a concave corner is incident on a turbu-

lent boundary layer on a flat plate, the Mach number of the free stream being $M_1 = 1.47$ and Reynolds number of the flow 6×10^6 , $l = 3$ cm.

The graphs are straight lines and their inclinations do not remain constant throughout but change which is obvious because of the changing character of the boundary layer. Boundary layers, which are either laminar or turbulent initially, may be turbulent after disturbance; there may be separation of the flow from the boundary either completely or a separated bubble followed by the reattachment of the flow to the boundary.

In the laminar case (reference Figure 22), ' m ' of the straight line is at first $1/5$ and then it gradually changes to zero value. The value of δ_e in the case $m = 1/5$, is found to

$$\delta_e = (x - x_0) \left[\frac{Re^{1/10}}{1.3 \cdot 13 \cdot 10^3} \right]. \quad (17)$$

According to the reference Figure 19, in the laminar case, ' m ' of the straight line is $-1/12$, and afterwards it changes in the same way as in the above case (reference Figure 22). With this value of $m = -1/12$ the formula for δ_e in this case becomes

$$\delta_e = (x - x_0) \left[\frac{Re^{-1/24}}{\sqrt{11.6} \times 10^2} \right]. \quad (18)$$

In the turbulent case, ' m ' of the straight lines changes in the same way, namely at first $m = 1/5$ and then it changes to $m = -1/5$, in all the three cases excepting the case of reference Figure 21, where $m = 1/8$.

The corresponding formulae for δ_e in the respective cases are given by

$$\text{and } \left. \begin{aligned} \delta_e &= (x - x_0) \left[\frac{Re^{1/16}}{\sqrt{1.145} \times 10^3} \right] \\ &= (x - x_0) \left[\frac{Re^{-1/10}}{\sqrt{24.4} \times 10^2} \right] \end{aligned} \right\} \text{(reference Figure 21),}$$

$$\text{and } \left. \begin{aligned} \delta_e &= (x - x_0) \left[\frac{Re^{1/10}}{\sqrt{1.06} \times 10^3} \right] \\ &= (x - x_0) \left[\frac{Re^{-1/10}}{\sqrt{15.42} \times 10^2} \right] \end{aligned} \right\} \text{(reference Figure 22),}$$

$$\text{and } \left. \begin{aligned} \delta_e &= (x - x_0) \left[\frac{Re^{1/10}}{\sqrt{74.2} \times 10^2} \right] \\ &= (x - x_0) \left[\frac{Re^{-1/10}}{\sqrt{14.74} \times 10^2} \right] \end{aligned} \right\} \text{(reference Figure 19).}$$

These different formulae for δ_c have been evaluated for corresponding values of x and x_0 in the respective cases (both laminar and turbulent). It has been found that the values of δ_c lie between the limits 0.01 mm to 0.04 mm, in all the cases. Further, when expressed in terms of the undisturbed boundary thickness, the ratio of this critical viscous sublayer to the total boundary-layer thickness is about 1/10 in the laminar case, and 1/100 in the turbulent case.

These results support Lighthill's conjecture that this critical viscous sublayer is very small and is well inside the so-called laminar sublayer in the turbulent case.

REFERENCES

- [1] DONALDSON, NACA TN 946 (1944).
- [2] ACKERET, FELDMANN and ROTT, Mitt. Inst. Aerodyn, Zurich, No. 10 (1946).
- [3] LIEPMANN, J. aeron. Sci. 13, 627 (1946).
- [4] LIEPMANN, ROSKO and DHAWAN, NACA Tech. Note 2344 (1951).
- [5] LIGHTHILL, Proc. Roy. Soc. [A] 217, 478 (1953).
- [6] ROY, Ing.-Archiv 24, 3. Heft, 171 (ARC unclassified 'A3' report 18829, FM 2479, EA 527, TP 498) (1956).
- [7] Low, NACA TN 2531 (1953).

Zusammenfassung

Wenn eine kompressible Grenzschicht (laminar oder turbulent) einer Störung unterworfen wird, sei es durch eigene Instabilität oder von aussen aufgeprägt, so macht sich der Einfluss dieser Störung sowohl stromaufwärts wie stromabwärts in der Strömungsgrenzschicht bemerkbar. Lighthill nimmt in seiner mathematischen Behandlung des Mechanismus der Fortpflanzung dieser Störung stromaufwärts und stromabwärts an, dass die laminare Unterschicht der Grenzschicht dünn genug ist, um Kompressibilitätseffekte darin vernachlässigen zu können.

In vorliegender Veröffentlichung wurde die Dicke dieser kritischen laminaren Unterschicht abgeschätzt, ausgehend von Ähnlichkeitsbetrachtungen und unter Verwendung vorhandener Messresultate. Es wurde festgestellt, dass das Verhältnis zwischen der kritischen, zähen Unterschicht zur totalen Grenzschichtdicke (ungestört) im laminaren Fall von der Grössenordnung 1:10 und im turbulenten Fall etwa 1:100 ist.

(Received: June 14, 1958.)

Resistance of a Circular Cylinder Due to a Pair of Vortices Moving Symmetrically

By Miss DURGA ROY, Calcutta, India¹⁾

Introduction

The resistance experienced by a circular cylinder placed in a uniform flow with a pair of symmetrical vortices is well known.

In actual problems, when a cylinder is introduced into a uniform flow, the vortices are generated symmetrically, and at great distance from the cylinder they move down, thus satisfying the phenomenon of the Kármán vortex street.

In this paper we propose to calculate the varying resistance as a symmetric pair of vortices move down. The motion is no longer steady and the consequent effects have been traced.

Description of the Present Work

Complex potential when there are two vortex filaments of vorticity $+\kappa$ and $-\kappa$ at z_0 and \bar{z}_0 and a cylinder of a radius c is introduced with its centre at origin into a uniform flow, u along $+ve$ x axis is found with the help of the circle theorem and is given by

$$W = \frac{i\kappa}{2\pi} \left[\log(z - z_0) - \log(z - \bar{z}_0) - \log\left(\frac{c^2}{z} - \bar{z}_0\right) + \log\left(\frac{c^2}{z} - z_0\right) \right] - u \left(z + \frac{c^2}{z} \right). \quad (1)$$

Denoting the velocity components of the vortex at $A(z_0)$ by u_0, v_0 , we try to obtain u_0, v_0 as the components of the velocity of the fluid at A .

From (1)

$$W = \frac{i\kappa}{2\pi} \log(z - z_0) + w_z,$$

where, ignoring a constant,

$$w_z = -\frac{i\kappa}{2\pi} \left[\log(z - \bar{z}_0) + \log\left(z - \frac{c^2}{\bar{z}_0}\right) - \log\left(z - \frac{c^2}{z_0}\right) \right] - u \left(z + \frac{c^2}{z} \right)$$

and the complex velocity of the vortex at A is the value $-dw_z/dz$ when $z = z_0$ and is given by

$$\left. \begin{aligned} \frac{dw_z}{dz} \Big|_{z=z_0} &= u_0 - i v_0 = \dot{z}_0 \\ &= -\frac{i\kappa}{2\pi} \left[-\frac{1}{z_0 - \bar{z}_0} + \frac{\bar{z}_0}{c^2 - z_0 \bar{z}_0} - \frac{z_0}{c^2 - z_0^2} \right] + u \left(1 - \frac{c^2}{z_0^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

¹⁾ Presidency College.

taking complex

$$\dot{z}_0 = \frac{i \kappa}{2 \pi} \left[\frac{1}{z_0 - z_0} + \frac{z_0}{c^2 - z_0 \bar{z}_0} - \frac{\dot{z}_0}{c^2 - z_0^2} \right] + u \left(1 - \frac{c^2}{z_0^2} \right).$$

The pressure is obtained from BERNOULLI's equation as

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} q^2 - \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \text{const}, \quad (3)$$

where $p = p_r$, q^2 is the square q of the velocity, and φ the velocity potential.

To evaluate the constant, we assume

$$p = \pi (\text{const}), \quad q = u \quad \text{and} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0.$$

Hence

$$p = \pi - \frac{1}{2} \rho u^2 - \frac{1}{2} \rho q^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (4)$$

where

$$q^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \right) \quad \text{and} \quad 2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial t}$$

with the help of (4). The total resistance is given by

$$X - i Y = \frac{1}{2} i \rho \int_r \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 dz - i \rho \int_r \frac{\partial \varphi}{\partial t} \left(\frac{\partial z}{\partial z} \right) dz \quad (\text{Blasius theorem}), \quad (5)$$

where X and Y are the components of total resistance in the direction of the axes and the integration is performed over the boundary r of the cylinder which is given by $z \bar{z} = c^2$, where c is the radius of the cylinder.

From (4) we get

$$X - i Y = (X_1 - i Y_1) + (X_2 - i Y_2), \quad (6)$$

where

$$\left. \begin{aligned} X_1 - i Y_1 &= \frac{1}{2} i \rho \int_r \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 dz \\ &= - \frac{\kappa^2 \rho c^2}{2 \pi} (z_0 + \bar{z}_0) \frac{(z_0 - \bar{z}_0)^2}{(z_0 \bar{z}_0 - c^2) (z_0^2 - c^2) (\bar{z}_0^2 - c^2)} \\ &\quad - i \kappa \rho u c^2 \frac{z_0^2 - \bar{z}_0^2}{z_0^2 \bar{z}_0^2} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

and

$$X_2 - i Y_2 = - i \rho \int_r \frac{\partial \varphi}{\partial t} \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial z} \right) dz = i \kappa \rho c^2 \left(\frac{\dot{z}_0}{z_0^2} - \frac{\dot{\bar{z}}_0}{\bar{z}_0^2} \right). \quad (8)$$

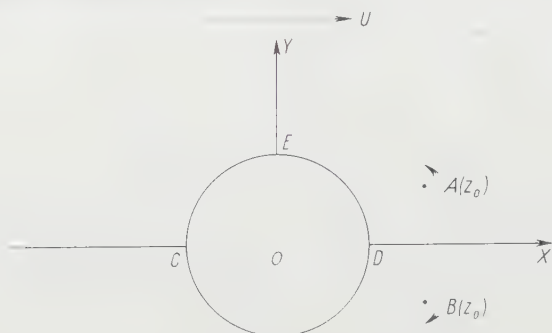
Substituting (7) and (8) in (6), we get

$$\begin{aligned} X - i Y &= - \frac{\kappa^2 \rho c^2}{2 \pi} (z_0 + \bar{z}_0) \frac{(z_0 - \bar{z}_0)^2}{(z_0 \bar{z}_0 - c^2) (z_0^2 - c^2) (\bar{z}_0^2 - c^2)} \\ &\quad - i \kappa \rho u c^2 \frac{z_0^2 - \bar{z}_0^2}{z_0^2 \bar{z}_0^2} - i \kappa \rho c^2 \left(\frac{\dot{z}_0}{z_0^2} - \frac{\dot{\bar{z}}_0}{\bar{z}_0^2} \right). \end{aligned}$$

Substituting for \dot{z}_0 and \ddot{z}_0 from (2) and simplifying, we finally get

$$X = -iY = \frac{\kappa^2 \rho c^2}{2\pi} (z_0 + \bar{z}_0) \left[\frac{(z_0 - \bar{z}_0)^2}{(z_0^2 - c^2)(\bar{z}_0^2 - c^2)} \left\{ 1 - \frac{c^4}{z_0^2 \bar{z}_0^2} \right\} + \frac{1}{z_0^2 \bar{z}_0^2} \right]. \quad (9)$$

As this expression is real, $Y = 0$.



Picture of the cross section of the circular cylinder and the position of the vortex filaments on the (x, y) plane. U uniform stream along x axis; CDE cross section of the circular cylinder on the (x, y) plane; A, B position of the vortex filaments on the (x, y) plane; O origin.

Let $z_0 = R e^{i\varphi}$ then from (9) in polar forms

$$X = -\frac{\kappa^2 \rho c^2}{\pi R} \cos \varphi \left[\frac{1}{R^2} - \frac{4 \sin^2 \varphi (R^2 + c^2)}{R^4 + c^4 - 2c^2 R^2 \cos 2\varphi} \right]. \quad (10)$$

Remarks

$Y = 0$, i. e., the total force exerted on the cylinder is in the x direction. When the vortices are at a great distance from the origin,

i. e., $R \gg 1$ then $X = 0$.

When they lie on the boundary of the cylinder i. e., $R = c$, then

$$X = \frac{2\kappa^2 \rho \cos \varphi}{\pi c}.$$

If the positions of the vortices are known at any time, the total resistance X that will be experienced by the circular cylinder can be found out with the help of (9) or (10).

Acknowledgement

My thanks are due to Dr. N. L. GHOSE for helpful guidance in my work.

REFERENCES

- H. LAMB, *Hydrodynamics* (Cambridge University Press 1932).
 L. M. MILNE-THOMPSON, *Theoretical Hydrodynamics* (Mac Millan, New York 1955).

Zusammenfassung

Es wird versucht, den veränderlichen Widerstand, welchen ein unter Bildung zweier Wirbel in eine gleichförmige Strömung gelegter, runder Zylinder erfährt, einer Berechnung zu unterziehen.

(Received: June 14, 1958.)

**Comments on H. Bergh and B. van den Berg's paper:
'On the Visualization of Laminar Boundary Layer Oscillations
and the Transition to Turbulent Flow'¹⁾**

By WILMOT H. WEBB, Princeton, N. J., USA²⁾

The authors have succeeded in obtaining unusually clear photographs of an elusive subject, a boundary layer in transition. A careful examination of their published photographs reveals the remarkable similarity between the transition vortex structure for an airfoil as observed by the authors and that for pipe flow as observed earlier by the undersigned³⁾. The authors may also wish to compare with the work of HAMA⁴⁾ in which the loop vortex structure was observed to form from a line vortex shed by a semi-circular rod spanning the breadth of a flat plate at its surface, and located near the leading edge. In the work in pipes, it was found that the loop structure was the inevitable link between disturbance and transition no matter how the disturbance was introduced, providing only that the disturbance did, in fact, produce transition. It is interesting to note that the authors have observed a similar transition process by impinging sound waves on an incipiently unstable boundary layer. The loop vortices appear, with the airfoil at zero incidence, in Figures 4*e* and 5*a*. For the case of an angle of attack, with a thicker boundary layer, the loop vortices become more extended and thus are more easily seen. They are observed to occur in all of the angle of incidence pictures as the authors have noted.

The possibility of carrying out hot-wire studies concurrently with the visualization studies may enable the authors to correlate transition traces such as those obtained by SCHUBAUER and KLEBANOFF⁵⁾ with their own observed flow patterns and thereby provide a much needed comparison between the results of these two means of transition exploration.

(Received: August 11, 1958.)

¹⁾ H. BERGH and B. VAN DEN BERG, *Z. angew. Math. Phys.* 9*b* (Festschrift Ackeret), 97 (1958).

²⁾ Princeton University, Department of Aeronautical Engineering.

³⁾ W. H. WEBB and R. P. HARRINGTON, *Vortex Structures in Pipe Flow*, *J. aeron. Sci.* 23, No. 8, 792 (1956).

⁴⁾ F. R. HAMA *et al.*, *On Transition from Laminar to Turbulent Flow*, *J. appl. Phys.* 24, 236 (1957).

⁵⁾ G. B. SCHUBAUER and P. S. KLEBANOFF, *Contributions on the Mechanics of Boundary Layer Transition*, NACA TN 3489 (Sept. 1955).

Herbsttagung der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft vom 13. bis 14. September 1958 in Glarus

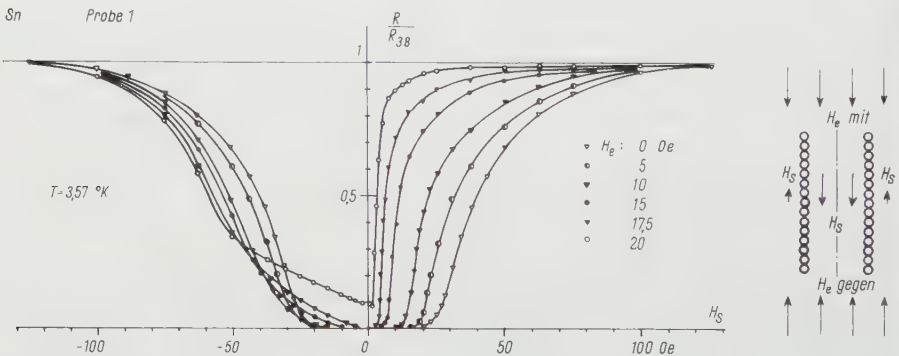
Berichte über die Sitzungen für angewandte Physik und Mathematik

Statische und dynamische Eigenschaften supraleitender Zinnspulen.

Von F. VON BALLMOOS, Zürich¹⁾.

Anlass zu den folgenden Untersuchungen gab die Tatsache, dass Elemente der Schaltungstechnik, wie Verstärker²⁾, Gleichrichter, Schalter³⁾ usw., bei Heliumtemperatur aus supraleitenden Spulen aufgebaut werden.

Es wurde bereits an anderer Stelle⁴⁾ darauf hingewiesen, dass diese Elemente gegenüber der konventionellen Röhren- und Transistortechnik Vorteile bieten. Eine genauere Untersuchung von supraleitenden Spulen schien daher gerechtfertigt.



Figur 1

R/R_{38} in Funktion von H_s mit H_e als Parameter.

Figur 1 zeigt die Widerstandsübergangskurven für eine Zinnspule der folgenden Abmessungen: Spulenlänge 25 mm, Spulendurchmesser 10 mm, Drahtdurchmesser 0,5 mm. Wenn kein äusseres Magnetfeld H_e angelegt ist, beginnt der Zwischenzustand, wenn das Spulenfeld H_s den Wert des kritischen Feldes H_c für Zinn bei dieser Temperatur erreicht hat. Damit ist erstmals ein elektrischer Widerstand messbar. Durch Anlegen eines äusseren Feldes lässt sich das Feld im Spuleninnern

¹⁾ Institut für kalorische Apparate und Kältetechnik der ETH.

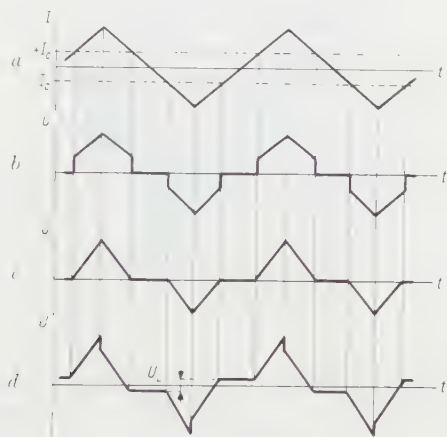
²⁾ J. L. OLSEN, *Ein supraleitender Gleichrichter und Verstärker*, Z. angew. Math. Phys. 9a, 293 (1958).

³⁾ D. A. BUCK, *The Cryotron – A Superconductive Computer Component*, Proc. I. R. E. 44, 482 (1956).

⁴⁾ P. GRASSMANN, *Was bedeutet die Tieftemperatur-Physik für die Technik?*, Schweiz. Bauztg. 71, Heft 20, 285 (1953).

verstärken oder schwächen. Im ersten Falle wird der Einsatzzpunkt des Zwischenzustandes um den Betrag des äusseren Feldes zu kleineren Spulenfeldern verschoben.

Ist das äussere Feld dem Spulenfeld entgegengeschaltet, dann wird das Feld im Spuleninnern geschwächt, auf der Aussenseite jedoch verstärkt. Das kritische Feld wird daher zuerst auf der Aussenseite der Spule erreicht. Dies erklärt den Verlauf der Übergangskurven bei Feldschwächung.



Figur 2

a Stromverlauf. Der Strom I_c verursacht das kritische Spulenfeld H_c . U ist die Spannung über der Spule, wenn der Übergang supraleitend-normalleitend *b* sprungartig, *c* gemäss den statischen Übergangskurven erfolgt. Im Oszillogramm *d* ist die Induktivität der Spule berücksichtigt:

$$U_L = L \frac{dI}{dt}.$$

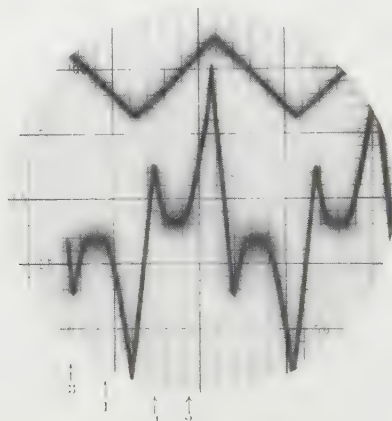
Das Wechselstromverhalten der Spulen wurde mit Hilfe von sägezahnförmigen Strömen untersucht. Figur 2 zeigt die zu erwartenden Oszillogramme. Die Induktivität ist für viele Anwendungen störend. Daher wird das Spuleninnere mit einem Supraleiter ausgefüllt, der infolge des Meissner Effektes alle magnetischen Feldlinien ausstösst und so die Induktivität der Spule sehr stark verkleinert (die Permeabilität des Spuleninnern ist dann Null).

Figur 3 stellt ein aufgenommenes Oszillogramm dar. Der Spannungsverlauf weicht gegenüber dem vorausgesagten ab, indem bei den Übergängen Normalleitung-Supraleitung und umgekehrt zusätzliche Spannungsimpulse auftreten. Diese sind darauf zurückzuführen, dass bei Zerstörung der Supraleitung die Feldlinien in die Spulendrähte eindringen. Die dadurch entstandene Flussänderung induziert eine Spannung in den Windungen (an den Stellen 1 und 2 der Figur 3). Beim umgekehrten Vorgang werden die Feldlinien wieder aus den Drähten ausgestossen, wobei wieder eine Spannung induziert wird (an den Stellen 3 und 4). Die Höhe dieser Störimpulse ist der Frequenz proportional. Sie nimmt zu mit dem Durchmesser der Spulendrähte. Dadurch ist die grösste zu verarbeitende Frequenz gegeben.

Bei einem Drahtdurchmesser von 0,1 mm liegt die Grenzfrequenz bei etwa 1000 Hz. Durch Aufdampfen wendelförmiger, dünner Schichten lässt sich diese Grenze wesentlich nach oben schieben.

Herrn Prof. Dr. P. GRASSMANN danke ich für seine wertvolle Unterstützung bei der Ausführung dieser Arbeit.

Diese Untersuchungen wurden durch den Arbeitsbeschaffungsfonds des Bundes finanziell unterstützt.



Figur 3

Beobachtete Strom- und Spannungsszillogramme, Frequenz 200 Hz, Stromamplitude 1,5 A (das entspricht einem H_s von 37,6 Oe); $H_e = 0$; Amplitude der Störimpulse 2,15 mV; U_L beträgt 0,8 mV.

Aufnahme der Hystereseschleife von dünnen magnetischen Schichten.

Von K. E. DRANGEID, Zürich⁵⁾.

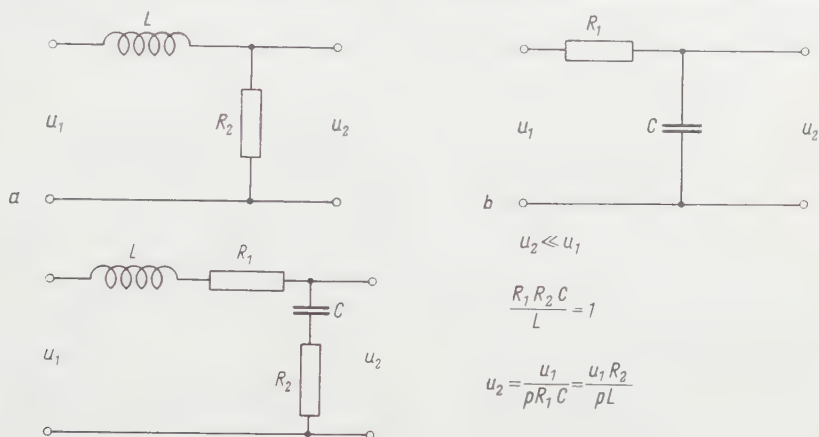
Einleitung

Bei der Herstellung von dünnen magnetischen Schichten sind Instrumente für die Messung der magnetischen Eigenschaften erforderlich, wobei in erster Linie die Hystereseschleife von Interesse ist. Es handelt sich um Schichten in der Dicke von 100 Å und mehr. Die magnetische Induktion ist in der Grössenordnung von 10^4 G. Für kleine Schichtstückchen haben wir daher sehr kleine Flüsse, die gemessen werden müssen. Ein grosses Schichtstück würde die Erzeugung eines ausgedehnten homogenen magnetischen Erregerfeldes verlangen, was ebenfalls Schwierigkeiten bereiten würde. Man könnte natürlich eine Meßspule mit vielen Windungen verwenden, um das Signal zu vergrössern. Die Spule würde jedoch bald zu gross sein, und es wäre zum Beispiel nicht möglich, während des Aufdampfens zu messen. Die Messung während des Aufdampfens bedeutet, dass die Anordnung im Hochvakuumbehälter untergebracht werden muss, wo nebst der Verdampferquelle noch zahlreiche andere Vorrichtungen Platz finden müssen. Wünschenswert wäre eine Meßspule mit einer einzigen Windung. Die gewöhnlichen Messanordnungen (ballistische Galvanometer, Flussmeter) sind nicht empfindlich genug. Um eine Spannungsverstärkung zu erreichen, gibt es zwei Möglichkeiten: Verstärkung der Signalspannung mittels eines Röhren- oder Transistorenverstärkers, oder Erhöhung der Spannung mittels eines Transformators. Die letztere Methode ist die von uns angewendete und hier beschriebene.

⁵⁾ International Business Machines Corporation, Forschungslaboratorium.

Das Integriernetzwerk

Verschiedene Gründe haben die Wahl eines Transformators als Spannungsverstärker bestimmt. Die Störeinflüsse können mit einfachen Mitteln auf ein Minimum beschränkt werden, und die Verwendung eines passiven Elementes bürgt für grosse Stabilität. Durch das Vermeiden von Verstärkerröhren bleibt man vor Rauschen und vor Schwankungen in Verstärkung und Speisespannung verschont.



Figur 1

Das Prinzip des Integriernetzwerkes.

Ich möchte jetzt das Prinzip der Integration erklären. Die Schaltungen *a* und *b* in Figur 1 sind einfache Integrationsglieder. Die Bedingung für gute Integration ist

$$U_2 \ll U_1.$$

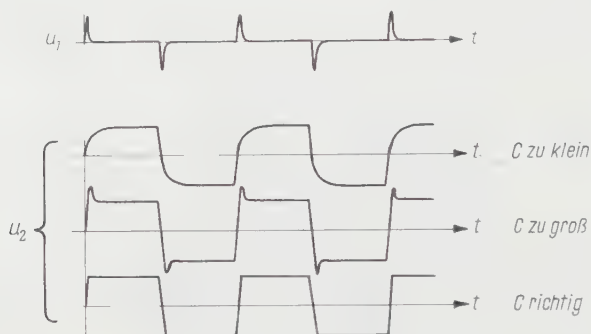
Man kann aber zwei Integrationsglieder kombinieren, und jetzt ist die Bedingung für die richtige Integration

$$\frac{R_1 R_2 C}{L} = 1, \quad U_2 \ll U_1.$$

Die Ausgangsspannung ist in der letzten Gleichung ausgedrückt, und man sieht, dass die Integration so wirkt, als ob nur ein Integrierglied vorhanden wäre; entweder L und R_2 oder R_1 und C . Wird aber U_2 in der Berechnung berücksichtigt, zeigt sich die Kombinationsschaltung günstiger. Für dasselbe Ausgangssignal ist der Fehler bei der Integration viel kleiner, wenn die Kombinationsschaltung benutzt wird. Wenn wir einen Transformator benutzen, um die Signalspannung zu erhöhen, und diesen mit einer Induktivität, 2 Widerständen und einer Kapazität belasten, wird das Netzwerk, unter Vernachlässigung der Hauptinduktivität, durch das Schema von Figur 1 beschrieben. Streuinduktivität und Wicklungswiderstand sind in L und R_1 inbegriffen. Durch diese Art von Integration muss man keine grossen Anforderungen an den Transformator stellen. Das Integrierglied ist in der folgenden Art sehr leicht abzustimmen (Figur 2).

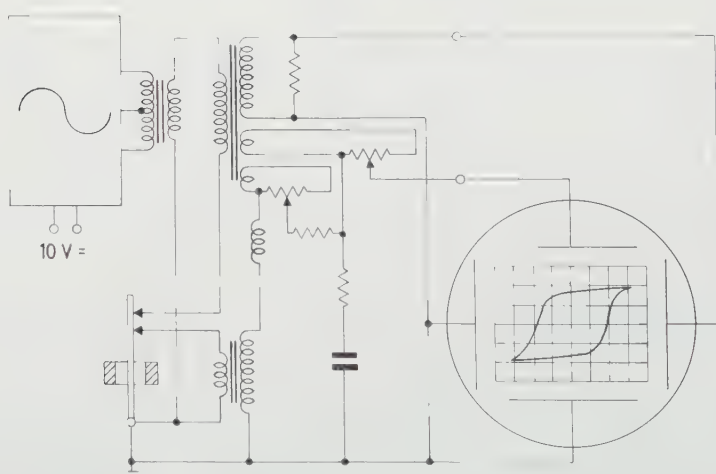
An die Eingangsklemmen werden kurze positive und negative Impulse angelegt. Man sieht auf dem Bild, welche Wirkung C auf die Ausgangsspannung hat. Mit dem richtigen Wert von C ist das Ausgangssignal eine Rechtecksspannung.

Diese Methode haben wir schon in einem Messgerät verwendet, das die Hystereseschleife von gewöhnlichen Magnetkernen aufnimmt.



Figur 2

Die Ausgangsspannung für verschiedene Werte von C .



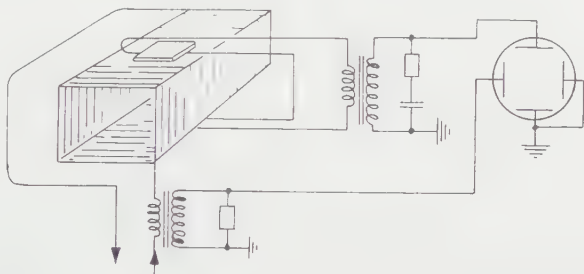
Figur 3

Anordnung zur Aufnahme der Hystereseschleife von Magnetkernen.

Als Leiter für den Magnetisierungsstrom dient die Nadel (Figur 3), auf die der Magnetkern aufgesteckt wurde. Die induzierte Spannung wird derselben Nadel entnommen und dem Integriernetzwerk zugeführt. Die Frequenz des Wechselstroms ist 16,5 kHz, und die Ablenkspannung für den KO liefert ein Stromwandler im Treiberkreis. In diesem Gerät wird ein gewöhnlicher Topfkern als Transformator verwendet. Es werden zwei zusätzliche Wicklungen auf dem Stromwandler angebracht, die eine, um Spannungen zu kompensieren, die von den ohmschen Verlusten in der Treiberleitung herrühren, und die andere, um Spannungen zu kompensieren, die in der Verdrahtung induziert werden.

Die Amplitude der Kompensationsspannungen kann mittels Potentiometer variiert werden. Die von den ohmschen Verlusten in der Stromleitung herrührende Spannung ist in Phase mit dem Strom. Man muss also die Korrekturspannung *vor* der Integration abziehen. Die in der Verdrahtung induzierte Spannung ist gegenüber dem Strom um 90° verschoben. Man muss also diese Spannung *nach* der Integration subtrahieren. Wenn kein Kern eingesteckt ist, muss das Bild auf dem KO ein horizontaler Strich sein.

Bei der Aufnahme der Hystereseschleife von dünnen magnetischen Schichten kommt eine ähnliche Anordnung zur Verwendung (Figur 4).

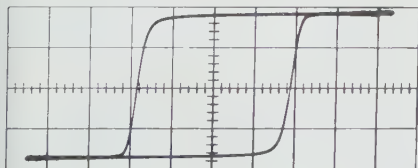


Figur 4

Anordnung zur Aufnahme der Hystereseschleife von dünnen magnetischen Schichten.

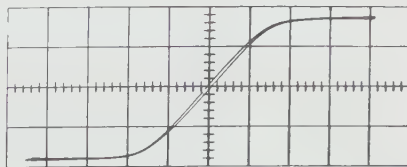
Die Schicht liegt auf einer Erregerspule. Nur das äussere Feld wird benützt, und die Abmessungen der Spule wurden der Grösse des Messobjektes angepasst. Das Feld ist über der ganzen Schicht homogen. Die Meßspule umfasst das Messobjekt, und eine Kompensationsschleife ist unter der Erregerspule angebracht. Bei richtiger Kompensation darf ohne Schicht keine Spannung induziert werden. Die Korrektur kann auch durch die gleichen Massnahmen, wie eben gezeigt wurde (Figur 3), erfolgen. In diesem Gerät sind ausser der Kapazität und einem Widerstand (Figur 4) die Streuinduktivität und der Wicklungswiderstand massgebend für die Integration. Der Grund hiefür ist, dass zur Erzielung eines möglichst grossen Übersetzungsverhältnisses sehr dünner Draht verwendet werden muss. Der Wicklungswiderstand genügt dann für die Integration. Die Benützung des äusseren Feldes der Erregerspule ermöglicht das Messen während des Aufdampfens.

Die Figuren 5 und 6 zeigen die Hystereseschleife einer Schicht von 1000 \AA Dicke, 1 cm Breite und 6000 G Sättigungsinduktion. Figur 5 zeigt eine Aufnahme, wenn die Schicht in der magnetischen Vorzugsrichtung (easy direction) magnetisiert wird. Die Meßspule hat hier 4 Windungen. Wie man sieht, ist das Bild sehr scharf



Figur 5

Magnetisierungskurve einer Schicht, die in der Vorzugsrichtung magnetisiert wird.



Figur 6

Magnetisierungskurve einer Schicht, die quer zur Vorzugsrichtung magnetisiert wird.

und weist keine Störspannungen oder Schwingungen auf. Hier hat das Integrierglied eine Zeitkonstante von angenähert der 5fachen Periodendauer.

Figur 6 zeigt eine Schicht, die quer zur Vorzugsrichtung (hard direction) magnetisiert wird. Der Ausgang des Integriergliedes ist ohne Zwischenverstärker direkt an den Eingangsverstärker des KO's angeschlossen. Die Empfindlichkeit der KO's ist 5 mV/cm. 1 cm entspricht also $3,5 \cdot 10^{-10}$ Vs oder $3,5 \cdot 10^{-2}$ Mx. Wenn man sehr dünne Schichten messen will, besteht natürlich die Möglichkeit, grössere Signalspannung durch das Anschliessen eines gegengekoppelten Verstärkers zu gewinnen.

Störeffekte im Transformator (Barkhausen-Sprünge, Nichtlinearitäten usw.) legen eine obere Grenze der Empfindlichkeit des Gerätes fest, die wir noch nicht untersucht haben.

Kritik der Schaltung

Zum Schluss soll auf einige Schwierigkeiten hingewiesen werden. Da man für sehr dünne Schichten das Übersetzungsverhältnis so hoch wählen muss, dass für die Integration zum wesentlichen Teil die Streuinduktivität und der Wicklungswiderstand massgebend sind, muss auf die Kleinhaltung der Wicklungskapazität geachtet werden, da sonst störende Einschwingvorgänge auftreten.

Ein wichtiger Punkt ist, dass der Erregerstrom möglichst sinusförmig sein sollte. Die harmonischen Schwingungen werden sonst mit dem Ausgangssignal überlagert, und da das Ausgangssignal sehr klein ist, machen sie sich sehr stark bemerkbar und sind fast nicht wegzubringen.

Obere Grenze der Methode

Ein Nachteil dieser Methode ist, dass man keine Leistungsverstärkung zur Verfügung hat. Die gebrauchte Leistung muss dem magnetischen Feld entnommen werden. Da der Eingang des KO's eine gewisse Eingangsimpedanz hat und da die Schicht sehr schnell schaltet, muss man aufpassen, dass die Anstiegszeit nicht zu lang wird. Durch diese Forderung ist die Ausgangsimpedanz der Schaltung dann gegeben. Der Strom in der Meßspule muss auch unterhalb eines gewissen Wertes gehalten werden, weil sonst das Magnetfeld zu stark beeinflusst wird. Diese Einschränkungen setzen das maximale Übersetzungsverhältnis fest.

Bemerkung: Es soll noch bemerkt werden, dass bei der Wahl vom Kernmaterial für den Integrationstransformator die Grösse der Anfangspermeabilität von grosser Bedeutung ist. Da die Signale äusserst schwach sind, rufen sie Magnetisierungsfelder von weniger als 50 mOe hervor, und bei vielen Materialien bleibt die relative Permeabilität in der Grössenordnung von 1. In diesem Falle kann der Transformator ebensogut durch einen Lufttransformator ersetzt werden.

Sur une équation classique de la dynamique des réacteurs atomiques.

Par J. PATRY, Zürich⁶⁾.

Introduction

La formule de NORDHEIM permet de déterminer la période T d'un réacteur quand la réactivité ρ reste constante. Une équation très générale de la dynamique des réacteurs, établie par P. SCHMID⁷⁾, permet de la généraliser pour tenir compte

⁶⁾ Réacteur SA.

⁷⁾ P. SCHMID, RAG-Bericht Nr. 5.

de façon approchée de la variation de réactivité. On en déduit quelques phénomènes peu connus, qui ont été constatés lors d'une étude numérique pour le *Diorit*⁸⁾.

La formule de Nordheim généralisée

P. SCHMID⁷⁾ a établi l'équation suivante, qui permet de déterminer la variation de puissance $p(t)$ en fonction de la variation $\varrho(t)$ de la réactivité.

$$\frac{p(t)}{p_0} = 1 + \int_0^t G(t-t') \left[(\varrho(t') - \sigma) \frac{p(t')}{p_0} - (\varrho(0) - \sigma) \right] dt'. \quad (1)$$

La fonction de GREEN $G(t-t')$ est définie à partir de sa transformée de LAPLACE:

$$G(s) = \frac{1}{\tau - \sigma + \sum_{i=1}^8 \frac{\beta_i}{\beta} \cdot \frac{s}{s + \lambda_i}} = \sum_{i=0}^8 \frac{a_i}{s + \gamma_i}, \quad G(t) = \sum_{i=0}^8 a_i e^{-\gamma_i t}. \quad (2)$$

Les données numériques sur les neutrons retardés et sur la «durée de vie moyenne» des neutrons sont représentés selon l'usage par β_i , β , λ_i et τ ; σ est un paramètre arbitraire que l'on peut supposer égal à -2 , mais qui ne joue pas de rôle essentiel dans cette étude. Son influence fondamentale est que tous les γ_i sont plus grands que zéro si σ est négatif.

La formule de NORDHEIM s'obtient en substituant $(t-t')$ par t'' et en dérivant par rapport au temps. On introduit ensuite la forme exponentielle pour la puissance:

$$\frac{p(t)}{p_0} = P e^{t'/T}. \quad (3)$$

Après une intégration, il s'en déduit la relation

$$T \varrho' + \varrho - \sigma = \frac{1}{\sum_{i=0}^8 \frac{a_i}{\gamma_i + 1/T}} = \frac{\tau}{T} - \sigma + \sum_{i=1}^8 \frac{\beta_i}{\beta} \cdot \frac{1}{1 + \lambda_i T}. \quad (4)$$

à cause de la relation (2) entre les β_i , β et λ_i d'une part, les a_i et γ_i d'autre part. La formule de NORDHEIM généralisé s'écrit donc

$$\varrho = \sum_{i=1}^8 \frac{\beta_i}{\beta} \cdot \frac{1}{1 + \lambda_i T} + \frac{\tau}{T} - \varrho' T. \quad (5)$$

Il faut cependant remarquer, qu'elle n'est valable que si T n'est pas trop petit algébriquement et si le terme $\varrho' T$ est petit par rapport aux autres. Dans les cas contraires, elle ne donne qu'une valeur approchée de la période.

Brève étude de la nouvelle formule

L'équation (5) peut s'écrire

$$\varrho = B(T) + \frac{\tau}{T} - \varrho' T. \quad (6)$$

⁸⁾ J. PATRY, RAG-Bericht Nr. 8.

La fonction $B(T)$ représente l'influence des neutrons retardés et peut être considérée comme une courbe très générale. La figure permet de déterminer ϱ ou T en fonction des autres paramètres. La valeur de ϱ est la distance entre l'une des courbes supérieures représentant

$$\varrho_1 = B(T) + \frac{\tau}{T} \quad (\text{courbes continues})$$

et l'une des courbes inférieures représentant

$$\varrho_2 = \varrho' T \quad (\text{droites pointillées}).$$

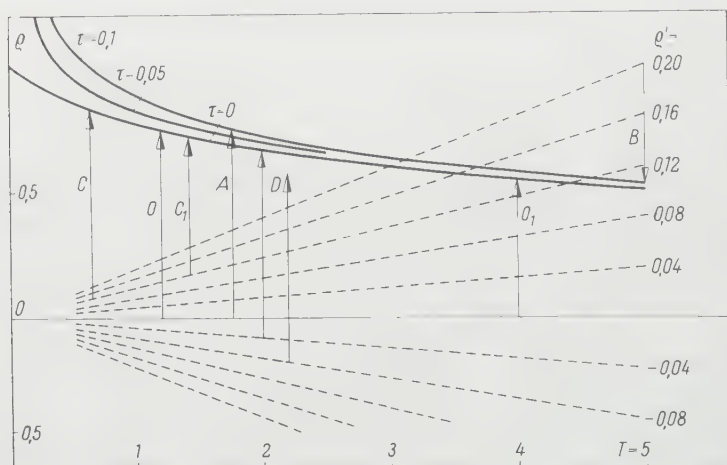


Diagramme pour la détermination de la période.

Il est facile de déduire de cette figure les conclusions suivantes :

- L'influence de τ (augmentation parallèle de τ et de T), très visible sur cette figure, est connue, car elle est déjà indiquée par la formule classique (voir vecteurs O et A).
- Si ϱ' est positif, il est toujours possible d'obtenir une période positive, même avec une réactivité négative (vecteur B). Il est connu que la puissance d'un réacteur augmente dès que les barres de contrôle se déplacent vers l'extérieur, même si la réactivité est négative.
- Si ϱ' est positif, la période sera raccourcie. Cet effet est d'autant plus intense que la période est plus longue (voir vecteurs O et C , O_1 et C_1).
- Si ϱ' devient de plus en plus négatif, les valeurs de T données par la figure augmentent, puis deviennent imaginaires. Les conditions de validité de l'équation ne sont plus remplies, car T devient en réalité négatif. La puissance diminue malgré que la réactivité reste positive (voir vecteurs O et D).

Les effets c) et d) ont été observés par l'auteur lors d'une étude numérique sur le comportement du *Diorit* dans un cas spécial (la réactivité externe augmente linéairement avec le temps, l'influence thermique empêchant un accident)⁸⁾.

Note bibliographique

A la fin de mon article *Contribution à la méthode des équations aux différences* [Z. angew. Math. Phys. 9a, 179 (1958)], j'ai discuté brièvement le fréquence fondamentale λ_1 d'une plaque encastrée de côté 1; il faut ajouter que S. TOMOTIKA [Phil. Mag. (7^e série) 21, 745 (1936)] avait déjà, en appliquant la théorie de A. WEINSTEIN [Mém. Sci. math., 88 (1937)], obtenu en collaboration avec celui-ci les évaluations excellentes

$$1295 \leq \lambda_1 < 1302.$$

JOSEPH HERSCH

International Symposium on Stress-Wave Propagation in Materials June 30–July 3, 1959, at the Pennsylvania State University

An International Symposium on Stress-Wave Propagation in Materials is to be held at the Pennsylvania State University on June 30, July 1, 2, and part of July 3, 1959, to be sponsored by the Office of Ordnance Research, US Army. Specialists abroad from England, Germany, Israel, India and USSR have been invited, in addition to specialists in the US, embracing the fields of high speed photography of stress waves, pulse-propagation experiments, scabbing in plates, theoretical methods, viscoelastic materials, and related subjects. Joint sessions and events will be planned with the eastern section of the American Seismological Society, which is meeting at Penn State at the same time. Further information can be obtained from NORMAN DAVIDS, Professor of Engineering Mechanics, The Pennsylvania State University, University Park, Pennsylvania, who is in charge of the program.

N. DAVIDS

Symposium on Millimeter Waves, March 31 and April 1, 2, 1959 in New York City

Millimeter waves will be the subject of the 9th international symposium of the Polytechnic Institute of Brooklyn, Microwave Research Institute, to be held in New York City on March 31, April 1, 2, 1959, under the co-sponsorship of the Air Force Office of Scientific Research, US Army Signal Research and Development Laboratory, Office of Naval Research, and the Institute of Radio Engineers.

The symposium is intended to highlight the present state of research in, and applications of, millimeter-wave technology. Accordingly, the program will be devoted to invited and contributed papers treating the generation, transmission, control, measurement, and detection of millimeter-wave energy. In addition, source material and significant advances in basic supporting fields will be summarized in review papers chosen from appropriate fields in physics and engineering.

All correspondence should be addressed to: Professor HERBERT J. CARLIN, Microwave Research Institute, 55 Johnson Street, Brooklyn 1, New York.

Tenth International Congress of Applied Mechanics 1960 at Stresa

The *Tenth International Congress of Applied Mechanics* will be held in the Congress Building at Stresa (Italy) from *Wednesday, 31 August, through Wednesday, 7 September 1960.*

Apart from a number of invited general lectures, the technical sessions of the congress will be held in two sections, viz.:

Section 1: *Fluid Dynamics* (hydrodynamics and aerodynamics).

Section 2: *Mechanics of Solids* (rigid body dynamics, vibrations, elasticity, plasticity and theory of structures).

It should be noted that thermodynamics and computational methods as such are not included, although specific applications of computational methods to pertinent problems of one of the two sections mentioned above are acceptable subjects for papers to be read at the Tenth Congress.

Previous congresses have demonstrated the desirability of an adequate period of time for the presentation and discussion of individual papers. In order to allow a period of 45 minutes for each paper (30 minutes for presentation and 15 minutes for discussion) a Program Committee will make a selection from papers submitted for presentation. Abstracts of papers should be submitted *in four copies to the Secretary of the International Committee* (Prof. Mekelweg 2, Delft, Netherlands) *before 1 January 1960*. Preferably they should not exceed two type-written pages (doubly-spaced) and in no case should they exceed four pages. In order to facilitate the work of the Program Committee it is recommended that abstracts be in *two* of the official congress languages (English, French, German and Italian). Authors are urged to make their abstracts as clear as possible, since selection of papers has to be based upon them. *Decisions of the Program Committee are final*, and it will be understood that it is impossible to enter into correspondence about them with authors of papers. They will be informed promptly of the decision on each paper.

Day-to-day organization of the congress is effected by the Italian Organizing Committee (President: Prof. G. COLONNETTI; Secretary: Dr. F. ROLLA, *Consiglio Nazionale delle Ricerche, Ufficio relazioni internazionali, Piazza delle Scienze 7, Roma*). *All correspondence* (apart from submission of papers) *should be addressed to the Italian Organizing Committee*. Information on accommodation, also registration forms, will be obtainable from Dr. ROLLA on and after 1 September 1959.

The Executive Committee of the International Committee for the Congresses of Applied Mechanics: C. B. BIEZENO, President; RICHARD V. SOUTHWELL; W. T. KOITER, Secretary (Prof. Mekelweg 2, Delft).

Internationale Konferenz für numerische Informationsverarbeitung, 15.-20. Juni 1959 in Paris

Die UNESCO führt vom 15. bis 20. Juni 1959 eine Tagung in Paris durch über das Thema der numerischen Informationsverarbeitung. Es sollen speziell folgende Gegenstände behandelt werden:

1. Mathematische Methoden der numerischen Analysis.
2. Logische Struktur der Rechenautomaten.
3. Formelsprachen für die Rechenautomaten.
4. Automatische Übersetzung von Sprachen.
5. Allgemeine Probleme der Speicherung und Verarbeitung von Informationen.
6. Allgemeine Struktur von Geräten für die Automation.

Während der Tagung kann eine Ausstellung von Geräten besichtigt werden.
E. STIEFEL

Errata

Einordnung der Gleichungen der inkompressiblen, reibenden und schweren Flüssigkeit. Von P. GRASSMANN (ZAMP 9b, Fasc.5/6, 307 [1958]).

Auf Seite 310, rechte Spalte, 5. Zeile von oben, muss es heissen: «Bernoullische Gleichung: $Eu - 1 Fr - (1/2) (a_0^2 a^2 - 1)$. (Dabei ist a_0 diejenige Geschwindigkeit, die sich für die Höhe $h = 0$ und $\Delta p = 0$ ergibt).»

 Buchbesprechungen – Book Reviews – Notices bibliographiques

Kerbspannungslehre. Von H. NEUBER, 2. Auflage (Springer-Verlag, Berlin 1958). 226 S., 162 Abb.; DM 36.–.

Das Buch ist die umgearbeitete und erweiterte zweite Auflage der Neuberschen *Kerbspannungslehre* von 1937. Es enthält eine systematische theoretische Behandlung der elastischen Spannungskonzentrationen in gekerbten Stäben unter den vier Beanspruchungen. Das Problem ist nicht nur theoretisch interessant, sondern im Hinblick auf die Häufigkeit derartiger Konstruktionselemente für den Praktiker von grosser Bedeutung. Die Behandlung ist klar, die Gliederung übersichtlich und umfassend; die Mehrzahl der gegebenen Lösungen, die bis zu leicht verwertbaren Diagrammen ausgeführt sind, ist das Werk des Verfassers und seiner Mitarbeiter.

Es seien, ohne das Buch als Ganzes in Frage zu stellen, einige kritische Bemerkungen erlaubt: Die Erklärung (S. 164ff.) der bei Spitzkerben beobachteten theoretisch-experimentellen Diskrepanz aus der Struktur des Materials (und die Korrektur der theoretischen Ergebnisse durch Mittelbildung über Elemente mit unbekannten Dimensionen) scheint dem Referenten unbefriedigend, da ja schliesslich auch in Kristallen Abweichungen vom konstanten Spannungszustand und sogar Spannungspole möglich sind. Hier spielt doch wohl eher die Tatsache mit, dass auch Spitzkerben praktisch auf ihrem Grund etwas abgerundet sind, sowie die Plastifizierung des Materials. Gerade das plastische Verhalten wird aber nur gestreift (S. 208), und die Ergebnisse, die in dieser Hinsicht vor allem in den angelsächsischen Ländern erzielt worden sind, bleiben unerwähnt. Schliesslich dürfte die Weiterverfolgung des im Anhang (S. 223ff.) diskutierten nichtlinearen Elastizitätsgesetzes zu Schwierigkeiten führen, da dieser Ansatz das unterschiedliche Ansprechen der in Frage stehenden zähen Werkstoffe auf hydrostatische Spannungszustände einerseits und Spannungsdeviatoren andererseits nicht in Rechnung stellt.

H. ZIEGLER

Thermodynamics of One-Component Systems. Von W. N. LACEY und B. H. SAGE (Academic Press, New York 1957). 376 S., 91 Fig.; \$8.00.

Dieses aus langer Lehrerfahrung erwachsene Buch stellt sich die Aufgabe, dem mit der Thermodynamik schon einigermaßen vertrauten Ingenieur einen Weg zu ihrer praktischen Anwendung zu weisen. Dem stellen sich erfahrungsgemäss folgende Schwierigkeiten entgegen:

1. Der Übergang vom geschlossenen zum offenen Prozess.
2. Die Verwendung eines technischen Maßsystems.
3. Die Einbeziehung der Reibung.
4. Die rechnerische Erfassung des in Wirklichkeit immer sehr komplexen Vorgangs.

Dem ersten Ziel entsprechend gliedert sich das Buch in 2 Hauptteile. Im ersten sind die allgemeinen Prinzipien, die beiden Hauptsätze, Zustandsgleichungen, Mehrphasensysteme und noch kurz irreversible Prozesse und solche mit variabler Masse behandelt. Der zweite Teil ist den technisch so wichtigen stationären offenen Prozessen gewidmet. Darin wird, ausgehend von den Erhaltungssätzen, die Theorie der stationär durchströmten Bilanzgebiete entwickelt und die gewonnenen allgemeinen Beziehungen auf die Strömung durch Düsen, durch Turbinen und Kolbenmaschinen, auf die Kältetechnik und Gasverflüssigung angewendet.

In Erfüllung der zweiten Aufgabe kämpfen sich die Autoren wacker durch all jene Schwierigkeiten hindurch, die jeder auf sich lädt, der mit einem Maßsystem mit dem Gewicht als Grundgrösse rechnet: Die Studenten, die zu dem hier durchgehend verwendeten englisch-amerikanischen Maßsystem abgerichtet werden, sind nicht zu beneiden!

Der 3. und 4. Aufgabe dienen zahlreiche gut ausgewählte und ausführlich erläuterte Übungsbeispiele, aus deren Bearbeitung der Leser sicher grossen Nutzen ziehen wird.

Lobend hervorzuheben ist die genaue Festlegung des Gültigkeitsbereichs der Gleichungen. So bedeutet etwa ein in eckige Klammern hinter die Gleichung gesetztes P oder p , dass diese nur für $P = \text{const}$ bzw. nur für das ideale Gas (perfect gas) gilt. Ein Anhang bringt ein Zustandsdiagramm des Methans (auch im Text wird meist auf Kohlenwasserstoffe und nicht auf den sonst so beliebten Wasserdampf zurückgegriffen), eine übersichtliche Darstellung der Ableitungen der wichtigsten Formeln, einige Tabellen und nochmals einige Übungsaufgaben.

Das didaktisch geschickt abgefasste Buch kann dem Ingenieur – weniger dem Chemie-Ingenieur, denn es fehlt die Behandlung der Mehrkomponentensysteme – gerne empfohlen werden, besonders wenn er sich in amerikanische Betrachtungsweisen und Maßsysteme einarbeiten will.

P. GRASSMANN

Problèmes de plasticité théorique. Von W. PRAGER (Dunod, Paris 1958). 124 S., 54 Abb.; frs. 650.–.

Es handelt sich um die Übersetzung ins Französische des Werkes *Probleme der Plastizitätstheorie*, das hier [ZAMP 7, 471 (1956)] ausführlich gewürdigt worden ist. Gegenüber der deutschen Ausgabe sind nur einige Stellen etwas verdeutlicht und einige Literaturangaben beigelegt worden.

H. ZIEGLER

Torsionstheorie. Von C. WEBER und W. GÜNTHER (Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1958). 307 S., 160 Abb.; DM 38.–.

Das Buch behandelt die elastische Torsion prismatischer bzw. zylindrischer Stäbe. C. WEBER hat dieses relativ beschränkte, aber dankbare und in mehr als einer Hinsicht interessante Teilgebiet der Elastizitätstheorie seit vielen Jahren mächtig gefördert und darf heute wohl unbestritten als bester Kenner der Materie gelten. Es ist sehr zu begrüßen, dass er uns nun, von einem jüngeren Mitarbeiter unterstützt, die lang erwartete geschlossene Darstellung dieses Gebietes vorlegt. Das Buch ist klar und verständlich geschrieben und zeigt, dass das Problem nicht nur im Hinblick auf die vielen praktisch verwendeten Profile für den Ingenieur von Interesse, sondern auch methodisch anregend und damit auch für den Mathematiker sehr reizvoll ist.

Der Beitrag des Verlegers zu diesem Buch ist äusserst bescheiden.

H. ZIEGLER

Differential Equations Applied in Science and Engineering. Von HAROLD WAYLAND (D. Van Nostrand Co., Princeton, N. J., 1957). 353 S., 66 Abb.

Das vorliegende Buch von H. WAYLAND stellt für Studierende der Physik und der Ingenieurwissenschaften eine vorzügliche Einführung in das Gebiet der gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen dar. Der Inhalt gliedert sich in die folgenden Abschnitte: Vektorrechnung, gewöhnliche Differentialgleichungen, Lösung durch Potenzreihen, spezielle Funktionen (BESSEL, LEGENDRE), Lösung durch Orthogonalfunktionen, Randwertprobleme, Hinweis auf Integraltransformationen. Jedes Kapitel enthält eine knappe Zusammenfassung sowie Hinweise auf weiter ausholende Literatur; rund 330 Aufgaben dienen der Festigung und der Erweiterung des Stoffes.

Entsprechend dem Charakter eines einführenden Werkes stehen die linearen Probleme im Vordergrund, und im Falle der partiellen Differentialgleichungen sind es diejenigen, die sich durch einen Produktansatz lösen lassen. Der Verfasser legt grosses Gewicht auf die genaue Erfassung der physikalischen Probleme (die vorwiegend der klassischen mathematischen Physik und den Ingenieurwissenschaften entstammen) und ihre Übertragung in die Sprache der Mathematik. Anhangsweise folgt noch – um den Studierenden zu einem tieferen Eindringen anzuleiten – eine Auswahl von besondern physikalischen Problemen, die in ausführlicheren Werken oder in Fachzeitschriften behandelt sind.

Es handelt sich um ein wohldurchdachtes und gut verständlich geschriebenes Lehrbuch, das in ausgezeichneter Weise in die mathematische Behandlung physikalischer Probleme einführt.

E. ROTH-DESMEULES

Subtabulation. A Companion Booklet to Interpolation and Allied Tables. Prepared by H. M. Nautical Almanac Office. Published by order of The Lords Commissioners of the Admiralty (Her Majesty's Stationary Office, London 1958). 54 S.; 7s. 6d.

Dieses Büchlein ist eine Ergänzung zu den Interpolationstabellen, die früher von denselben Verfassern publiziert wurden (Z. angew. Math. Phys. 9, 96). Es enthält alle Hilfsmittel, um eine Funktion, die durch äquidistante Stützwerte gegeben ist, mit einem feineren Schritt zu tabellieren. Für den Einzelrechner kann die Methode der „precalculated second differences“ bestens empfohlen werden; die einfachen beigegebenen Hilfstabellen ermöglichen eine sehr bequeme Subtabulation. Die im zweiten Teil geschilderten Methoden der „bridging differences“ wurden ursprünglich von L. J. COMRIE entwickelt und eignen sich für die Verwendung von Buchungs- und Lochkartenmaschinen. Sie haben mit dem Aufkommen der elektronischen Automaten etwas an Bedeutung verloren, da auf einer programmgesteuerten Maschine ein Interpolationsprogramm auch für die Subtabulation eingesetzt werden wird.

E. STIEFEL

Höhere Technische Mechanik. Von ISTVÁN SZABÓ (Springer-Verlag, Berlin 1958). 498 S., 414 Abb.; DM 31 50.

Der Verfasser des vorliegenden Lehrbuches, das eine Fortsetzung seiner *Einführung in die Technische Mechanik* ist, gibt eine knappe Darstellung des grossen Stoffgebietes, in der auch ein Grossteil der mathematischen Hilfsmittel entwickelt wird.

Das erste Kapitel umfasst das Prinzip der virtuellen Arbeiten, das Prinzip von D'ALEMBERT, das Hamiltonsche Prinzip, die Lagrangeschen Gleichungen, einen kurzen Einblick in die Variationsrechnung, das Ritzsche Verfahren und Anwendungen

auf die Statik und Dynamik starrer und elastischer Körper. Im zweiten Kapitel wird der ebene und achsensymmetrische Spannungszustand, die Theorie der dünnen Platten, eine Einführung in die Schalentheorie und die Torsion von Stäben und Balken behandelt. Das dritte Kapitel bringt Plastizitätstheorie und das vierte die Dynamik der idealen Flüssigkeiten und Gase und Ausführungen über zähe Flüssigkeiten. An vielen Beispielen und 73 Aufgaben mit Lösungen wird die Anwendung der dargestellten Theorien gezeigt. Bei den meisten Problemen, die keine exakte Lösung zulassen, wird eine Näherungslösung angegeben oder der Weg zu einer solchen angedeutet. Ein Anhang mit 11 vermischten Aufgaben aus verschiedenen Gebieten des behandelten Stoffes dient teilweise als Ergänzung der Theorie oder enthält Lösungen von praktisch wichtigen Fragen.

Mit diesem Buch wird zur Entwicklung beigetragen, in der sich die theoretische Mechanik und die technische Mechanik angleichen. Aus diesem Grund wird es sich sowohl für den Mathematiker und Physiker als auch für den mathematisch interessierten Ingenieur als wertvoll erweisen.

CH. WEHRLI

Stabilitätstheorie mit Erläuterungen zu DIN 4114. Von G. BÜRGER-MEISTER unter Mitwirkung von H. STEUP, Teil I (Akademie-Verlag, Berlin 1957). 407 S., 306 Abb.; DM 35.50.

Dieses Buch, das der Theorie und Praxis der elastischen und inelastischen Stabilitätsprobleme gewidmet ist, bringt einen erfreulichen Fortschritt auf diesem, in seinen Grundlagen noch immer nicht sehr fest gefügten Gebiet. Zwar wird auch hier noch zwischen «statischer» und «dynamischer» Stabilität unterschieden; die verschiedenen Spielarten, in denen die Stabilitätsprobleme auftreten, werden indessen sorgfältig gegeneinander abgegrenzt, in ihren typischen Merkmalen untersucht und an Beispielen besprochen. Besondere Vorzüge des Buches liegen darin, dass gelegentlich auf die Grenzen der gebräuchlichen Verfahren hingewiesen wird und dass die üblichen Vernachlässigungen ins rechte Licht gerückt und Schritt für Schritt behoben werden. Ein grosser Teil des Textes ist den Vorgängen nach Eintritt des Knickens, dem inelastischen Verhalten und der Ermittlung von Traglasten gewidmet.

Dieser erste Band (mit den Haupttiteln: Einführende Betrachtungen zur Stabilität des Gleichgewichts, Lösung von Stabilitätsproblemen nach der Gleichgewichtsmethode, Lösung von Stabilitätsproblemen nach der energetischen Methode, Näherungsmethoden zur Berechnung von Verzweigungslasten, Mehrteilige Druckstäbe, Biegedrillknickung und Kippung) enthält alle Probleme, die bei Stäben und Balken auftreten, und ist gut dokumentiert. Ein zweiter Band soll sich mit Stabsystemen und Flächentragwerken befassen.

H. ZIEGLER

Grenzschicht-Theorie. Von H. SCHLICHTING, 3. Aufl. (G. Braun, Karlsruhe, 1958). 603 S., 375 Abb.; 32 Tab.; sFr. 72.40.

Die erste Auflage dieser Grenzschichttheorie wurde in der ZAMP 3, Heft 5 (1952), ausführlich besprochen. Die Tatsache, dass jetzt schon die dritte Auflage vorliegt, beweist, dass die damals erteilte gute Note voll verdient war. Auch die im Jahre 1955 erschienene englische Übersetzung fand eine sehr gute Aufnahme. Der Verfasser legt nun eine vollkommen überarbeitete, dem neuesten Stand der Wissenschaft angepasste Ausgabe vor. Wenn auch die Einteilung im wesentlichen unverändert geblieben ist, sind jedoch wichtige Ergänzungen zugefügt worden. Insbesondere das Kapitel über die kompressible laminare Grenzschicht und der Abschnitt Umschlag laminar-turbulent sind erheblich erweitert worden, einem Wunsch der

ersten Rezension Rechnung tragend. Damit ist der Umfang des Buches von 500 auf 620 Seiten gestiegen. Ein wesentlicher Vorteil des Werkes ist der umfangreiche, die neuesten Arbeiten berücksichtigende Literaturnachweis.

Das Werk stellt eine ausgezeichnete Einführung in die physikalischen und mathematischen Grundlagen der Strömung reibungsbehafteter Flüssigkeiten dar. Die zahlreichen Vergleiche mit experimentellen Ergebnissen erlauben eine genaue Abgrenzung des Gültigkeitsbereiches der Theorie und geben besseren Einblick in die physikalischen Vorgänge.

Für den Studierenden sowie für den praktisch in Industrie oder Forschung tätigen Ingenieur wird diese *Grenzschicht-Theorie* lange ein Standardwerk bleiben.

P. DE HALLER

Die Wirbelschicht als Energieübertragungsfläche. Von W. MATZ (Springer-Verlag, Berlin 1958). 66 S., 27 Abb.; DM 10.50.

Der Verfasser versucht, die Vorgänge bei dem Energieaustausch durch eine vektoranalytische Betrachtungsweise zu beschreiben. Dadurch sollten allgemeine Gesetze ermittelt werden, die für mechanische, strömungsdynamische oder thermodynamische Energieübertragung Geltung haben. Den Ausführungen ist ein gewisser formaler Reiz nicht abzusprechen, der praktische Wert dieser Theorie aber scheint dem Referenten etwas fraglich. Die Behauptung, dass mit dieser Betrachtungsweise die Verlustquellen eines Verfahrens leichter zu erkennen seien, bleibt unbewiesen, beziehen sich doch alle aufgeführten Beispiele auf längst bekannte Vorgänge, deren Behandlung mit den klassischen Mitteln der Mechanik und der Thermodynamik erschöpfend möglich ist. Immerhin tragen solche Verallgemeinerungsversuche zum Verständnis verwandter Probleme bei und sind in diesem Sinne zu begrüßen.

P. DE HALLER

Gas Dynamics. Von KLAUS OSWATITSCH. Englisch von GUSTAV KUERTI. Band 1 von *Applied Mathematics and Mechanics*. Herausgegeben von F. N. FRENKIEL (Academic Press, New York 1956). 610 S., 300 Abb.; \$ 12.00.

Dies ist die englische Übersetzung der in dieser Zeitschrift bereits ausführlich besprochenen deutschen Ausgabe. Sie zeichnet sich durch eine klare, einfache Sprache aus sowie durch ein Minimum an mathematischen Exkursen. Es ist den Autoren gelungen, eine leichtverständliche und logisch aufgebaute Einführung in die Methoden der modernen Aerodynamik der hohen Geschwindigkeiten zu geben. Das Buch behandelt nach einem kurzen Überblick der notwendigen thermodynamischen Begriffe zunächst die eindimensionale stationäre und instationäre Strömung, um nachher allgemeine Gleichungen, Integralsätze und Ähnlichkeitsregeln abzuleiten. Zwei- und dreidimensionale Strömungen in Schallnähe, im Über- und Unterschallgebiet werden ausführlich behandelt, rechnerische und experimentelle Hilfsmittel sowie der Einfluss der Viskosität bilden je den Inhalt eines Kapitels. Wertvoll sind die numerischen Tafeln sowie das ausführliche, die neuesten Erscheinungen berücksichtigende Literaturverzeichnis.

P. DE HALLER

Experimental Designs. Von W. G. COCHRAN und G. M. COX, 2. Aufl. (John Wiley and Sons, New York 1957). 617 S.; \$ 10.25.

Die erste Auflage dieses Werkes erschien 1950 und wurde bald als ein Standardwerk anerkannt. Die Grundsätze für das richtige Planen und Auswerten von Versuchen gehen auf R. A. FISHER zurück, der 1935 in seinem klassischen Werk *The Design of Experiments* die grundlegenden Ideen vortrug. COCHRAN und COX kommt

das Verdienst zu, die bis 1950 entwickelten Versuchspläne übersichtlich dargestellt und auf Grund zahlreicher Beispiele deren Auswertung veranschaulicht zu haben.

Wie die gesamte mathematische Statistik, so ist auch das Teilgebiet des Planens von Versuchen in kräftiger Entwicklung begriffen. Seit 1950 sind weitere Pläne von bekannten Systemen neu gefunden und ihre Auswertung untersucht worden. Dies gilt besonders für Versuche mit mehreren Faktoren, bei denen nur ein Teil der möglichen Kombinationen ausgeführt wird («fractional factorial designs»). COCHRAN und COX haben über diesen Gegenstand ein Kapitel beigefügt.

Der zweite Gegenstand, dem die Verfasser ein neues Kapitel widmen, sind die von G. E. P. BOX entwickelten Verfahren zum Auffinden der optimalen Kombination mehrerer Faktoren.

Das Buch von COCHRAN und COX wird in seiner neuen Form noch in vermehrtem Masse ein nützliches Werkzeug in der Hand des Versuchsanstellers sein.

A. LINDER

Handbuch der Physik – Encyclopedia of Physics. Herausgegeben von S. FLÜGGE. Band 5, 1. Teil: *Prinzipien der Quantentheorie* (Springer-Verlag, Berlin 1958). 376 S., 7 Fig.; DM 90.–

Der 1. Teil des 5. Bandes behandelt die Prinzipien der Quantentheorie und enthält einen Beitrag von W. PAULI über *Die allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik* und einen zweiten von G. KÄLLÉN über *Quantenelektrodynamik*.

Beim Artikel von W. PAULI handelt es sich im wesentlichen um einen Neudruck des klassischen Artikels aus dem Band 24, Teil 1, des Handbuches von GEIGER und SCHEEL. Die Änderungen betreffen zur Hauptsache die relativistische Quantentheorie, wo der Abschnitt über das elektromagnetische Feld weggelassen wurde. An seine Stelle tritt der ausführliche Artikel von G. KÄLLÉN. (Die erste Fussnote des Bandes verrät übrigens den ursprünglichen Plan des Herausgebers, der nur teilweise zur Ausführung gelangen konnte.) Ebenso entfallen natürlich die berühmte Kritik an der Diracschen Theorie des Elektrons und einige Worte in der Diskussion der Weylschen zweikomponentigen Gleichung für ein Spin $1/2$ -Teilchen der Ruhmasse Null. Der Rezensent vermisst besonders die erste Stelle mit einiger Wehmut, denn sie illustriert, welch überraschende Lösungen in scheinbar hoffnungsloser Situation die Natur hin und wieder bereithält.

Im übrigen braucht der Neudruck des Paulischen Artikels kein Wort der Rechtfertigung. Er ist und bleibt die meisterhafteste Behandlung des Gegenstandes.

Der Artikel von G. KÄLLÉN ist weitgehend aufs Sachlich-Technische ausgerichtet. Grundsätzliche Betrachtungen über die Messbarkeit des elektromagnetischen Feldes werden nur gestreift. Andererseits wird auf alle Mätzchen verzichtet (was in der Feldtheorie nicht ganz selbstverständlich ist). Mir erscheint diese Einstellung gerechtfertigt, handelt es sich doch um eine Theorie, deren Grundlagen weitgehend schwankend sind, deren Erfolge aber zum Bedeutendsten gehören, was die Physik der letzten 10 Jahre hervorgebracht hat. Mit Recht werden daher die Anwendungen in gebührender Breite behandelt. Das gilt auch für die niedrigsten Näherungen für den Compton-Effekt, die Paarerzeugung, die Bremsstrahlung und die Möller-Streuung.

Den Kern des Artikels bildet der VI. Abschnitt, in welchem die niedrigsten strahlungstheoretischen Korrekturen behandelt werden. Hier findet man neben den «klassischen» Effekten (magnetisches Moment des Elektrons, Lamb-Verschiebung) auch einen Abschnitt über Positronium. Die Rechnungen für die höheren Korrekturen können natürlich nur erwähnt werden.

Der VII. Abschnitt behandelt die allgemeine Theorie der Renormierung unabhängig von der Störungsrechnung und gibt zum erstenmal eine buchmässige Darstellung des Källénschen Ergebnisses, dass unter den Renormierungskonstanten wenigstens eine nicht endlich ist.

Der Källénsche Artikel dürfte auch als Einführung in die Feldtheorie und die Quantenelektrodynamik eine willkommene Ergänzung des Schrifttums darstellen.

R. JOST

Nichtlineare Mechanik. Von H. KAUDERER (Springer-Verlag, Berlin 1958). 684 S., 229 Abb.; DM 64.50.

Genau genommen, sind die Differentialgleichungen, welche die in der Natur und insbesondere in der Mechanik auftretenden Vorgänge beschreiben, nichtlinear. Auf den meisten Gebieten (Mechanik der Flüssigkeiten und Gase, der plastischen Körper und des Kreisels) gelingt ihre Linearisierung nur für ganz spezielle Fälle. Im Gegensatz hiezu ist es in der Schwingungslehre und in der Elastizitätstheorie möglich, die Differentialgleichungen im vornherein und ohne Rücksicht auf das spezielle Problem zu linearisieren, und diese beiden Gebiete sind denn auch bis heute die ergiebigsten Jagdgründe des mechanischen Wandwerks geblieben. Vorstösse ins nichtlineare Gebiet sind nicht nur mühsam, sondern auch weniger ergiebig, da hier das Überlagerungsprinzip nicht gilt. Sie sind aber sehr interessant, da die Linearisierung vielfach nicht nur die Genauigkeit der Resultate affiziert, sondern feinere Erscheinungen überhaupt unter den Tisch wischt. Seit den zwanziger Jahren sind bei den nichtlinearen Schwingungen grosse Fortschritte erzielt worden, wobei sich KAUDERER bleibende Verdienste erworben hat. In der Elastizität haben MURNAGHAN, RIVLIN und andere eine geometrisch nichtlineare Theorie geschaffen; gleichzeitig ist von KAUDERER und seinen Mitarbeitern eine physikalisch nichtlineare Theorie entwickelt worden.

Das vorliegende Buch berichtet über den heutigen Stand der Forschung auf den beiden Gebieten, auf denen der Verfasser tätig ist: die nichtlinearen Schwingungen und die von ihm geschaffene physikalisch nichtlineare Elastizität. Zahlreiche Ergebnisse sind in aller Stille herangereift und hier zum ersten Mal veröffentlicht.

Der Stil des Buches ist vorbildlich, die Darstellung leicht verständlich und von einer seltenen Präzision.

H. ZIEGLER

Physikalische Abhandlungen und Vorträge. Von MAX PLANCK (Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1958). 3 Bände; DM 150.–.

Mit der vorliegenden dreibändigen Ausgabe der *Physikalischen Abhandlungen und Vorträge* von MAX PLANCK erfüllt der Verband der Deutschen Physikalischen Gesellschaften und die Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften eine moralische Verpflichtung, die seit PLANCKS Tod im Jahre 1947 bestanden hat. Ich denke, dass jeder Physiker den erwähnten Gesellschaften für ihre Tat dankbar ist.

Die beiden ersten Bände enthalten zusammen 121 wissenschaftliche Abhandlungen aus den Jahren 1879 bis 1941. Weggelassen wurden einige wenige rein polemische Arbeiten und die Lehrbücher. Letztere sind ja sonst leicht zugänglich.

Der 3. Band enthält Reden und Aufsätze, die sich an einen breiteren Kreis wenden, dann Jubiläumsadressen und Nachrufe auf zeitgenössische Physiker, und PLANCKs aufschlussreiche wissenschaftliche Selbstbiographie. Schliesslich Reden und Erwidernungen zu MAX PLANCKS 80. Geburtstag, die Traueransprache von MAX VON LAUE und zwei Rundfunkansprachen von OTTO HAHN und MAX VON LAUE zum 10. Todestag.

Der nicht vorwiegend an Thermodynamik interessierte Leser wird sich besonders für PLANCKS Arbeiten zur Hohlraumstrahlung und zur Quantentheorie interessieren. Dazu gehört jene Kette von Arbeiten, die zu den beiden umstürzenden Mitteilungen vom 19. Oktober und 14. Dezember 1900 vor der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin führten. Was an diesen Mitteilungen, neben ihrer historischen Bedeutung, auch heute noch ergreift, ist ihre enorme Unmittelbarkeit. Der Schluss der zweiten Mitteilung (in welcher die Quantenhypothese zur Herleitung der Intensitätsverteilung der Hohlraumstrahlung zuerst eingeführt wird) gibt zum ersten Mal zuverlässige Grössen für die Loschmidtsche Zahl und die Elektronenladung und schliesst mit der stolzen Bemerkung:

«All diese Beziehungen beanspruchen, wenn die Theorie überhaupt richtig ist, nicht annähernde, sondern absolute Gültigkeit... Ihre Prüfung durch direktere Methoden wird eine ebenso wichtige wie notwendige Aufgabe der weiteren Forschung sein.»

Nicht minder interessant aber ist PLANCKS Einstellung zur weiteren Entwicklung der Quantentheorie. Sie ist gekennzeichnet durch den fast verzweifelt anmutenden Versuch, an der klassischen Physik festzuhalten.

Das folgende Zitat aus dem Jahre 1923 zur Bohrschen Atomtheorie mag hier zur Illustration dienen:

«Zunächst muss es jedem Unbefangenen kaum begreiflich vorkommen, wie es überhaupt möglich war, dass ein derartiger Frontalangriff auf die so sicher fundierte, so sorgfältig abgerundete und vielseitig erprobte klassische Theorie ... so rasch gelingen konnte, und es mag im Zusammenhang damit wohl sogar ein Zweifel sich regen, ob angesichts solcher Vorkommnisse die Physik überhaupt noch den Anspruch erheben darf, als die bestbegründete unter den Naturwissenschaften zu gelten.»

Dieser Zweifel wird zwar im folgenden einigermaßen besänftigt, beherrscht aber doch PLANCKS weitere Arbeiten zur Quantentheorie, welche zur Hauptsache aus einer Reihe von «klassizistischen» (und erfolglosen) Modifikationen der Quantenhypothese und später der Wellenmechanik bestehen.

Es ist tröstlich, aus der wissenschaftlichen Selbstbiographie zu hören, dass PLANCK in diesen vergeblichen, mühsamen Versuchen nichts Tragisches findet, sondern dass er ihretwegen schliesslich genau wusste, «dass das Wirkungsquantum in der Physik eine viel bedeutendere Rolle spielt, als ich anfangs geneigt war anzunehmen».

Die Reproduktion der Abhandlungen geschah zum grössten Teil photomechanisch. Sie ist im allgemeinen adäquat.

R. JOST

Microwave Transmission Design Data. Von THEODORE MORENO (Dover Publications, New York 1958). 248 S., 200 Fig.; \$1.50 (2. Auflage des 1948 bei Sperry Gyroscope Company erschienenen Buches).

Der Fachmann wird es freudig begrüßen, dass MORENOS *Microwave Transmission Design Data* wieder erhältlich ist. Das überaus nützliche Werk bedarf keiner besonderen Empfehlung. Auf knappem Raum vermittelt es dem Konstrukteur und dem im Laboratorium arbeitenden Physiker die notwendigen Angaben über Wellenleiter und Hohlraumresonatoren, wobei ein leichtfasslicher, das Wesentliche enthaltender Text und zahlreiche Figuren das Verständnis unterstützen. Die zweite Auflage ist ein unveränderter Abdruck der vor zehn Jahren erschienenen ersten Auflage; dass keine Änderungen des Inhaltes notwendig wurden, spricht für die Qualität des Buches.

F. TANK

The Generalized Plane Strain of an Elasto-Plastic Material

By DAVID R. BLAND, Manchester, Great Britain¹⁾

Introduction

The majority of solutions to problems in plasticity obtained to date have been for a rigid-plastic non-hardening material, generally in plane strain or in axial symmetry for which general methods of solution are known [5, 10]²⁾. For an elasto-plastic material there have been about a score of particular solutions into some of which workhardening has been incorporated and into a few of which the effect of temperature gradients [1]. In each of these particular solutions there was such a high degree of symmetry that the dependent variables were functions of one space variable only. It is the object of this paper to put forward two methods of solution for certain problems of elasto-plastic materials in generalized plane strain, i.e. the simplest case of dependence on two space variables; the first method is for non-hardening materials, the second for workhardening.

It has been found by experiment that most metals satisfy the Mises yield criterion and its associated flow rule – the principal exception is the initial yielding of mild steel – and not the Tresca criterion [11, 7]. However by a suitable choice of constants the absolute error in the yield stress predicted by the Tresca criterion can always be made less than 8%. It has already been found [10] that for rigid-plastic materials in axial symmetry a general method of solution is feasible using the Tresca criterion but not using the Mises criterion. The same situation will arise in this paper. The error in a particular problem can be made considerably less than 8% if the stress vector in the plastic region covers only a small area of the yield surface in stress space but it may exceed 8% if the choice of yield criterion appreciably effects the position of the elasto-plastic boundaries.

Temperature effects are generally included in the classical theory of elasticity by an additional term in the generalized HOOKE's law. In fact it is more correct to say that the classical theory is a particular case of the more general thermo-elastic theory obtained by assuming either isothermal or adiabatic conditions. A concise treatment of this topic has recently been given by LESSEN [6]. The specifically plastic equations of an elasto-plastic material, namely the yield criterion and the associated flow rule, are unaffected by temperature provided

¹⁾ Department of Mathematics, University of Manchester.

²⁾ Numbers in brackets refer to References, page 132.

that the variation of temperature is not large enough to affect the value of the yield stress. It is assumed in this paper that the values of all physical constants that occur are effectively independent of temperature. Temperature effects are therefore included in these theories of elasto-plastic materials only by the presence of the temperature term in the generalized HOOKE's law.

In the treatment of the non-hardening material, it is assumed that the rotation of an element is small. This assumption is implicit in most treatments of the theory of plasticity. If ω_{ij} is the rotation tensor for a material element, if D/Dt denotes the time derivative following a particle of a tensor referred to axes fixed in space and if d/dt denotes the time derivative following a particle of the tensor referred to axes fixed in the material element, then for a second order tensor, see e.g. NOLL [9],

$$\frac{d\epsilon_{ij}}{dt} = \frac{D\epsilon_{ij}}{Dt} + \epsilon_{kj} \omega_{ki} + \epsilon_{ik} \omega_{kj}.$$

It is the derivative $d\epsilon_{ij}/dt$ of the strain tensor that has the greater physical significance because it is $d\epsilon_{ij}^p/dt$, not $D\epsilon_{ij}^p/Dt$, that appears in the theory of the plastic potential. The axes used in particular problems are axes fixed in space and therefore the two rotation terms in the above equation should be included at some stage of the analysis. They are generally omitted, i.e. it is implicitly assumed that they are small.

The theory for the non-hardening elasto-plastic material is similar to the well-known theory for the rigid-plastic material. In fact the latter is a special case of the former obtained by letting the elastic moduli tend to infinity.

The treatment in the workhardening theory is limited to linear workhardening materials, i.e. materials for which the yield stress is a linear function of the equivalent plastic strain, and to small strains because the linear strain-displacement equation is used. The fractional error introduced by the latter assumption is of the order of the strain and, since the strain is small, the approximation of linear workhardening is not unrealistic for actual materials.

For a given total permanent deformation of a body, workhardening has the effect of distributing the deformation more evenly through the body, i.e. one tends to have a large area of small permanent deformation rather than a small area of large permanent deformation. This is illustrated by a tension test of a cylindrical specimen (Figure 1). First yielding will occur at some section, say AB , determined by circumstances fortuitous on a macroscopic scale, and this yielding will produce a small reduction in area at this cross-section. If the material is non-hardening, the specimen is now weakest at this section and all further yielding takes place there. However if the material is workhardening, the increase in yield stress due to permanent strain more than balances the decrease in cross-sectional area and the yielding then occurs at another section. The over-all effect is that the cross-section of the cylinder decreases uniformly

along its length until a strain is reached where the increase in workhardening no longer balances the decrease in area.

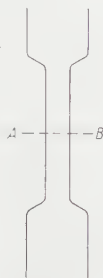


Figure 1

A tension test specimen.

The approximation is made in the workhardening theory that the rotation of the principal axes of stress in any material element during plastic deformation can be neglected. The stress-plastic strain increment equations can then be integrated to give stress-total plastic strain equations. Without this assumption the subsequent analysis would not be possible. The limitation to small strains tends to reduce the error introduced by this assumption because in the limiting case of vanishingly small strains there is no approximation—the total strain has become an incremental strain. Workhardening also tends to reduce the error as will be described in the next paragraph.

Consider a workhardening body in plane strain, subject to external forces of which the directions and the ratios of the magnitudes are maintained approximately constant, and which deforms in such a way that the mean rotation of the body is zero, i.e. over any cross-section lying in a plane of plane strain, $\int \omega \, dS = 0$.

Then if any part of the body rotates it will produce strain in the surrounding parts. These strains if more than about 0.3% will be plastic and workhardening will occur. Consequently greater stress will be required for the further rotation of the part of the body first considered. The effect of workhardening is to reduce differential rotation between one part of a body and another and therefore if the mean rotation is zero, to reduce the absolute magnitude of the rotation in all parts of the body. It does not follow that the principal axes of stress will not rotate during deformation if the external forces satisfy the above conditions, but the rotation under these conditions will be reduced. Consequently the rotation of the principal axes of stress in any material element is reduced if the material is workhardening and if the external forces are maintained as stated.

The Yield Criterion

If the z -axis is normal to the planes of plane strain of a plastic rigid material $d\varepsilon_{zz}^p = 0$, and therefore the equation for $d\varepsilon_{zz}^p$ derived from the plastic potential

can be used to eliminate σ_{zz} from the yield criterion. Then for a non-hardening plastic-rigid material, the yield criterion and the equations of equilibrium provide three equations for the three components of stress, σ_{xx} , σ_{yy} , and σ_{zz} , which can be solved when the boundaries of the plastic region and suitable boundary conditions are known. If $d\varepsilon_{zz}^p$ had not been known in advance it would have been necessary to solve the stress and velocity equations simultaneously. The difference is so crucial that it is now considered under what condition does $d\varepsilon_{zz}^p = 0$ in the generalized plane strain³⁾ of an elasto-plastic material when the material satisfies the yield criterion either of VON MISES or of TRESCA.

The yield criterion of VON MISES when $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$ is

$$f \equiv (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6\sigma_{xy}^2 = 6k^2. \quad (1)$$

By the theory of the plastic potential [3]

$$d\varepsilon_{zz}^p = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{zz}} d\lambda = 4 \left[\sigma_{zz} - \frac{1}{2} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \right] d\lambda. \quad (2)$$

If $d\varepsilon_{zz}^p = 0$,

$$\sigma_{zz} = \frac{1}{2} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}), \quad (3)$$

$\varepsilon_{zz} = C$ and $\varepsilon_{zz}^p = 0$ since $d\varepsilon_{zz}^p = 0$ throughout the deformation. Hence $\varepsilon_{zz}^e = \varepsilon_{zz} - \varepsilon_{zz}^p = C$.

The generalized HOOKE's law in the presence of temperature gradients is

$$\varepsilon_{ij}^e = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \alpha T \delta_{ij} \quad (4)$$

and therefore

$$E C = E \varepsilon_{zz}^e = \sigma_{zz} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + E \alpha T.$$

Whence

$$\sigma_{zz} = \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + E (C - \alpha T). \quad (5)$$

Equations (3) and (5) are consistent only if

$$\nu = \frac{1}{2} \quad (6)$$

and

$$T = \text{const} = \frac{C}{\alpha}. \quad (7)$$

Equations (6) and (7) are necessary conditions for $d\varepsilon_{zz}^p = 0$ for a von Mises elasto-plastic material in generalized plane strain. They are also sufficient as can be seen by substitution from equations (6) and (7) into equations (5) and (2).

³⁾ Generalized plane strain is defined by $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, $w = Cz$. In plane strain $C = 0$.

The yield criterion of TRESCA is

$$f \equiv (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4 \sigma_{xy}^2 = 4 k^2 \quad (8)$$

whenever σ_{zz} is the intermediate principal stress. From the theory of the plastic potential and equation (8),

$$d\epsilon_{zz}^p = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{zz}} d\lambda = 0.$$

Therefore a sufficient condition for $d\epsilon_{zz}^p = 0$ for a Tresca material is that σ_{zz} is the intermediate principal stress.

If σ_{max} and σ_{min} are the algebraically greater and lesser principal stresses in the (x, y) -plane, then from equation (5) the sufficient condition is

$$\sigma_{max} > \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + E (C - \alpha T) > \sigma_{min};$$

or, using $\sigma_{max} - \sigma_{min} = 2k$ and $\sigma_{max} + \sigma_{min} = \sigma_{xx} + \sigma_{yy}$,

$$k + \frac{1}{2} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) > \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + E (C - \alpha T) > -k + \frac{1}{2} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}),$$

i. e.

$$\left(\frac{1}{2} - \nu \right) (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) - E (C - \alpha T) < k. \quad (9)$$

Note that, when equations (6) and (7) are satisfied, the inequality (9) is always satisfied and equation (1) reduces to equation (8). It follows that the class of problems for a von Mises material in generalized plane strain for which $d\epsilon_{zz}^p = 0$ is included as a special case of the more general class of problems for which $d\epsilon_{zz}^p = 0$ for a Tresca material. For the rest of this paper it is assumed that the yield criterion is equation (8) and that the inequality (9) is satisfied at all points in the plastic region.

Non-Hardening Materials

The method of solution of a set of partial differential equations generally depends upon their nature, i.e. whether the equations have or have not real characteristics. If the characteristics are real and distinct (hyperbolic equations) it is convenient to refer the equations to the characteristics and to solve particular problems by integration along them. If the characteristics are imaginary (elliptic equations), weak discontinuities of the dependent variables do not occur (except where the given variables are discontinuous) and it is immaterial in which direction the equations are integrated. It is well known that the equations for the plane strain of a plastic-rigid material are hyperbolic and that the two sets of characteristics of stress and velocity are orthogonal and coincident. In this section the nature of the equations for a non-hardening elasto-plastic material is investigated, and in the next section the work-hardening case.

For a non-hardening material, the yield criterion equation (8) and the equations of equilibrium

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0 \quad (10)$$

are three equations containing only three unknowns σ_{xx} , σ_{yy} and σ_{xy} because $k = \text{const}$. These equations are identical to those occurring in plastic rigid theory. It is well known ([5], chapter 6) that the equations (8) and (10) are hyperbolic with orthogonal characteristics. By substituting

$$\sigma_{xx} = -p - k \sin 2\varphi, \quad \sigma_{yy} = -p + k \sin 2\varphi, \quad \sigma_{xy} = k \cos 2\varphi \quad (11)$$

($\varphi + \pi/4$ is the anticlockwise angular rotation of the direction of the maximum principal stress from the x -axis), the equations referred to the characteristics can be expressed in the form

$$\left. \begin{aligned} p + 2k\varphi &= \text{const} \quad \text{on} \quad \frac{dy}{dx} = \tan \varphi, \quad \text{an } \alpha\text{-line}, \\ p - 2k\varphi &= \text{const} \quad \text{on} \quad \frac{dy}{dx} = \tan\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right), \quad \text{a } \beta\text{-line}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Next consider the velocity field. The plastic strain rates are given by the theory of the plastic potential and by equations (8) and (11) as

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_{xx}^p &= \frac{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})}{2} \dot{\lambda} = -k \dot{\lambda} \sin 2\varphi, \\ \dot{\epsilon}_{yy}^p &= \frac{(\sigma_{yy} - \sigma_{xx})}{2} \dot{\lambda} = k \dot{\lambda} \sin 2\varphi, \\ \dot{\epsilon}_{xy}^p &= \sigma_{xy} \dot{\lambda} = k \dot{\lambda} \cos 2\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

The elastic strain rates are obtained from the generalized HOOKE's law equation (4), after substitution for σ_{zz} from equation (5) and after differentiation with respect to time (the derivative following a particle) as

$$\left. \begin{aligned} E\dot{\epsilon}_{xx}^e &= (1 - \nu^2) \dot{\sigma}_{xx} - \nu(1 + \nu) \dot{\sigma}_{yy} - \nu E \dot{C} + (1 + \nu) E \alpha \dot{T} \\ &= (1 + \nu) \left(- (1 - 2\nu) \dot{p} - 2k \cos 2\varphi \cdot \dot{\varphi} - \frac{\nu E \dot{C}}{1 + \nu} + E \alpha \dot{T} \right), \\ E\dot{\epsilon}_{yy}^e &= -\nu(1 + \nu) \dot{\sigma}_{xx} + (1 - \nu^2) \dot{\sigma}_{yy} - \nu E \dot{C} + (1 + \nu) E \alpha \dot{T} \\ &= (1 + \nu) \left(- (1 - 2\nu) \dot{p} + 2k \cos 2\varphi \cdot \dot{\varphi} - \frac{\nu E \dot{C}}{1 + \nu} + E \alpha \dot{T} \right), \\ E\dot{\epsilon}_{xy}^e &= (1 + \nu) \dot{\sigma}_{xy} = -2(1 + \nu) k \sin 2\varphi \cdot \dot{\varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

The generalized plane strain constant C is a function of time only.

The strain-rate velocity equations are

$$\dot{\epsilon}_{xx} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \dot{\epsilon}_{yy} = \frac{\partial V}{\partial y} \quad \text{and} \quad 2\dot{\epsilon}_{xy} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}, \quad (15)$$

where U and V are the components of velocity parallel to the x and y -axes respectively. Then

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = \epsilon_{xx} + \dot{\epsilon}_{yy} = \dot{\epsilon}_{xx}^e + \dot{\epsilon}_{yy}^e + \dot{\epsilon}_{xx}^p + \dot{\epsilon}_{yy}^p.$$

On substitution from equations (13) and (14)

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1-2\nu}{G} \dot{p} + 2[\nu \dot{C} - (1+\nu) \alpha \dot{T}] = 0, \quad (16)$$

where the modulus of rigidity

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (17)$$

From equations (13)

$$\cos 2\varphi (\dot{\epsilon}_{xx} - \dot{\epsilon}_{xx}^e) + \sin 2\varphi (\dot{\epsilon}_{xy} - \dot{\epsilon}_{xy}^e) = 0.$$

Substituting from equations (14) and (15)

$$\begin{aligned} \cos 2\varphi \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1-2\nu}{2G} \dot{p} + \frac{k}{G} \cos 2\varphi \cdot \dot{\varphi} + \nu \dot{C} - (1+\nu) \alpha \dot{T} \right) \\ + \sin 2\varphi \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right) + \frac{k}{\mu} \sin 2\varphi \cdot \dot{\varphi} \right] = 0 \end{aligned}$$

or

$$\left. \begin{aligned} \cos 2\varphi \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right) + \frac{1-2\nu}{2G} \cos 2\varphi \cdot \dot{p} + \frac{k}{G} \dot{\varphi} \\ + \cos 2\varphi (\nu \dot{C} - (1+\nu) \alpha \dot{T}) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Equations (16) and (18) are two equations for U and V . The characteristics of the equations are

$$\frac{dy}{dx} = \tan \varphi \quad \text{and} \quad \frac{dy}{dx} = \tan \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right).$$

The characteristics of stress and velocity coincide. If u and v are the components of velocity and ds_α and ds_β the increments of length along the α -lines and β -lines respectively, then the equations holding along the characteristics

can be shown to be

$$\left. \begin{aligned} du - v d\varphi + \left(\frac{1-2\nu}{2G} \dot{p} + \frac{k}{G} \dot{\varphi} + \nu \dot{C} - (1+\nu) \alpha \dot{T} \right) ds_\alpha &= 0 \quad \text{on an } \alpha\text{-line,} \\ dv + u d\varphi + \left(\frac{1-2\nu}{2G} \dot{p} - \frac{k}{G} \dot{\varphi} + \nu \dot{C} - (1+\nu) \alpha \dot{T} \right) ds_\beta &= 0 \quad \text{on a } \beta\text{-line.} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Equations (19) are the analogues of the Geiringer equations for the plastic-rigid material. When $T = C = \text{const}$ and $\nu = 1/2$ (an incompressible material) the equations reduce to those derived by HILL ([5], p. 241). When $G \rightarrow \infty$ and $T = C = \text{const}$, equations (19) reduce to the Geiringer equations. Alternatively one can say that the terms inside the brackets in equations (19) are the additional terms introduced into the Geiringer equations by including the elastic terms.

In general it is necessary to follow the course of the deformation in solving equations (12) and (19), i.e. it is necessary to work out a series of solutions at successive times. In practice this is prohibitively time consuming. As in plastic-rigid theory, however, there are certain classes of problems in which only one solution is required for a finite deformation. One class is steady flow for which the time derivative at a fixed point is zero. In this case the time derivatives in equation (19) become

$$\dot{p} = u \frac{\partial p}{\partial s_\alpha} + v \frac{\partial p}{\partial s_\beta}, \quad \dot{\varphi} = u \frac{\partial \varphi}{\partial s_\alpha} + v \frac{\partial \varphi}{\partial s_\beta}, \quad \dot{C} = 0, \quad \dot{T} = u \frac{\partial T}{\partial s_\alpha} + v \frac{\partial T}{\partial s_\beta}. \quad (20)$$

The values of the partial derivatives of p and φ are known from equations (13) and those of T from the solution of $\Delta^2 T = 0$. Equations (19) provide two equations for u and v .

In practice the elasto-plastic equations (19) may only be required when the elastic and plastic strains are of comparable order of magnitude. An important example is the cold rolling of metals for passes of less than 3% reduction for which no satisfactory theory at present exists. It should be noted that it is necessary to solve the elastic equations in the elastic regions and to obtain continuity of stress and displacement on the elastic plastic boundary. This is a more difficult procedure than that for plastic-rigid materials, but it seems reasonable to suppose that the lack of uniqueness, that occurs for plastic-rigid materials, will not arise for the elasto-plastic and that the elasto-plastic solution for steady flow problems will also give the residual stress distribution in the deformed material.

Workhardening Material

Nature of the Equations

As stated in the introduction, the analysis is limited to small strains and to linear workhardening and the approximation is made that the rotation of

the principal axes of stress in any material element, during the permanent deformation of this element, can be neglected.

The three components of stress in the (x, y) -plane still satisfy the yield criterion, equation (8), and the equations of equilibrium, equations (10). But k is no longer constant and therefore it is no longer possible to solve equations (8) and (10) to completely determine the components of stress before considering the components of strain. This is in contra-distinction with the situation for non-hardening materials, both rigid-plastic and elasto-plastic. p and q will again be introduced by equations (11). This introduction is equivalent to satisfying equation (8).

The limitation to small strain means that the strain-displacement relations are

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon_{xx}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \epsilon_{yy} \quad \text{and} \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \epsilon_{xy}. \quad (21)$$

In this section u and v denote the components of displacement parallel to the x and y -axes.

The yield stress of an element of a linear workhardening material satisfies

$$k = k_0 (1 + \eta \bar{\epsilon}^p), \quad (22)$$

where k_0 is the yield stress of the annealed material, η is a constant and $\bar{\epsilon}^p$ the equivalent plastic strain undergone by the element since annealing. The author has shown [2] that equivalent plastic strain and plastic work done per unit volume, W_p , are equivalent measures of workhardening for a material satisfying TRESCA's criterion, provided that no yielding takes place at a singular point on the yield surface. This condition is satisfied in this paper since σ_{zz} is assumed to be the intermediate principal stress. It is more convenient to use $\bar{\epsilon}^p$ than W_p as the measure of workhardening in this analysis.

Consider axes OX, OY fixed in a material element. The plastic strain increments at any stage of the deformation, for a material having the yield criterion and plastic potential given by equation (8), are

$$d\epsilon_{xx}^p = (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \frac{d\lambda}{2} = -k \sin 2\Phi d\lambda,$$

$$d\epsilon_{yy}^p = (\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) \frac{d\lambda}{2} = k \sin 2\Phi d\lambda,$$

$$d\epsilon_{xy}^p = \sigma_{xy} d\lambda = k \cos 2\Phi d\lambda, \quad d\epsilon_{zz}^p = 0,$$

where equations (11) have been used with $\Phi + \pi/4$ as the anticlockwise angular rotation of the direction of the maximum principal stress from the positive X -axis. The approximation that the rotation of the principal axes of stress in

any material element can be neglected means that Φ is effectively constant and the plastic strain increment equations can be integrated. If the directions of the axes, OX , OY in each material element are chosen so that they coincide with the Ox , Oy -axes at the end of the permanent deformation, then

$$\varepsilon_{xx}^p = -\lambda k \sin 2\varphi, \quad \varepsilon_{yy}^p = \lambda k \sin 2\varphi, \quad \varepsilon_{xy}^p = \lambda k \cos 2\varphi, \quad \varepsilon_{zz}^p = 0. \quad (23)$$

The elastic part of the components of strain are given by the generalized Hooke's law, equations (4). Substitution for σ_{zz} from equation (5) and use of equation (17) give

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx}^e &= -\frac{1-2\nu}{2G} p - \frac{k}{2G} \sin 2\varphi + (1+\nu) \alpha T - \nu C, \\ \varepsilon_{yy}^e &= -\frac{1-2\nu}{2G} p + \frac{k}{2G} \sin 2\varphi + (1+\nu) \alpha T - \nu C, \\ \varepsilon_{xy}^e &= \frac{k}{2G} \cos 2\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Substituting from equations (23) and (24) into equations (21),

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_{xx} &= \varepsilon_{xx}^e + \varepsilon_{xx}^p = -\frac{1-2\nu}{2G} p - \left(\lambda + \frac{1}{2G} \right) k \sin 2\varphi + (1+\nu) \alpha T - \nu C, \\ \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_{yy} &= \varepsilon_{yy}^e + \varepsilon_{yy}^p = -\frac{1-2\nu}{2G} p + \left(\lambda + \frac{1}{2G} \right) k \sin 2\varphi + (1+\nu) \alpha T - \nu C, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xy}^e + \varepsilon_{xy}^p = \left(\lambda + \frac{1}{2G} \right) k \cos 2\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

The equivalent plastic strain, $\bar{\varepsilon}^p$, is defined by

$$\bar{\varepsilon}^p = \sqrt{\frac{2}{3}} \int^{\cdot} (d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p)^{1/2}$$

the integral being taken from the annealed to the current condition. When, as in the present instance, the plastic strain components increase in proportion, then

$$\varepsilon^p = \sqrt{\frac{2}{3}} (\varepsilon_{ij}^p \varepsilon_{ij}^p)^{1/2}.$$

Substituting from equations (23),

$$\bar{\varepsilon}^p = \frac{2}{\sqrt{3}} \lambda k.$$

Substituting in equations (22),

$$\lambda = \frac{\sqrt{3} (k - k_0)}{2 \eta k_0 k},$$

whence

$$\frac{1}{2G} + \lambda = \frac{1}{2G} + \frac{\sqrt{3}}{2\eta k_0} - \frac{\sqrt{3}}{2\eta k}.$$

Substituting back into equations (25) for $1/2G + \lambda$,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_{xx} &= -\frac{1-2\nu}{2G} p - \left(\frac{1}{2G} + \frac{\sqrt{3}}{2\eta k_0} \right) k \sin 2\varphi + \frac{\sqrt{3}}{2\eta} \sin 2\varphi \\ &\quad + (1+\nu) \alpha T - \nu C, \\ \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_{yy} &= -\frac{1-2\nu}{2G} p - \left(\frac{1}{2G} + \frac{\sqrt{3}}{2\eta k_0} \right) k \sin 2\varphi - \frac{\sqrt{3}}{2\eta} \sin 2\varphi \\ &\quad - (1+\nu) \alpha T - \nu C, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \varepsilon_{xy} &= \left(\frac{1}{2G} + \frac{\sqrt{3}}{2\eta k_0} \right) k \cos 2\varphi - \frac{\sqrt{3}}{2\eta} \cos 2\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

The equations of equilibrium in terms of p , k and φ are

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} (k \sin 2\varphi) + \frac{\partial}{\partial y} (k \cos 2\varphi) &= 0, \\ -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} (k \cos 2\varphi) + \frac{\partial}{\partial y} (k \sin 2\varphi) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Equations (26) and (27) are five equations for u , v , p , k and φ . The nature of the equations, i.e. whether the characteristics are real or imaginary, will now be investigated.

From the first two of equations (26) by addition

$$-p = \frac{G}{1-2\nu} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{2(1+\nu)G}{1-2\nu} \alpha T + \frac{2\nu G}{1-2\nu} c \quad (28)$$

and by subtraction

$$\gamma k \sin 2\varphi = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sqrt{3}}{\eta} \sin 2\varphi, \quad (29)$$

where

$$\gamma = \frac{1}{G} + \frac{\sqrt{3}}{\eta k_0}. \quad (30)$$

The last of equations (29) can be written

$$\gamma k \cos 2\varphi = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\sqrt{3}}{\eta} \cos 2\varphi. \quad (31)$$

Equations (28), (29) and (31) are used to eliminate p , $k \sin 2\varphi$ and $k \cos 2\varphi$

from equation (27). This gives

$$\left. \begin{aligned} \frac{\gamma G}{1-2\nu} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - \frac{2(1+\nu) \gamma G \alpha}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \\ + \nabla^2 u - \frac{2\sqrt{3}}{\eta} \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{2\sqrt{3}}{\eta} \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \\ \frac{\gamma G}{1-2\nu} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{2(1+\nu) \gamma G \alpha}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \\ + \nabla^2 v - \frac{2\sqrt{3}}{\eta} \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{2\sqrt{3}}{\eta} \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Multiply equation (29) by $\cos 2\varphi$, equation (31) by $\sin 2\varphi$ and subtract:

$$\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} = \tan 2\varphi \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (33)$$

Differentiating equation (33) with respect to x ,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \tan 2\varphi \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) = 2 \sec^2 2\varphi \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Using equation (31),

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \tan 2\varphi \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) &= 2 \left(\gamma k - \frac{\sqrt{3}}{\eta} \right) \sec 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \tan 2\varphi \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) &- 2 \left(\gamma k - \frac{\sqrt{3}}{\eta} \right) \sec 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

φ can now be eliminated from equation (32) using equations (33) and (34). However, since no further differentiation is required for the present purpose of determining the nature of the characteristics at any point in the field, first choose any one point, orientate the axes so that $\varphi = 0$ at this point, and then substitute from equations (34) into equation (32):

$$\begin{aligned} \frac{\gamma G}{1-2\nu} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - \frac{2(1+\nu) \gamma G \alpha}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \\ + \nabla^2 u - \left(\frac{\eta \gamma k}{\sqrt{3}} - 1 \right)^{-1} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = 0, \\ \frac{\gamma G}{1-2\nu} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{2(1+\nu) \gamma G \alpha}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \\ + \nabla^2 v + \left(\frac{\eta \gamma k}{\sqrt{3}} - 1 \right)^{-1} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) = 0, \end{aligned}$$

i. e.

$$\left. \begin{aligned} \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} &= \frac{2(1+\nu)\gamma G \alpha}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial T}{\partial x}, \\ \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= \frac{2(1+\nu)\gamma G \alpha}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial T}{\partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

where

$$\beta = \frac{\gamma G}{1-2\nu} + \left(\frac{\eta \gamma k}{\sqrt{3}} - 1 \right)^{-1} + 1, \quad \lambda = \frac{\gamma G}{1-2\nu} - \left(\frac{\eta \gamma k}{\sqrt{3}} - 1 \right)^{-1}. \quad (36)$$

The characteristics of equations (35) are

$$\beta \left(\frac{dy}{dx} \right)^4 - (1 - \beta^2 - \lambda^2) \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - \beta = 0$$

or

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = -\frac{1 + \beta^2 - \lambda^2}{2\beta} \pm \sqrt{\left(\frac{1 + \beta^2 - \lambda^2}{2\beta} \right)^2 - 1}.$$

Real characteristics can only exist if at least one of the two values of $(dy/dx)^2$ is real and positive. The condition for this to be the case is that

$$\frac{1 - \beta^2 - \lambda^2}{2\beta} > 1 \quad \text{or} \quad \frac{\lambda^2 - (1 + \beta)^2}{2\beta} > 0.$$

Substitution from equations (36) and (30) shows

$$\frac{\lambda^2 - (1 + \beta)^2}{2\beta}$$

is always negative. Consequently there are no real characteristics at the point considered. But the point chosen was an arbitrary point in the plastic region. It follows that the characteristics are imaginary at all points in the plastic region. Hence the equations for an elasto-plastic workhardening material are elliptic everywhere—it is well known that the characteristics are imaginary in the elastic region. Since the temperature satisfies LAPLACE'S equation $\nabla^2 T = 0$, there are no discontinuities in $\partial T/\partial x$ and $\partial T/\partial y$ in the interior of the body. Since the right-hand sides of equations (35) are continuous, the displacements, strains and stresses and all their derivatives are continuous in the plastic region.

The Stress Function

In generalized plane strain the stress function ψ is introduced by means of the equations

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \quad \text{and} \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}. \quad (37)$$

The conditions of compatability required to introduce these second order partial derivatives are identical to the equilibrium equations and are therefore satisfied. In an elastic material the stress function ψ satisfies

$$\nabla^4 \psi = 0 \quad (38)$$

and this equation has proved suitable for the solution of many particular problems.

In an elasto-plastic non-hardening material, ψ will satisfy an equation which reduces to equation (38) when the plastic strain is zero. The equation will therefore contain fourth or higher derivatives of ψ . But due to the hyperbolic nature of the equations for a non-hardening material in the plastic region, discontinuities can occur in the derivatives of stress, i.e. in the third order derivatives of ψ . It follows that the equation for ψ is not suited to the solution of particular problems since its fourth order derivatives do not exist along certain lines. It is necessary to refer the equations to these lines, i.e. to the characteristics.

In an elasto-plastic work-hardening material the derivatives of all orders of stress, and therefore of stress function, are continuous and, by analogy with elasticity, it is reasonable to suppose that solutions of the equation for the stress function will provide a convenient method of solving some particular problems. This equation will now be found.

The strain compatibility equation is

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2}. \quad (39)$$

Since, from equations (11) and (37),

$$p = -\frac{1}{2} \nabla^2 \psi, \quad k \sin 2\varphi = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \quad \text{and} \quad k \cos 2\varphi = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}, \quad (40)$$

substitution from equations (26) for ε_{xx} , ε_{yy} and ε_{xy} into equation (39) yields

$$\begin{aligned} \frac{1-2\nu}{4G} \nabla^4 \psi + \left(\frac{1}{4G} + \frac{\sqrt{3}}{4\eta k_0} \right) \left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 \psi + 4 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \psi \right\} \\ + \frac{\sqrt{3}}{2\eta} \left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \sin 2\varphi + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \cos 2\varphi \right\} = 0 \end{aligned}$$

or

$$\left(\frac{1-\nu}{2G} + \frac{\sqrt{3}}{4\eta k_0} \right) \nabla^4 \psi + \frac{\sqrt{3}}{2\eta} \left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \sin 2\varphi + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \cos 2\varphi \right\} = 0. \quad (41)$$

From the last two of equations (40),

$$2 \tan 2\varphi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0. \quad (42)$$

Equations (41) and (42) are two equations to determine the stress function ψ . φ can be eliminated between them but the resulting equation is too complicated to be of any use. Note that as $\eta \rightarrow \infty$ equation (41) reduces to the elastic equation $\nabla^4 \psi = 0$. An elasto-plastic material with an infinite rate of work-hardening is indistinguishable from an elastic material with an infinite yield stress.

Some Analytic Solutions

In general equations (41) and (42) have to be solved numerically. However in three simple degenerate cases, *A*, *B* and *C* below, an analytic solution can be found and the corresponding practical problem solved. In a fourth case, *D* below, the stresses are functions of one variable only but the equation for ψ is non-linear. The complete solution for this problem has not yet been found.

Case A. $\psi = \psi(x)$: From equation (42) $\varphi = \pi/4$, and then, from equation (46), ψ satisfies $d^4\psi/dx^4 = 0$.

Whence

$$\psi = \frac{A}{3!} x^3 + \frac{B}{2!} x^2 + C x + D.$$

Only the first two terms in the expression for ψ give rise to non-zero stress components. They are

$$\sigma_{xx} = 0, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{yy} = A x + B.$$

This is the stress system in the plastic regions of a bar bent in plane strain (Figure 2). Note that solution *A*, like solutions *B* and *C*, is a degenerate solution

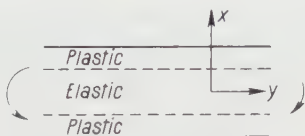


Figure 2

Plastic and elastic regions in pure bending.

in that the equation for the stress function has become linear. Consequently the yield criterion is no longer identically satisfied and it is necessary to choose the constants so that the criterion is satisfied for initial yielding on the elasto-plastic boundary. The constants are different in the two plastic regions. This involves no contradiction because the two regions are not connected.

Case B. $\psi = \psi(r)$: In plane polar coordinates equations (41) and (42) become

$$\left. \begin{aligned} \nabla^4 \psi + K \left[\left(\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{3}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \sin 2\bar{\varphi} \right. \\ \left. + 2 \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \cos 2\bar{\varphi} \right] = 0 \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

and

$$2 \tan 2 \bar{\varphi} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0, \quad (44)$$

where

$$K = \frac{1}{1 - 2\nu} \left(1 + \frac{\sqrt{3} G}{\eta k_0} \right) \quad (45)$$

and

$$\bar{\varphi} = \varphi + \theta. \quad (46)$$

Putting $\psi = \psi(r)$ in equation (44), $\varphi = \pi/4$. Then from equation (43), ψ satisfies

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \right)^2 \psi = 0.$$

Whence

$$\psi = A + B \ln r + C r^2 + D r^2 \ln r,$$

and the components of stress are

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{B}{r^2} + 2 D \ln r + D + 2 C,$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} = -\frac{B}{r^2} + 2 D \ln r + 3 D + 2 C,$$

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) = 0.$$

The constants B , C and D are not independent. The condition that the displacement should be single-valued imposes a homogeneous linear relation be-

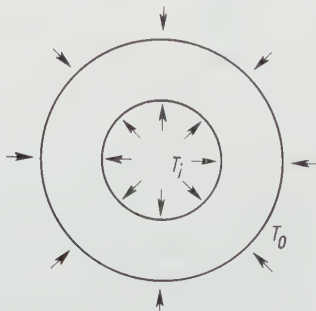


Figure 3

Pressures and temperatures on a thick cylinder.

tween them. This stress field arises in the expansion of a thick-walled right circular cylinder by internal pressure - the tube may be subject to temperature gradients. The solution to this problem has been given by the author [1].

Case C. $\psi = A\theta$. Equations (43) and (44) are satisfied with $\bar{q} = 0$. The stress system is

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = 0, \quad \sigma_{r\theta} = \frac{A}{r^2}. \quad (47)$$

This stress field arises in a thick-walled right circular cylinder subject to shearing stress on its surface. As far as the author is aware, this problem has not previously been solved explicitly and so the complete solution will now be given.

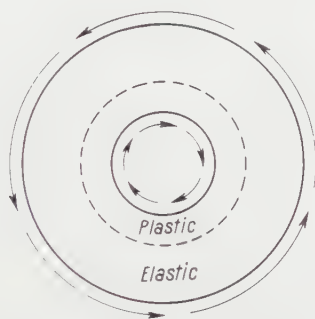


Figure 4

Shearing stresses on a thick cylinder.

The stress field in the elastic region is also given by equation (47). If the torque per unit width is S , then

$$\int_0^{2\pi} r \cdot 2\pi r \frac{A}{r^2} d\theta = S \quad \text{or} \quad A = \frac{S}{4\pi^2}.$$

Whence

$$\sigma_{r\theta} = \frac{S}{4\pi^2 r^2}.$$

The radius c of the elasto-plastic interface is given by $\sigma_{r\theta}^2 = k_0^2$ or

$$c = \sqrt{\frac{S}{2\pi k_0}}.$$

The current yield stress at a point, radial coordinate r , in the plastic region is

$$k = \sigma_{r\theta} = \frac{S}{4\pi^2 r^2} = \frac{c^2 k_0}{r^2}.$$

The equivalent plastic strain at such a point is, by equation (22),

$$\bar{\epsilon}^p = \frac{k - k_0}{k_0 \eta} = \frac{1}{\eta} \left(\frac{c^2}{r^2} - 1 \right).$$

In particular at the internal surface $r = a$, it is

$$(\bar{\varepsilon}^p)_{r=a} = \frac{1}{\eta} \left(\frac{c^2}{a^2} - 1 \right).$$

The parameter λ is given by

$$\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\bar{\varepsilon}^p}{k} = \frac{\sqrt{3}}{2\eta k_0} \left(1 - \frac{r^2}{c^2} \right), \quad a \leq r \leq c.$$

From equation (23),

$$\varepsilon_{rr}^p - \varepsilon_{\theta\theta}^p = 0, \quad \varepsilon_{r\theta}^p = \frac{\sqrt{3}}{2\eta} \left(\frac{c^2}{r^2} - 1 \right), \quad a \leq r \leq c.$$

From the generalized HOOKE's law

$$\varepsilon_{rr}^e = \varepsilon_{\theta\theta}^e = 0, \quad \varepsilon_{r\theta}^e = \frac{1}{2G} \sigma_{r\theta} = \frac{k_0}{2G} \cdot \frac{c^2}{r^2}.$$

Therefore

$$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\theta\theta} = 0, \quad \varepsilon_{r\theta} = \begin{cases} \frac{k_0}{2G} \cdot \frac{c^2}{r^2} + \frac{\sqrt{3}}{2\eta} \left(\frac{c^2}{r^2} - 1 \right), & a \leq r \leq c, \\ \frac{k_0}{2G} \cdot \frac{c^2}{r^2}, & r \geq c. \end{cases}$$

The strain-displacement equations in plane polar coordinates are

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right).$$

Therefore

$$u = 0, \quad v = \begin{cases} - \left(\frac{k_0}{2G} + \frac{\sqrt{3}}{2\eta} \right) \frac{c^2}{r} - \frac{\sqrt{3}}{\eta} r \ln r + \frac{\sqrt{3}}{2\eta} (1 + 2 \ln c) r + \frac{k_0}{2G} r, & a \leq r \leq c, \\ - \frac{k_0 c^2}{2G r} + \frac{k_0}{2G} r, & r \geq c, \end{cases}$$

where the constants of integration associated with the rigid body motion are chosen so that v is continuous and $u = v = 0$ at $r = c$. The normal derivative of the transverse displacement is discontinuous across the elasto-plastic boundary.

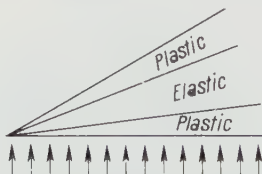


Figure 5
Wedge with one edge under pressure.

Case D. $\psi = r^2 \chi(\theta)$: In this case the stresses are functions of θ only. This is the type of stress field one would expect in the plastic regions of a semi-infinite

wedge of finite angle subject to uniform stress on its faces. It has been shown [8, 4] that when the wedge is subject to uniform increasing normal stress on one face, the plasticity commences simultaneously at both faces. As the stress increases further, one expects to have an elastic central region bounded by two plastic regions as shown. The components of stress in both regions are given by

$$\sigma_{rr} = \chi'' + 2\chi, \quad \sigma_{\theta\theta} = 2\chi, \quad \sigma_{r\theta} = -\chi'.$$

In the elastic region ψ satisfies $\nabla^4\psi = 0$ or

$$\chi = A + B\theta + C\cos 2\theta + D\sin 2\theta.$$

In the plastic region χ and φ satisfy

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(\chi'' + 4\chi) + K\frac{\partial}{\partial\theta}\sin 2\bar{\varphi} + 2k\cos 2\bar{\varphi} = C, \quad C = \text{const} \quad (48)$$

and

$$\tan 2\bar{\varphi} = \frac{\chi''}{2\chi'}. \quad (49)$$

The stresses and displacements are continuous on the elasto-plastic boundary. The solution of equations (48) and (49) has not yet been found.

Conclusions

In this paper the author has considered elasto-plastic materials in generalized plane strain and has shown that the nature of the equations is different in the two cases of non-hardening and linear work-hardening. In the former case the characteristics and the equations of stress and velocity referred to them were found, and in the latter case the equation satisfied by the stress function. The procedure for solution of particular problems has yet to be formulated.

The author thinks that the next stage in building up the workhardening theory is to look for analytic solutions of the type of case D above, e.g. try if a solution of the form $\psi = \psi(xy)$ exists and then solve the non-linear ordinary differential equation for ψ , if necessary numerically. Dependent on the choice of boundary conditions, this solution will give a possible region with its stress and displacement fields. Next attempt to fix elastic regions adjacent to the plastic regions so that the final body and external force distribution bear some resemblance to a practical problem. In this way it may be possible to construct a few analytic solutions which will serve as useful guides to the first approximation to be chosen for the solution of a given problem—in particular for the position of the elasto-plastic boundary.

Since the equations for ψ in both the elastic and plastic regions are fourth order elliptic, two conditions are required at all points on the boundary of the

body and four relations between the variables in the elastic and plastic regions on the elasto-plastic interface. If it is assumed that the plastic region gradually expands as the external forces increase, then it is reasonable to suppose that the stresses on the elastic side of the interface are about to satisfy the yield criterion. Hence there are five conditions to be satisfied on the interface, namely, the continuity of the three components of stress and of the two components of displacement. Since only four of these conditions are needed for a solution in both regions for a given boundary, the author presumes, in absence of evidence to the contrary, that the fifth condition will only be satisfied if the interface has been correctly chosen. In practice in a numerical solution, it is unlikely that the interface will be correctly chosen initially. The magnitude and sign of the error in the fifth condition at each point on the interface should give an indication of what the next choice of interface should be.

In problems solved by either elasto-plastic theory, it will often be possible to calculate the residual stress distribution when the external forces are removed. To do this, the stress distribution, obtained by applying to the body forces equal in magnitude but opposite in sign to the original forces and calculated on the assumption that the stress-strain relation is elastic throughout, is added to the original stress distribution. The sum represents the residual stress distribution provided that the yield criterion is nowhere violated.

REFERENCES

- [1] BLAND, D. R., *J. Mech. Phys. Solids* 4, 209 (1956).
- [2] BLAND, D. R., *Proc. 9th Int. Congress appl. Mech.* 3, 45 (1956).
- [3] BLAND, D. R., *J. Mech. Phys. Solids* 6, 71 (1957).
- [4] BLAND, D. R., and NAGHDI, P. M., *J. appl. Mech.* 25, 239 (1958).
- [5] HILL, R., *Mathematical Theory of Plasticity* (Clarendon Press, Oxford 1950).
- [6] LESSEN, M., *J. Mech. Phys. Solids* 5, 57 (1956).
- [7] MORRISON, J. C., and SHEPHERD, W. M., *Proc. Instn. mech. Engrs.* 163, 1 (1950).
- [8] NAGHDI, P. M., *J. appl. Mech.* 79, 98 (1957).
- [9] NOLL, W., *J. Rat. Mech. Anal.* 4, 3 (1956).
- [10] SHIELD, R. T., *Proc. roy. Soc. [A]* 233, 267 (1955).
- [11] TAYLOR, G. I., and QUINNEY, H., *Phil. Trans. roy. Soc. [A]* 230, 323 (1931).

Zusammenfassung

Unter der Voraussetzung, dass der hydrostatische Druck nicht gross ist, tritt die Hauptspannung normal zur Ebene des verallgemeinerten ebenen Verzerrungszustandes in der Fliessbedingung von TRESCA nicht auf. Man kann zeigen, dass die Spannungs- und Geschwindigkeitsgleichungen für ein elastisch-ideal-plastisches Material hyperbolisch sind, wobei die beiden Charakteristikenscharen paarweise koinzident sind. Die auf die Charakteristiken bezogenen Gleichungen unterscheiden sich von denjenigen des starr-plastischen Materials nur durch die Gegenwart von vier Zusatztermen in jeder der Geiringer-Gleichungen.

Für ein Material mit Verfestigung werden nur kleine Spannungen berücksichtigt, und es wird angenommen, dass die Gleichungen zwischen den Spannungen und den Gesamtdehnungen verwendet werden können. Unter diesen Voraussetzungen werden die Gleichungen für die Spannungen und Verschiebungen elliptisch. Da alle Ableitungen stetig sind, existiert im plastischen Bereich eine Airysche Spannungsfunktion samt speziellen Ableitungen aller Ordnungen, und es kann gezeigt werden, dass sie einer nichtlinearen partiellen Differentialgleichung vierter Ordnung genügt. Für einige einfache Probleme, bei denen die abhängigen Veränderlichen nur Funktionen einer der beiden unabhängigen Variablen sind, werden die Lösungen angegeben.

Der Einfluss von Temperaturschwankungen kann sowohl bei idealplastischen Materialien wie auch bei solchen mit Verfestigung mitberücksichtigt werden.

(Received: August 11, 1958.)

Eine Methode zur Berechnung quasistationärer Temperaturzustände bei gesteuerten Wärmeleitvorgängen in festen Körpern

Von HANS JÄCKEL, Freiberg, Sachsen, Deutschland¹⁾

1. Vorbemerkungen

In einem der letzten Hefte dieser Zeitschrift behandelte V. VODIČKA ein spezielles, gesteuertes, quasistationäres Wärmeleitproblem [1]²⁾. Der hierbei verwendete Ansatz scheint im Falle beliebiger zeit- und ortsabhängiger Steuerfunktionen zur Lösung wenig geeignet. Deshalb soll nachfolgend ein Lösungsverfahren für ganz allgemeine Aufgaben dieser Art entwickelt werden. Die dazu nötigen Gedankengänge bauen auf einer Arbeit des Verfassers auf [2], in welcher mittels gewisser Einflussfunktionen das allgemeinste gesteuerte Wärmeleitproblem gelöst wurde. Aus den dort angeführten Ergebnissen lässt sich nämlich unter Vernachlässigung aller Grössen, die mit wachsender Zeit gegen Null gehen, ein Theorem zur Bestimmung beliebiger quasistationärer Temperaturzustände ableiten. Die auf Grund der physikalischen Gegebenheiten an die Steuerfunktionen zu stellenden Bedingungen ergeben sich hierbei ganz zwangsläufig. Bemerkt sei noch, dass aus [2] auch der Lösungsweg des von T.-S. CHOW in dieser Zeitschrift erörterten Wärmeleitproblems [3] entnommen werden kann. Als Beispiel wird schliesslich die von V. VODIČKA behandelte Aufgabe gelöst und die Äquivalenz beider Ergebnisse nachgewiesen.

¹⁾ Institut für angewandte Mathematik der Bergakademie.

²⁾ Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 142.

2. Aufgabenstellung

Wir betrachten einen bezüglich der Wärmeleitung homogenen und isotropen festen Körper K , dessen Oberfläche F aus r analytischen Teilflächen F_1, F_2, \dots, F_r besteht, die sich stetig aneinanderschliessen. Mit P bezeichnen wir die Punkte des dreidimensionalen Raumes, da wir uns bei den folgenden Untersuchungen auf kein spezielles Koordinatensystem beziehen wollen. Die Anfangstemperaturverteilung des Körpers K sei durch $T(P, 0) = f(P)$ gegeben. Die Temperaturen der Grenzschichten der die r Teilflächen umgebenden Medien sollen von der Zeit t und vom Ort P abhängen. Diese sogenannten Steuerfunktionen bezeichnen wir mit $\Phi_k(P, t)$ ($k = 1, 2, \dots, r$).

Gefragt wird nun, unter welchen Bedingungen die Temperaturverteilung $T(P, t)$ des Körpers K im Laufe der Zeit einem quasistationären Zustand $\bar{T}(P, t)$ zustrebt und wie dieser im Falle seiner Existenz berechnet werden kann. Dabei verstehen wir unter dem quasistationären Temperaturzustand $\bar{T}(P, t)$ die Temperaturverteilung, die sich für grosse Werte der Zeit t im Körper K einstellt.

Bemerkt sei noch, dass Probleme, bei denen im Inneren des Körpers K zusätzlich Wärme entwickelt wird, durch eine einfache Transformation auf die eben formulierte Aufgabe zurückgeführt werden können [2]. Wir gehen deshalb hier nicht weiter darauf ein.

3. Lösung des Problems

Um derartige Aufgaben zu lösen, kann man im wesentlichen zwei Wege gehen.

Der erste basiert auf der physikalisch plausiblen Tatsache, dass die Anfangstemperatur $f(P)$ keinen Einfluss auf den quasistationären Zustand hat und die Steuerfunktionen $\Phi_k(P, t)$ jedenfalls für alle in Betracht kommenden Werte der Zeit t beschränkt sein müssen, wenn eine solche Temperaturverteilung $\bar{T}(P, t)$ überhaupt existieren soll. Man wird so, nach der Fourierschen Theorie der Wärmeleitung, zu dem Randwertproblem

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} - a^2 \Delta \bar{T} &= D\{\bar{T}(P, t)\} = 0, \\ \left(\frac{\lambda}{\alpha_k} \cdot \frac{\partial \bar{T}}{\partial n} + \bar{T} \right)_{F_k} &= L\{\bar{T}(P, t)\}_{F_k} = \Phi_k(P, t) \quad (k = 1, 2, \dots, r) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

geführt. Dabei ist wie üblich Δ der Laplacesche Operator, n die äussere Normalenrichtung, a^2 die Temperaturleitzahl, λ die Wärmeleitzahl und α_k die zur Teilfläche F_k gehörige Wärmeübergangszahl. Das Problem (1) versucht man

nun in jedem speziellen Fall durch einen direkten Ansatz für $\bar{T}(P, t)$ so zu lösen, dass alle Bedingungen erfüllt sind (vgl. zum Beispiel [1, 4]).

Für die folgenden, ganz allgemeinen Betrachtungen wird es jedoch zweckmässig sein, den zweiten Weg zu wählen. Diesem liegt die Lösung $T(P, t)$ des Randwertproblems

$$\left. \begin{aligned} D\{T(P, t)\} &= 0, & T(P, 0) &= f(P), \\ L\{T(P, t)\}_{F_k} &= \Phi_k(P, t), & t > 0 \quad (k=1, 2, \dots, r) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

zugrunde, welche für alle Werte der Zeit $0 \leq t < \infty$ den Wärmeleitvorgang richtig beschreibt. Die quasistationäre Temperaturverteilung $\bar{T}(P, t)$ ergibt sich dann im Falle ihrer Existenz, wenn wir in dem Ausdruck für $T(P, t)$ alle die Grössen vernachlässigen, die mit wachsender Zeit t beliebig klein werden. Auf diese Weise erhält man neben der allgemeinen Lösungsmethode für die eingangs formulierte Aufgabe zwangsläufig auch die an die $\Phi_k(P, t)$ zu stellenden Bedingungen.

Die Lösung des Randwertproblems (2) ist bekannt [2]. Sie lautet

$$\left. \begin{aligned} T(P, t) &= T_0(P, t) \\ &+ \sum_{k=1}^r \left\{ G_k^*(P, 0, t) + \int_0^t \left[\frac{\partial}{\partial \tau} G_k^*(P, \tau, t - \tau) \right]_{\bar{\tau}} d\tau - H_k(P, t) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} D\{T_0(P, t)\} &= 0, & T_0(P, 0) &= f(P), \\ L\{T_0(P, t)\}_F &= 0, & t > 0, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta H_k(P, \tau) &= 0, \\ L\{H_k(P, \tau)\}_{F_i} &= -\delta_{ik} \Phi_k(P, \tau) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

($i = 1, 2, \dots, r$; $k = 1, 2, \dots, r$; $\delta_{ik} = 1$ für $i = k$; $\delta_{ik} = 0$ für $i \neq k$),

$$\left. \begin{aligned} D\{G_k^*(P, \tau, t)\} &= 0, & G_k^*(P, \tau, 0) &= H_k(P, \tau), \\ L\{G_k^*(P, \tau, t)\}_F &= 0, & t > 0 \quad (k=1, 2, \dots, r). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

In (5) und (6) ist τ als Parameter aufzufassen. Ausserdem sei erwähnt, dass die $G_k^*(P, \tau, t - \tau)$ als Einflussfunktionen gedeutet werden können, wodurch eine physikalisch sinnvolle Interpretation des Ausdruckes (3) möglich ist [5, 2]. Bezeichnen wir schliesslich mit $u_\mu(P)$ die aus (4) bzw. (6) resultierenden ortho-normierten Eigenfunktionen, mit δ_μ^2 die entsprechenden Eigenwerte, so kann

für (3) geschrieben werden

$$T(P, t) = \sum_{\mu=1}^{\infty} A_{\mu} u_{\mu}(P) e^{-a^2 \delta_{\mu}^2 t} + \sum_{k=1}^r \left\{ \sum_{\mu=1}^{\infty} B_{\mu}^{(k)}(0) u_{\mu}(P) e^{-a^2 \delta_{\mu}^2 t} + \int_0^t \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{dB_{\mu}^{(k)}(\tau)}{d\tau} u_{\mu}(P) e^{-a^2 \delta_{\mu}^2 (t-\tau)} d\tau - H_k(P, t) \right\}. \quad (7)$$

Hierin ist

$$A_{\mu} = \int_K f(P) u_{\mu}(P) dv, \quad B_{\mu}^{(k)}(\tau) = \int_K H_k(P, \tau) u_{\mu}(P) dv. \quad (8)$$

Um die gleichmässige Konvergenz der in (7) auftretenden Reihen sicherzustellen, verlangen wir von $f(P)$ und $\Phi_k(P, t)$, dass die zweiten Ableitungen nach den Ortskoordinaten in K existieren und stetig sind [6]. Darüber hinaus müssen die $\Phi_k(P, t)$ einmal stetig nach t ($0 \leq t < \infty$) differenzierbar sein. Diese letzte Voraussetzung garantiert nämlich, wie man anhand der allgemeinen Lösungsform des 3. Randwertproblems der Potentialtheorie [7] leicht verifiziert, die stetige Differenzierbarkeit der $H_k(P, t)$ nach t . Es gilt demzufolge die wichtige Relation

$$\left| \frac{dB_{\mu}^{(k)}(\tau)}{d\tau} \right| = \left| \int_K \frac{\partial H_k(P, \tau)}{\partial \tau} u_{\mu}(P) dv \right| < M \quad (k = 1, 2, \dots, r) \quad (9)$$

für $0 \leq \tau \leq \tau_0 < \infty$. Damit ist die Gültigkeit von Gleichung (7) für $0 \leq t < \infty$ gesichert, vorausgesetzt natürlich, dass sie für alle diese Werte der Zeit auch physikalisch sinnvoll ist. Man überzeugt sich leicht, dass die angegebene Lösung tatsächlich alle in (2) geforderten Eigenschaften hat. Von einer teilweisen Abschwächung der an die Funktionen $f(P)$, $\Phi_k(P, t)$ gestellten Forderungen sehen wir ab, weil in den weitaus meisten praktischen Fällen diese an sich beliebigen Funktionen durch solche approximiert werden können, die den formulierten Bedingungen genügen.

Jetzt wenden wir uns der Bestimmung der quasistationären Temperaturverteilung $\bar{T}(P, t)$ zu. Ein Blick auf (7) zeigt, dass die erste Summe mit wachsender Zeit t beliebig klein wird. Daraus folgt aber sofort die Unabhängigkeit des quasistationären Zustandes von der Anfangstemperaturverteilung $f(P)$. Dasselbe gilt für die erste Summe in der geschweiften Klammer. Dies besagt nach der physikalischen Interpretation von (7) [2], dass die Einflussgrößen der Anfangstemperaturen $\Phi_k(P, 0)$ der umgebenden Medien ebenfalls keine Bedeutung für $\bar{T}(P, t)$ haben. Daher muss lediglich noch der Ausdruck

$$\sum_{k=1}^r \left\{ \int_0^t \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{dB_{\mu}^{(k)}(\tau)}{d\tau} u_{\mu}(P) e^{-a^2 \delta_{\mu}^2 (t-\tau)} d\tau - H_k(P, t) \right\} \quad (10)$$

untersucht werden. Auf Grund unserer Voraussetzungen und der zusätzlichen Forderung

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\Phi_k(P, t)| \leq m \quad (k = 1, 2, \dots, r) \quad (11)$$

ergibt sich unmittelbar, dass die $H_k(P, t)$ und somit ebenfalls die $B_\mu^{(k)}(\tau)$ für t bzw. $\tau \rightarrow \infty$ beschränkt bleiben. Darüber hinaus gilt dann (9) auch für $\tau \rightarrow \infty$. Weil die Steuerfunktionen $\Phi_k(P, t)$ ohnehin eine gewisse Grösse (Schmelzpunkt, Entzündungstemperatur, absoluter Nullpunkt) nicht überschreiten dürfen, wenn die Fragestellung physikalisch sinnvoll sein soll, bedeutet die Bedingung (11) keine Einschränkung der Allgemeinheit. Für grosse Werte der Zeit t wird nun

$$\left| \int_0^t \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{dB_\mu^{(k)}(\tau)}{d\tau} u_\mu(P) e^{-a^2 \delta_\mu^2(t-\tau)} d\tau \right| < \frac{M}{a^2} \left| \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{u_\mu(P)}{\delta_\mu^2} \right|.$$

Daraus folgt aber sofort die Existenz von

$$\bar{T}(P, t) = \left[\lim_{t \rightarrow \infty} \right] \sum_{k=1}^r \left\{ \int_0^t \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{dB_\mu^{(k)}(\tau)}{d\tau} u_\mu(P) e^{-a^2 \delta_\mu^2(t-\tau)} d\tau - H_k(P, t) \right\}. \quad (12)$$

Hierbei deutet das Symbol $\left[\lim_{t \rightarrow \infty} \right]$ an, dass in dem nachfolgenden Ausdruck alle Glieder zu vernachlässigen sind, die mit wachsender Zeit t beliebig klein werden und nicht etwa der Grenzübergang $t \rightarrow \infty$ schlechthin auszuführen ist.

Nunmehr können wir das Ergebnis der eingangs formulierten Aufgabe allgemein angeben. Es lautet:

Sind die Steuerfunktionen $\Phi_k(P, t)$ zweimal stetig nach den Ortskoordinaten und einmal stetig nach der Zeit t differenzierbar und bleiben sie darüber hinaus für $t \rightarrow \infty$ beschränkt, dann existiert ein quasistationärer Temperaturzustand $\bar{T}(P, t)$. Um $\bar{T}(P, t)$ zu berechnen, bestimmt man zunächst die r von dem Parameter τ abhängigen stationären Temperaturverteilungen $H_k(P, \tau)$ aus (5). Danach löst man die r vollhomogenen ebenfalls von dem Parameter τ abhängigen Wärmeleitaufgaben (6). Jetzt bildet man den Ausdruck (10), führt die Integration aus und vernachlässigt alle Glieder, die mit wachsender Zeit t beliebig klein werden. Das Resultat stellt dann die gesuchte Temperaturverteilung $\bar{T}(P, t)$ dar.

Abschliessend sei erwähnt, dass aus dem allgemeinen Ergebnis eine ganze Reihe spezielle Lösungen abgeleitet werden können. Wir beschränken uns hier auf Steuerfunktionen der Form

$$\Phi_k(P, t) = \chi_k(P) \varphi_k(t).$$

In diesem Fall wird

$$G_k^*(P, \tau, t - \tau) = \varphi_k(\tau) G_k(P, t - \tau)$$

gesetzt. Die Gleichungen (3), (5) und (6) gehen dann über in

$$\left. \begin{aligned} T(P, t) &= T_0(P, t) \\ &+ \sum_{k=1}^r \left\{ \varphi_k(0) G_k(P, t) + \int_0^t \frac{d\varphi_k(\tau)}{d\tau} G_k(P, t - \tau) d\tau - \varphi_k(t) H_k(P) \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta H_k(P) &= 0, \quad L\{H_k(P)\}_{F_i} = -\delta_{ik} \chi_k(P), \\ (i &= 1, 2, \dots, r; \quad k = 1, 2, \dots, r), \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} D\{G_k(P, t)\} &= 0, \quad G_k(P, 0) = H_k(P), \\ L\{G_k(P, t)\}_F &= 0, \quad t > 0 \quad (k = 1, 2, \dots, r). \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Für $\bar{T}(P, t)$ gilt jetzt somit

$$\bar{T}(P, t) = \left[\lim_{t \rightarrow \infty} \right] \sum_{k=1}^r \left\{ \int_0^t \frac{d\varphi_k(\tau)}{d\tau} \sum_{\mu=1}^{\infty} B_{\mu}^{(k)} u_{\mu}(P) e^{-a^2 \delta_{\mu}^2(t-\tau)} d\tau - \varphi_k(t) H_k(P) \right\}. \quad (16)$$

Man erkennt, dass in diesem Fall die Randwertprobleme (14) und (15) nicht mehr von dem Parameter τ abhängen.

4. Beispiel

Als Beispiel wählen wir das von V. VODIČKA auf andere Art behandelte Problem. Dieses lautet in unserer Bezeichnungsweise, wenn (r, φ, z) Zylinderkoordinaten sind,

$$\begin{aligned} D\{T\} &= \frac{\partial T}{\partial t} - a^2 \Delta T \\ &= \frac{\partial T}{\partial t} - a^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = 0, \end{aligned}$$

$$T(r, \varphi, z, 0) = f(r, \varphi, z),$$

$$\left. \begin{aligned} L\{T\}_{F_1} &= \left(\frac{\lambda}{\alpha_1} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + T \right)_{r=R} = \chi_1(\varphi, z) e^{i\omega_1 t}, \\ L\{T\}_{F_2} &= \left(\frac{\lambda}{\alpha_2} \cdot \frac{\partial T}{\partial z} + T \right)_{z=s} = \chi_2(r, \varphi) e^{i\omega_2 t}, \\ L\{T\}_{F_3} &= \left(-\frac{\lambda}{\alpha_3} \cdot \frac{\partial T}{\partial z} + T \right)_{z=-s} = \chi_3(r, \varphi) e^{i\omega_3 t}, \end{aligned} \right\} t > 0, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Man sieht sofort, dass die Steuerfunktionen die spezielle Form

$$\Phi_k(P, t) = \chi_k(P) \varphi_k(t)$$

haben und alle Voraussetzungen erfüllt sind, um die geschilderte allgemeine Methode anwenden zu können. Wir bestimmen deshalb, da wir uns nur für den quasistationären Zustand interessieren, nach (14) vorerst die $H_k(P) = H_k(r, \varphi, z)$ ($k = 1, 2, 3$). Mittels bekannter Lösungsmethoden finden wir

$$H_1 = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [a_{l,n}^{(1)} \cos n \varphi + b_{l,n}^{(1)} \sin n \varphi] J_n(i k_l r) [\cos k_l z + \psi_l \sin k_l z], \quad i = \sqrt{-1},$$

mit

$$\left. \begin{array}{l} a_{l,n}^{(1)} \\ b_{l,n}^{(1)} \end{array} \right\} = \frac{-2 k_l \int_0^1 \int_0^{2\pi} \chi_1(\varphi, z) \begin{Bmatrix} \cos n \varphi \\ \sin n \varphi \end{Bmatrix} [\cos k_l z + \psi_l \sin k_l z] d\varphi dz}{\pi \left[i k_l J_n'(i k_l R) - J_n(i k_l R) \right] [2(1 + \psi_l^2) k_l s + (1 - \psi_l^2) \sin 2 k_l s]},$$

$$H_2 = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [a_{m,n}^{(2)} \cos n \varphi + b_{m,n}^{(2)} \sin n \varphi] J_n(\bar{k}_m r) [\bar{\Omega}_m^{(3)} \sinh \bar{k}_m z + \bar{\Omega}_m^{(3)} \cosh \bar{k}_m z]$$

mit

$$\left. \begin{array}{l} a_{m,n}^{(2)} \\ b_{m,n}^{(2)} \end{array} \right\} = \frac{-2 \int_0^R \int_0^{2\pi} \chi_2(r, \varphi) r J_n(\bar{k}_m r) \begin{Bmatrix} \cos n \varphi \\ \sin n \varphi \end{Bmatrix} dr d\varphi}{R^2 \pi \left[\left(1 - \frac{n^2}{\bar{k}_m^2 R^2} \right) J_n''(\bar{k}_m R) + J_n'(\bar{k}_m R) \right] [\bar{\Omega}_m^{(2)} \bar{\Omega}_m^{(3)} + \bar{\Omega}_m^{(2)} \bar{\Omega}_m^{(3)}]},$$

$$H_3 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [a_{m,n}^{(3)} \cos n \varphi + b_{m,n}^{(3)} \sin n \varphi] J_n(\bar{k}_m r) [\bar{\Omega}_m^{(2)} \sinh \bar{k}_m z - \bar{\Omega}_m^{(2)} \cosh \bar{k}_m z]$$

mit

$$\left. \begin{array}{l} a_{m,n}^{(3)} \\ b_{m,n}^{(3)} \end{array} \right\} = \frac{-2 \int_0^R \int_0^{2\pi} \chi_3(r, \varphi) r J_n(\bar{k}_m r) \begin{Bmatrix} \cos n \varphi \\ \sin n \varphi \end{Bmatrix} dr d\varphi}{R^2 \pi \left[\left(1 - \frac{n^2}{\bar{k}_m^2 R^2} \right) J_n''(\bar{k}_m R) + J_n'(\bar{k}_m R) \right] [\bar{\Omega}_m^{(2)} \bar{\Omega}_m^{(3)} + \bar{\Omega}_m^{(2)} \bar{\Omega}_m^{(3)}]}.$$

Dabei bedeutet der Strich an dem jeweils letzten Summenzeichen hier und im folgenden immer, dass alle Koeffizienten mit dem Index $n = 0; l, m$ beliebig durch zwei zu dividieren sind. Ferner ist unter J_n' die Ableitung der Bessel-Funktion J_n nach dem gesamten Argument zu verstehen. Alle in dieser Arbeit bezüglich der Bessel-Funktionen verwendeten Relationen findet man in der

Literatur [8]. Die k_l bzw. \bar{k}_m sind die Wurzeln der Eigenwertgleichungen

$$\frac{\frac{\lambda}{\alpha_2} k \sin k s - \cos k s}{\frac{\lambda}{\alpha_2} k \cos k s + \sin k s} + \frac{\frac{\lambda}{\alpha_3} k \sin k s - \cos k s}{\frac{\lambda}{\alpha_3} k \cos k s + \sin k s} = 0, \quad \frac{J_n(\bar{k} R)}{J'_n(\bar{k} R)} = -\frac{\lambda}{\alpha_1 R} \bar{k} R.$$

Schliesslich ist

$$\psi_l = \frac{\frac{\lambda}{\alpha_2} k_l \sin k_l s - \cos k_l s}{\frac{\lambda}{\alpha_2} k_l \cos k_l s + \sin k_l s} = -\frac{\frac{\lambda}{\alpha_3} k_l \sin k_l s - \cos k_l s}{\frac{\lambda}{\alpha_3} k_l \cos k_l s + \sin k_l s},$$

$$\begin{aligned} \Omega_m^{(\nu)} &= \left[\frac{\lambda}{\alpha_\nu} \bar{k}_m \sinh \bar{k}_m s + \cosh \bar{k}_m s \right] \\ \bar{\Omega}_m^{(\nu)} &= \left[\frac{\lambda}{\alpha_\nu} \bar{k}_m \cosh \bar{k}_m s + \sinh \bar{k}_m s \right] \end{aligned} \quad (\nu = 2, 3).$$

Für die $G_k(P, t) = G_k(r, \varphi, z, t)$ ($k = 1, 2, 3$) ergibt sich nunmehr nach (15)

$$G_k = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [A_{l,m,n}^{(k)} \cos n \varphi + B_{l,m,n}^{(k)} \sin n \varphi] J_n(\bar{k}_m r) \times [\cos k_l z + \psi_l \sin k_l z] e^{-a^2 (\bar{k}_l^2 + \bar{k}_m^2) t},$$

$$\left. \begin{aligned} A_{l,m,n}^{(1)} \\ B_{l,m,n}^{(1)} \end{aligned} \right\} = \frac{4 k_l \bar{k}_m J'_n(\bar{k}_m R) \int_0^{2\pi} \int_{-s}^s \chi_1(\varphi, z) \begin{Bmatrix} \cos n \varphi \\ \sin n \varphi \end{Bmatrix} [\cos k_l z + \psi_l \sin k_l z] d\varphi dz}{R \pi [k_l^2 + \bar{k}_m^2] \left[\left(1 - \frac{n^2}{\bar{k}_m^2 R^2} \right) J_n^2(\bar{k}_m R) + J_n'^2(\bar{k}_m R) \right] [2(1 + \psi_l^2) k_l s + (1 - \psi_l^2) \sin 2 k_l s]}$$

$$\left. \begin{aligned} A_{l,m,n}^{(2)} \\ B_{l,m,n}^{(2)} \end{aligned} \right\} = \frac{4 k_l^2 [\psi_l \cos k_l s - \sin k_l s] \int_0^R \int_0^{2\pi} \chi_2(r, \varphi) r J_n(\bar{k}_m r) \begin{Bmatrix} \cos n \varphi \\ \sin n \varphi \end{Bmatrix} dr d\varphi}{R \pi [k_l^2 + \bar{k}_m^2] \left[\left(1 - \frac{n^2}{\bar{k}_m^2 R^2} \right) J_n^2(\bar{k}_m R) + J_n'^2(\bar{k}_m R) \right] [2(1 + \psi_l^2) k_l s + (1 - \psi_l^2) \sin 2 k_l s]}$$

$$\left. \begin{aligned} A_{l,m,n}^{(3)} \\ B_{l,m,n}^{(3)} \end{aligned} \right\} = \frac{4 k_l^2 [\psi_l \cos k_l s + \sin k_l s] \int_0^R \int_0^{2\pi} \chi_3(r, \varphi) r J_n(\bar{k}_m r) \begin{Bmatrix} \cos n \varphi \\ \sin n \varphi \end{Bmatrix} dr d\varphi}{R \pi [k_l^2 + \bar{k}_m^2] \left[\left(1 - \frac{n^2}{\bar{k}_m^2 R^2} \right) J_n^2(\bar{k}_m R) + J_n'^2(\bar{k}_m R) \right] [2(1 + \psi_l^2) k_l s + (1 - \psi_l^2) \sin 2 k_l s]}$$

Jetzt bilden wir entsprechend (16) den Ausdruck für $\bar{T}(P, t) - \bar{T}(r, \varphi, z, t)$. Es wird

$$\bar{T} = \sum_{k=1}^3 e^{i\omega_k t} \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i\omega_k}{i\omega_k + a^2(\bar{k}_l^2 + \bar{k}_m^2)} [A_{l,m,n}^{(k)} \cos n\varphi + B_{l,m,n}^{(k)} \sin n\varphi] \times J_n(\bar{k}_m r) [\cos \bar{k}_l z + \psi_l \sin \bar{k}_l z] - H_k(r, \varphi, z) \right\}.$$

Damit ist das Problem in aller Vollständigkeit gelöst.

Zum Schluss zeigen wir, dass unser Ergebnis mit dem von VODIČKA angegebenen übereinstimmt. Nach den dortigen Ausführungen ist

$$\bar{T}(r, \varphi, z, t) = \sum_{k=1}^3 u_{k-1}(r, \varphi, z, t).$$

Wir beschränken uns hier darauf, die Gültigkeit der Relation

$$u_{k-1} = e^{i\omega_k t} \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i\omega_k}{i\omega_k + a^2(\bar{k}_l^2 + \bar{k}_m^2)} [A_{l,m,n}^{(k)} \cos n\varphi + B_{l,m,n}^{(k)} \sin n\varphi] \times J_n(\bar{k}_m r) [\cos \bar{k}_l z + \psi_l \sin \bar{k}_l z] - H_k(r, \varphi, z) \right\} \quad (*)$$

für $k=1$ nachzuweisen. Unter Verwendung unserer Schreibweise ergibt sich für u_0 nach den Überlegungen von VODIČKA

$$u_0 = e^{i\omega_1 t} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [C_{l,n}^{(1)} \cos n\varphi + D_{l,n}^{(1)} \sin n\varphi] J_n(i\varepsilon_l r) [\cos k_l z + \psi_l \sin k_l z]$$

mit

$$\left. \begin{array}{l} C_{l,n}^{(1)} \\ D_{l,n}^{(1)} \end{array} \right\} = \frac{2k_l \int_0^{2\pi} \int_{-s}^s \chi_1(\varphi, z) \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{Bmatrix} [\cos k_l z + \psi_l \sin k_l z] d\varphi dz}{\pi \left[\begin{array}{l} \lambda \\ \alpha_1 \end{array} \right] i\varepsilon_l J_n'(i\varepsilon_l r) + J_n(i\varepsilon_l r)} [2(1 + \psi_l^2) k_l s + (1 - \psi_l^2) \sin 2k_l s]$$

und

$$\varepsilon_l = \sqrt{\frac{i\omega}{a^2} + k_l^2}.$$

Weil die linke und rechte Seite der Gleichung (*) denselben Randbedingungen genügt, braucht die Äquivalenz beider Seiten lediglich noch für das Zylinderinnere nachgewiesen zu werden. Dort gilt aber für $\beta_l = \varepsilon_l$ bzw. $\beta_l = k_l$ die Entwicklung

$$J_n(i\beta_l r) = - \frac{2}{R} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\bar{k}_m J_n'(\bar{k}_m R) \left[\frac{\lambda}{\alpha_1} i\beta_l J_n'(i\beta_l R) + J_n(i\beta_l R) \right] J_n(\bar{k}_m r)}{[\beta_l^2 + \bar{k}_m^2] \left[\left(1 - \frac{n^2}{\bar{k}_m^2 R^2} \right) J_n^2(\bar{k}_m R) + J_n'^2(\bar{k}_m R) \right]}.$$

Führen wir nun die Ausdrücke für u_0 , H_1 , $a_{l,n}^{(1)}$, $b_{l,n}^{(1)}$, $A_{l,m,n}^{(1)}$, $B_{l,m,n}^{(1)}$, $C_{l,n}^{(1)}$, $D_{l,n}^{(1)}$ in (*) ein, dann ergibt sich unter Berücksichtigung dieser Entwicklung unmittelbar die Richtigkeit der Relation für $k=1$. Die Beziehungen für $k=2, 3$ beweist man ganz entsprechend.

Wir bemerken noch, dass sich unser Ergebnis sehr leicht in Real- und Imaginärteil aufspalten lässt. Die in $H_1(r, \varphi, z)$ auftretenden Grössen

$$\frac{J_n(i k_l r)}{\alpha_1 i k_l J'_n(i k_l R) + J_n(i k_l R)}$$

sind nämlich für $n=0, 1, 2, \dots$ immer reell, weil dies für $J_{2n}(i k_l r)$ und $i J_{2n+1}(i k_l r)$ gilt und ausserdem die Beziehung

$$J'_n(i k_l r) = \frac{1}{2} (J_{n-1}(i k_l r) - J_{n+1}(i k_l r))$$

besteht. Beachtet man dies, so bereitet die Aufspaltung keinerlei Schwierigkeiten.

Die Lösung des von CHOW behandelten Problems [3], die hier nicht weiter erörtert werden soll, folgt schliesslich aus (13). Dazu muss lediglich noch $T_0(r, \varphi, z, t)$ aus (4) bestimmt werden, worauf wir jedoch verzichten wollen.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] V. VODIČKA, *Circular Cylinder Under Periodic Fluctuations of Temperature*, Z. angew. Math. Phys. 8, 1 (1957).
- [2] H. JÄCKEL, *Mathematische Behandlung gesteuerter Abkühl- und Anwärmvorgänge*, Ing.-Arch. 26, 2 (1958).
- [3] T.-S. CHOW, *On a Problem of Heat Conduction with Time-Dependent Boundary Conditions*, Z. angew. Math. Phys. 8, 6 (1957).
- [4] GRÖBER, ERK und GRIGULL, *Wärmeübertragung*, Teil I C, 2 (Berlin, Göttingen und Heidelberg 1955).
- [5] A. KNESCHKE, *Über gesteuerte Abkühl- und Anwärmvorgänge bei festen Körpern*, Ing.-Arch. 24, 2 (1956).
- [6] R. COURANT und D. HILBERT, *Methods of Mathematical Physics*, I, chap. 5 (New York and London 1953).
- [7] E. GOURSAT, *Cours d'Analyse Mathématique*, III, chap. 33 (Paris 1942), S. 524.
- [8] G. N. WATSON, *Theory of Bessel Functions* (Cambridge 1952).

Summary

In a recent paper VODIČKA solves a special problem of heat conduction with local and time-dependent boundary conditions. As the method does not seem very suitable for solving problems of this kind, the solution for the most general case is given. As an example the problem treated by VODIČKA is solved, and the equality of both results is shown.

(Eingegangen: 20. Mai 1958.)

Zur Aerodynamik von Hagelkörnern

Von ROLAND LIST, Weissfluhjoch-Davos¹⁾

1. Einleitung

Dem zunehmenden Interesse an Vorgängen der Hagelentstehung entsprechend, sind in den vergangenen Jahren verschiedene Theorien über das atmosphärische Wachstum von Eiskörnern publiziert worden (siehe zum Beispiel [1–4]²⁾). Die dabei gemachten Annahmen über Kornformen, Luftwiderstandskoeffizienten und Fallgeschwindigkeiten basieren alle auf Verhältnissen für glatte Kugeln. Daraus ergeben sich jedoch Resultate, die normalerweise von den tatsächlichen Umständen erheblich abweichen. – Um solchen Wachstumstheorien bezüglich der Aerodynamik von Hagelkörnern eine bessere Grundlage zu geben, seien in der Folge Messungen an natürlichen Eisschlossen und Modellkörpern beschrieben.

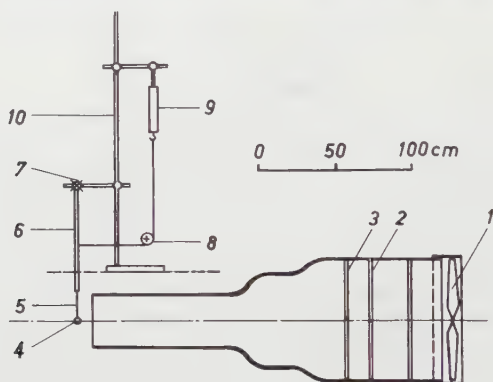
2. Messapparatur und Messmethodik

Die Messungen der Luftkräfte auf Modellkörper oder Hagelkörner wurden im bereits früher erwähnten Windkanal [5] in einem Kältelaboratorium des Eidgenössischen Institutes für Schnee- und Lawinenforschung vorgenommen. Der Aufbau des Versuchskanals ist aus Figur 1 ersichtlich und zeigt, dass die angesaugte Luft mit einem Ventilator, angetrieben durch einen Zweiphasen-Kurzschlussankermotor von 1,1 PS Leistung, in einen Leitstern und ein Leitgitter getrieben wird. Zwei sich folgende Venturidüsen sorgen für die nötige Beschleunigung und Geschwindigkeitsverteilung im eigentlichen Messteil. Die maximal erreichbare Geschwindigkeit beträgt rund 25 m/s. Als weiteres Charakteristikum des Kanals sei erwähnt, dass bei einer Reynoldsschen Zahl $Re = 5,1 \cdot 10^4$ der Widerstandsbeiwert c_w einer glatten Kugel $0,45 \pm 0,02$ beträgt. (Das kritische Gebiet mit dem Abfall des Widerstandskoeffizienten einer Kugel und dem zu $c_w = 0,3$ zugehörigen Re kann infolge ungenügender Ventilatorleistung nicht ermittelt werden.) Das zu untersuchende Objekt wird auf ein Stahlstängelchen mit einem Durchmesser von 3 mm starr befestigt; dieses wiederum kann in ein Messingrohr eingeschraubt werden. Die Aufhängung desselben erfolgt gelenkig, so dass eine Verschiebung des auszumessenden Körpers

¹⁾ Eidgenössisches Institut für Schnee- und Lawinenforschung.

²⁾ Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 158.

auf einem Kreisbogen in Richtung des Luftstromes möglich ist. Da das Messingrohr in sich verdrehbar ist, können im Abstand von $22,5^\circ$ verschiedene Expositionen des Objektes um die gewählte Drehachse eingestellt werden. Zur Messung der Luftkräfte wird eine Federwaage eingesetzt, die unter Berücksichtigung des Hebelgesetzes den gewünschten Luftwiderstand ergibt. Die Waage wird jeweils so verschoben, dass die Aufhängevorrichtung lotrecht 1 cm vor der



Figur 1

Schematische Darstellung des Versuchskanals: 1 Ventilator; 2 Leitgitter; 3 Leitstern; 4 Untersuchungsobjekt; 5 Haltestängelchen; 6 Messingrohr; 7 Hebelgelenk; 8 Umlenkrolle; 9 Federwaage; 10 Stativ.

Kanalöffnung steht. – Als Korrektur ist jeweils der Luftwiderstand des von der Strömung betroffenen Haltestängelchens (ohne den im Objekt eingeschlossenen Teil) in Abzug zu bringen.

Diese Aufhängung hat zur Folge, dass ein auf das auszumessende Korn ausgeübtes Drehmoment um eine Achse parallel dem Gelenk der Aufhängung mitgemessen wird. Infolge der Länge des Hebelarmes (85 cm) und den maximal beobachteten Drehmomenten von der Größenordnung $1 \text{ g} \cdot \text{cm}$ ist jedoch dieser Effekt bedeutungslos.

Die zu untersuchenden Hagelkörner werden auf dem Haltestängelchen eingefroren, nachdem dessen Spitze auf Rotglut erhitzt in das Objekt hineingeführt wurde. Allfällig entstehende Vertiefungen in der Eisoberfläche können mit zusätzlichem Wasser auf die ursprüngliche Form gebracht werden. – Holzmodelle werden auf die Halterung aufgesteckt.

Bei der Fixierung der Körner ist jeweils darauf zu achten, dass die Achse der Aufhängung mit einer Achse des das Objekt umhüllenden kleinsten Ellipsoides zusammenfällt. Die extremsten Verhältnisse werden damit am ehesten erfasst. Während bei Hagelkörnern normalerweise alle drei «Hauptachsen» auszumessen sind, genügt es, bei den rotationssymmetrischen Graupelmodellen nur eine Achse senkrecht zur Symmetrieachse zu betrachten.

Die Bestimmung des Widerstandskoeffizienten c_w erfolgt nach dem Gesetz:

$$W = c_w \frac{\rho_L v_\infty^2}{2} F. \quad (1)$$

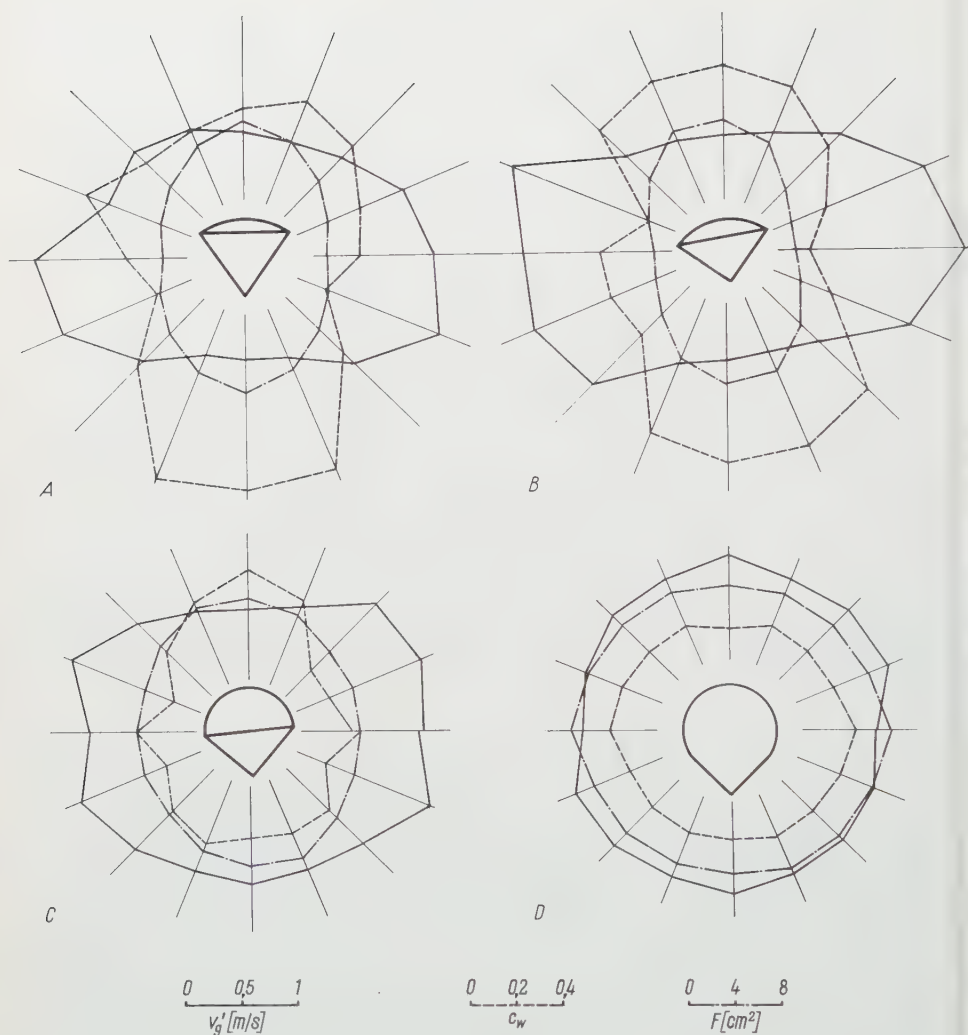
Der Luftwiderstand W wird mit der Federwaage gemessen, die Geschwindigkeit v_∞ mit einem Prandtl-Rohr. Die zu jedem c_w gehörende Projektionsfläche F des Objektes in eine Ebene senkrecht zur Bewegungsrichtung wird ermittelt über eine Photographie eines in der Windkanalachse aufgestellten Photoapparates. Die Luftdichte ρ_L ergibt sich aus Lufttemperatur und Luftdruck.

Da es sich zeigte, dass der Widerstandskoeffizient im Geschwindigkeitsbereich von 14 bis 20 m/s nicht variiert, wurde dessen Grösse durch Mittelung zweier Messungen an den Grenzen dieses Bereiches berechnet; viel grössere Geschwindigkeiten konnten mit dem Windkanal nicht erreicht werden, bei kleineren war die Genauigkeit und Empfindlichkeit des Meßsystems ungenügend. So darf angenommen werden, dass der absolute Fehler der bestimmten Widerstandskoeffizienten $\pm 5\%$ nicht überschreitet.

Bei den Versuchen musste die Zeitdauer der einzelnen Messreihen möglichst beschränkt werden, um ein allzu grosses Verdunsten der Hagelkörner im Windkanal einzudämmen. Zum gleichen Zwecke wurden die Objekte mit Polyvinylformal, dem Schäferschen Replica-Material [6], eingehüllt (Schichtdicke etwa 0,02 mm), so dass jeweils nur eine Gewichtsverminderung von ungefähr 4% eintrat.

3. Entwicklungsstadien eines grossen Hagelkornes

In der Publikation *Kennzeichen atmosphärischer Eispartikeln*, Teil 1 [7], wurde bereits auf den Hauptweg der Entstehung der Hagelkörner hingewiesen mit den Phasen Eisbildungskern-Schneekristall-Reifgraupel-(Wassertropfen)-Frostgraupel-Hagelkorn. Eine prinzipielle aerodynamische Betrachtung der einzelnen Stadien ist jedoch nur sinnvoll, wenn nicht zu viele Hauptformen parallel nebeneinander bestehen. Der grossen Variation im Aussehen entsprechend, wird also nicht auf Eisbildungskerne und Schneekristalle eingegangen. Reifgraupeln wiederum sind erst interessant von der Grösse an, wo der Habitus des ursprünglichen Schneeteilchens nicht mehr deutlich sichtbar ist, das heisst von einer Grösse von rund 3 mm an. Aus verschiedenen Messungen und Beobachtungen (zum Beispiel [7]) wissen wir, dass die Mehrzahl der grossen Reifgraupeln einen kugelsektorartigen Habitus aufweist. So wurden denn zwei unpolierte Holzmodelle nach der oben beschriebenen Methode im Windkanal ausgemessen. Die Resultate sind dargestellt in Figur 2 A und B, wobei Hauptspannt, Widerstandskoeffizient und Fallgeschwindigkeit als Radiusvektoren in der Luftstromrichtung vom Nullpunkt weg aufgetragen sind. Bild A gibt die Resultate wieder für ein Modellkorn mit einem Kegelöffnungswinkel von 70°,



Figur 2

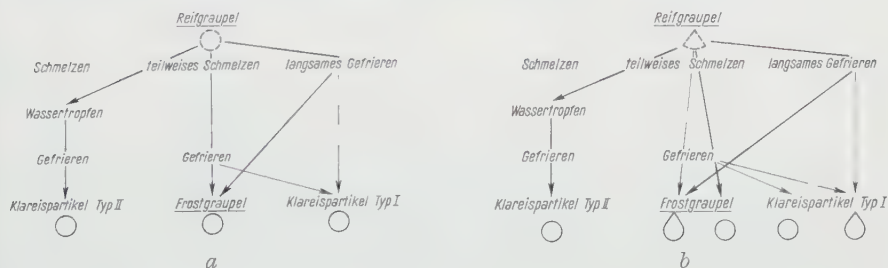
Hauptspannte (F), Widerstandskoeffizienten (c_w) und relative Fallgeschwindigkeiten (v'_g) von Modellgraupeln in Funktion der Fall-Lage.

während dieser für Bild B 90° beträgt. Generell wurden bezüglich der Kornachse symmetrische Werte gemessen, Abweichungen traten nur auf, wo infolge von Kornschwingungen eine genaue Messung nicht möglich war. Der Vergleich zeigt, dass der Widerstand in der Hauptachsenrichtung abhängig ist vom «Abreisswinkel» der Strömung an der ausgeprägten Körperkante.

Aus der Gesamtheit der Widerstandskoeffizienten interessiert uns jedoch nur der Widerstandskoeffizient für stabile Lage bei freiem Fall. L. v. BUCH [8] beobachtete bereits 1814, dass Reifgraupeln mit der Spitze nach hinten fallen. Darlegungen von ARENBERG [9] scheinen jedoch auch ein Fallen mit entgegengesetzter Lage zu ermöglichen – eine Ansicht, die ein Experiment jedoch nicht bestätigte. Bei Graupelfällen im Freien wurden nämlich Reifpartikeln in einer Glasschale mit einer Wasserschicht von 5 cm Dicke aufgefangen; der gebremste Fall verifizierte in jedem Fall die erste Behauptung.

Für den freien Fall von Reifgraupeln kommen also Widerstandskoeffizienten von rund 1,0 in Betracht. Dies entspricht auch den Resultaten von NAKAYA [10], die umgerechnet analoge Werte ergeben. Wenn wir nun, wie verschiedene Autoren – zum Beispiel [3] – in Unkenntnis der Hauptkornformen Kugeln betrachten, so ergibt sich für diese bei gleichem Volumen und gleicher Dichte, wie sie eine kegelige Reifgraupel vom Typ A aufweise, eine um 87% höhere Fallgeschwindigkeit (!). Da die Modelle eine geringere Rauigkeit aufweisen als natürliche Reifpartikel, so erhöht sich dieser Wert in Wirklichkeit noch. Die Zuverlässigkeit der theoretischen Berechnungen muss also füglich bezweifelt werden!

Sobald die auf eine Reifgraupel auftreffenden kleinen Wassertropfen nicht mehr relativ schnell gefrieren, hat das Wasser Zeit, in die Kapillarsysteme des lockeren Reifgerüsts einzudringen. Es entsteht eine Frostgraupel, deren Charakter nach Modell C (Figur 2) gegen die Form D wechselt und zur Kugel wird. Figur 3a zeigt, wie bei allen kugeligen Reifgraupeln bei der Umwandlung die



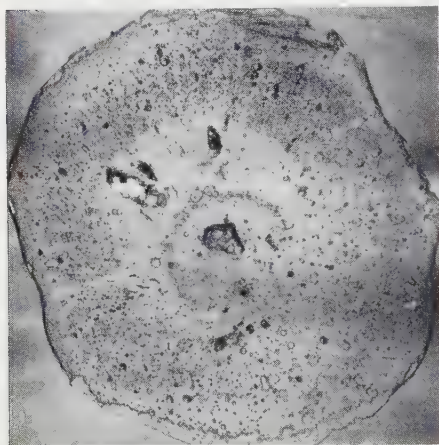
Figur 3

Entwicklungstendenzen von Reifgraupeln: a ausgehend vom kugeligen Korn, b ausgehend vom kegeligen Korn.

Form erhalten bleibt, währenddem bei den meisten kegeligen die Tendenz zur Kugel vorherrscht (Figur 3b). Die stark hervorgehobenen Linien zeigen die häufigsten Varianten.

Eine Deutung der stabilen Fallagen ist für die Frostgraupelstadien nicht mehr allgemein verbindlich, da auch die Dichteverteilung stark variieren kann.

Es ist nur die Aussage möglich, dass bei glatter, das heisst klarer Oberfläche der Widerstandskoeffizient gegen den der Kugel strebt. – Für die Fortsetzung des Wachstums lehrt die Erfahrung, dass in der Natur keine glatten kugeligen Hagelkörner mit Durchmessern über 10 bis 15 mm auftreten. Der Einfluss der Oberflächenspannung muss dem Einfluss der Aerodynamik weichen, der das für klares Eiswachstum notwendige freie Wasser an die Kornperipherie treibt. Dadurch entstehen Rotationsellipsoide, deren Widerstandskoeffizienten bereits durch PRANDTL [11] gemessen wurden (siehe Figur 11).



Figur 4

Korn K 57.A, Dünnschnitt D 1 in durchscheinendem Licht (1:0,67).



Figur 5

Korn 57.A, Dünnschnitt D 1 bei polarisiertem Licht (1:0,67).

Ein Wechsel zu schnellem Eiswachstum ergibt eine neue Formvariante: dreiachsige, ellipsoidische Typen (siehe auch [12]). Dieser Hauptweg der Entwicklung grosser Hagelkörner aus rund 50 Sammelproben schwerer Hagelwetter kann besonders schön verfolgt werden aus den Figuren 4 und 5, die einen 0,3 mm dicken Dünnschnitt von Korn 57.A in durchscheinendem und polarisiertem Licht wiedergeben. Die Ursprungspartikel kugeligere Form zeigt im polarisierten Licht eine kegelige Struktur – sie ist also aus einer kegeligen Reifgraupel entstanden. Dass nach der Umwandlung in eine Frostgraupel diese immer noch mit dem Ort der ursprünglichen Spitze nach hinten fiel, geht aus dem angesetzten Blasenkranz hervor, der an der Kegelbasis wuchs und nicht das ganze Teilchen umschliesst. Die dadurch erfolgte «Auswuchtung» des Partikels liess die Fallage ändern, sehr wahrscheinlich sogar instabil machen. Die nächste Phase ergibt sich durch die Vergrösserung zum Rotationsellipsoid. An dieses angelagert ist eine Zone geringerer Dichte, die ursprünglich nur aus Pro-

tuberanzen bestand, wie sich aus den dazwischenliegenden Klareiskanälen folgern lässt. Die Körperumhüllende kann als beidseitig in der kleinsten Achse eingedrücktes Ellipsoid bezeichnet werden. Dieser Wachstumsphase überlagerte sich jedoch örtlich eine zweite, was zur Auffüllung des ursprünglich lockeren Eisgerüsts führte.

In jedem dieser Zwischenstadien kann jedoch die symmetrische Form in eine unregelmässige oder kugelartige übergehen, je nach den Wachstumsbedingungen. Das heisst also, dass der Habitus der Hagelkörner nicht zufällig ist. *Die resultierende Kornform ist charakteristisch für die Wachstumsbedingungen, die die Hagelschlosse im Laufe ihrer Entstehung durchlaufen hat.* Diese Formbeziehung ist jedoch auch grössenabhängig.

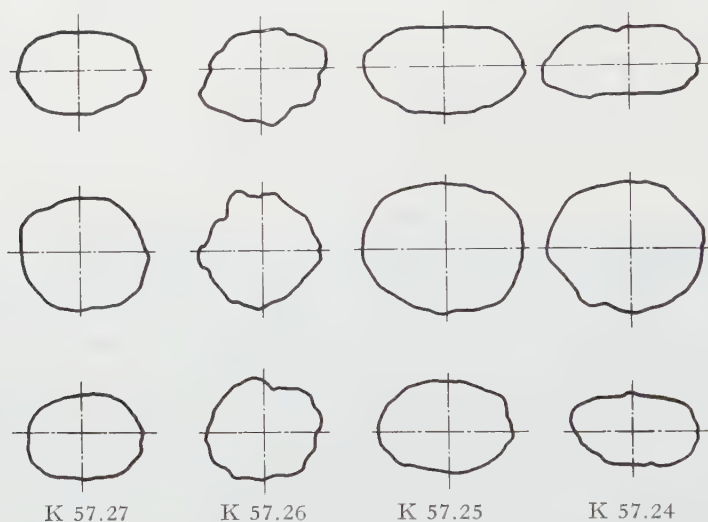
Die Luftkräfte, die auf diese ellipsoidischen und unregelmässigen Hauptformen wirken, sollen nun im nächsten Abschnitt dargestellt werden.

4. Luftkräfte auf Hagelkörner

Es wurden folgende vier Haupttypen aus verschiedenen schweren Hagelwettern herausgenommen und ausgemessen:

- Korn K 57.24. Form: beidseitig in Richtung der kleinsten Achse eingedrücktes Ellipsoid (siehe auch [7]).
Oberfläche: relativ glatt.
Gewicht: 24,3 g*.
Spez. Gewicht: 0,908 g*/cm³.
Hauptachsenverhältnis (ohne Berücksichtigung der Einschnürrung): 1,0:0,79:0,44.
- Korn K 57.25. Form: einseitig in Richtung der kleinsten Achse eingedrücktes Ellipsoid.
Oberfläche: glatte Protuberanzen.
Gewicht: 32,4 g*.
Spez. Gewicht: 0,86 g*/cm³.
Hauptachsenverhältnis (ohne Berücksichtigung der Einschnürrung): 1,0:0,78:0,55.
- Korn K 57.26. Form: kugelartig.
Oberfläche: rauh mit Protuberanzen.
Gewicht: 18,59 g*.
Spez. Gewicht: 0,87 g*/cm³.
- Korn K 57.27. Form: dreiachsiges Ellipsoid.
Oberfläche: rauh.
Gewicht: 23,3 g*.
Spez. Gewicht: 0,88 g*/cm³.
Hauptachsenverhältnis: 1,0:0,77:0,64.

Die Umrisse der vier Körner, jedes aus den drei Hauptachsenrichtungen betrachtet, sind in Figur 6 dargestellt.



Figur 6

Umriss von Hagelkörnern, beobachtet aus den drei Hauptachsenrichtungen:

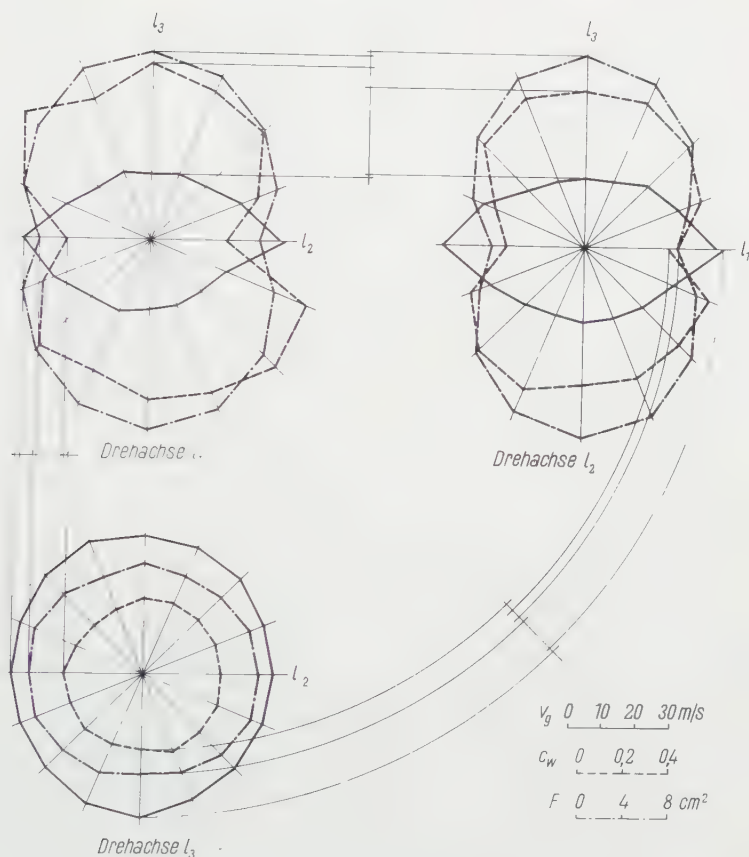
Erste Reihe: Kornachse l_2 senkrecht zur Bildebene;

zweite Reihe: Kornachse l_3 senkrecht zur Bildebene;

dritte Reihe: Kornachse l_1 senkrecht zur Bildebene.

(1:2,5)

Die Messergebnisse sind den Figuren 7–10 zu entnehmen, wobei wiederum zu beachten ist, dass Hauptspannt, Widerstandskoeffizient und zugehörige extrapolierte Fallgeschwindigkeit je als Radiusvektoren in der Luftstromrichtung vom Nullpunkt weg aufgetragen sind. Konsequenterweise wird dabei die längste Kornachse als Drehachse l_1 , die kürzeste als Drehachse l_3 bezeichnet. Zur Kontrolle der Messungen können jeweils auch die Werte, die sich bei gleicher Anströmrichtung (in Richtung der Hauptachsen!) einstellen, verglichen werden. Von den sechs möglichen Kombinationen sind 3 in den entsprechenden Figuren 7 bis 10 eingezeichnet. Die Abweichungen bedeuten jedoch nicht unbedingt Messfehler, sie rühren eher davon her, dass die Hauptachsen nicht ganz senkrecht zueinander getroffen wurden. Dass eine ungenaue Festlegung der Nullstellung auch grössere Differenzen ergeben kann, geht speziell aus Figur 8, Drehachse l_2 , hervor. (Normalerweise wurde die Nullstellung ermittelt durch folgendes Vorgehen: In das Versuchsobjekt wird ein rechtsdrehendes Koordinatensystem gelegt, die Austrittspunkte der positiven Achsen werden markiert. Das Aufgefrieren erfolgt jeweils in der Achsenrichtung durch einen so bezeichneten



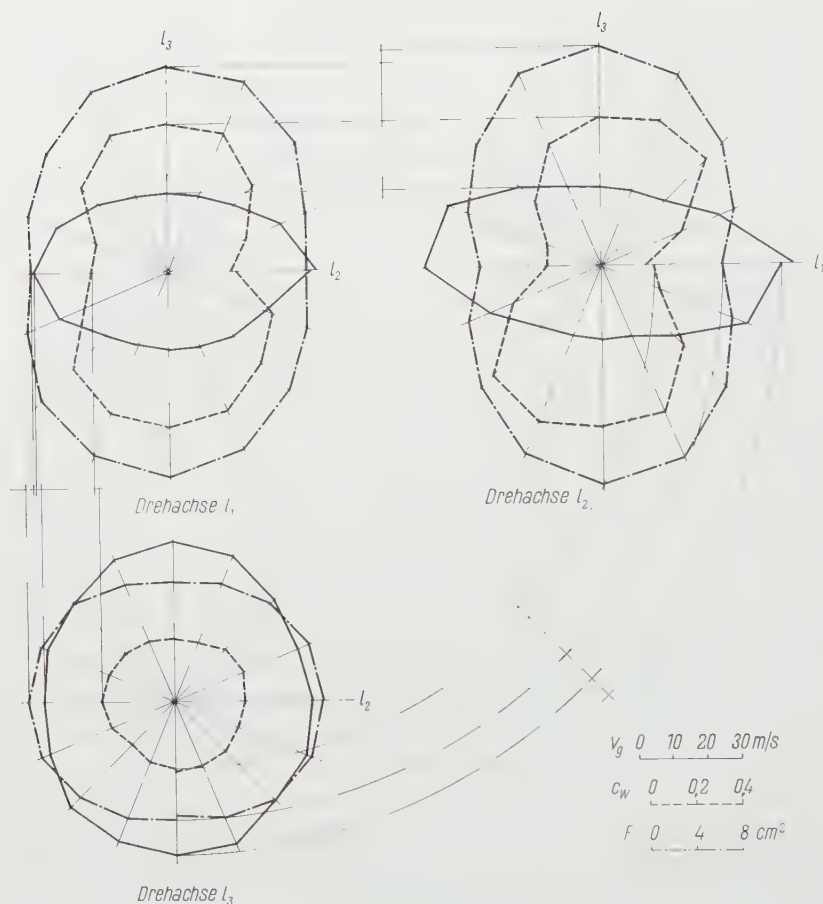
Figur 7

Korn K 57.24, räumliche Verteilung der Hauptspannte, Widerstandskoeffizienten und Fallgeschwindigkeiten.

Punkt. Die Ausgangsstellung 0° ergibt sich durch Drehen der längsten «freien» Achse in Richtung des Luftstromes).

Widerstandskoeffizienten und Fallgeschwindigkeiten der verschiedenen Körner bei ausgezeichneten Anströmrichtungen seien in Tabelle 1 zusammengestellt (siehe auch Figur 6). Ein Vergleich der von vorn und von hinten angeströmten Objekte zeigt, dass eine Verdrehung um 180° speziell bei unregelmässigen Hagelschlossen sehr unterschiedliche Widerstandskoeffizienten und Fallgeschwindigkeiten ergeben kann! – Ein Einfluss der verschiedenartigen Einschnürungen ist jedoch nicht zu ermitteln.

Die beobachteten beträchtlichen Differenzen der Resultate je nach der Anströmrichtung lassen sofort die Frage nach der stabilen Lage bei freiem Fall

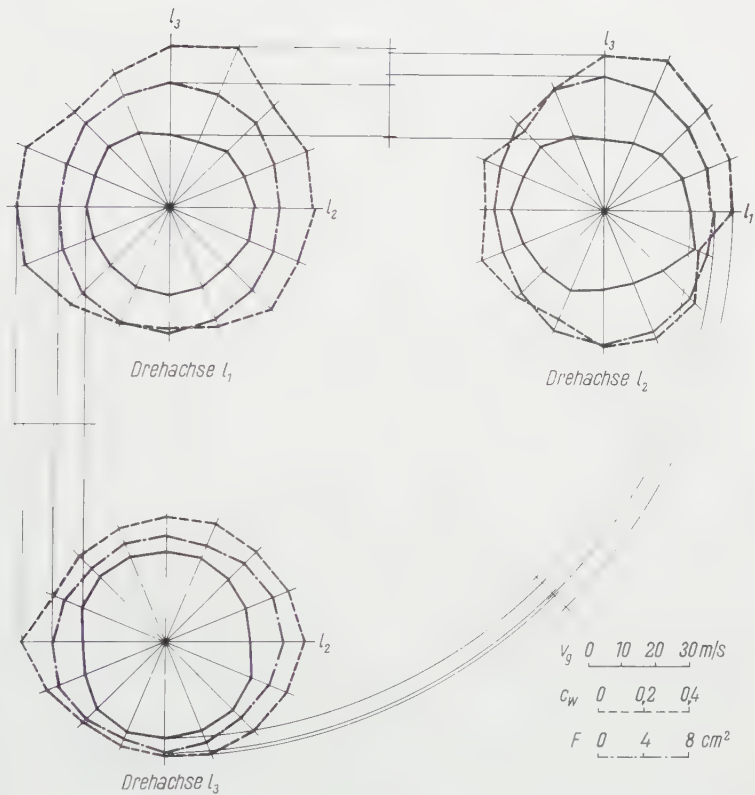


Figur 8

Korn K 57.25, räumliche Verteilung der Hauptspannte, Widerstandskoeffizienten und Fallgeschwindigkeiten.

auftreten. Da die Beantwortung auf Grund der Messung der Luftkräfte nicht gemacht werden kann und Messungen über Drehmomente fehlen, wurde der Fallversuch im Wassertank herbeigezogen. Dieser ergab unter Berücksichtigung der Reynoldsschen Ähnlichkeit für den freien Fall in Luft, dass die ellipsoidischen Objekte stets mit der kleinen Achse lotrecht fallen! Ein- oder beidseitige Einbuchtungen in Richtung dieser Achse beeinflussen diese Tatsache nicht.

Ein Einfluss der Achsenverhältnisse (speziell l_1/l_3) auf den grössten Widerstandskoeffizienten zeichnet sich nicht ab, da die Körner infolge ihres verschiedenen Oberflächencharakters nicht ohne weiteres vergleichbar sind. Es



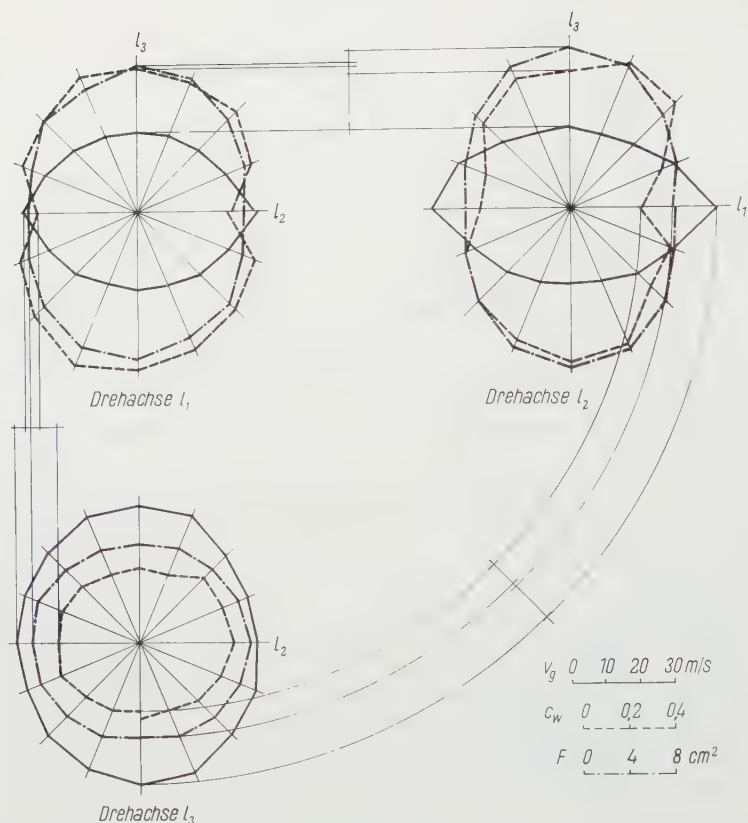
Figur 9

Korn K 57.26, räumliche Verteilung der Hauptspannte, Widerstandskoeffizienten und Fallgeschwindigkeiten.

Tabelle 1

Widerstandskoeffizienten und Fallgeschwindigkeiten von Hagelkörnern bei ausgezeichneten Anströmrichtungen

Korn K	57.24	57.25	57.26	57.27
Kornachse l_1 mit Strom gegen Strom	c_w 0,36 v_g 40,8	c_w 0,26 v_g 50,0	c_w 0,54 v_g 27,1	c_w 0,31 v_g 41,7
	0,35 41,5	0,26 49,6	0,53 26,9	0,36 40,2
Kornachse l_2 mit Strom gegen Strom	0,33 38,8 0,35 37,7	0,30 42,1 0,33 39,4	0,62 24,8 0,64 24,3	0,42 34,4 0,40 35,2
Kornachse l_3 mit Strom gegen Strom	0,73 19,9 0,65 21,1	0,65 23,2 0,70 22,4	0,70 21,4 0,57 24,2	0,62 23,7 0,69 22,5



Figur 10

Korn K 57.27, räumliche Verteilung der Hauptspannte, Widerstandskoeffizienten und Fallgeschwindigkeiten.

ist aber anzunehmen, dass sich dieser Beiwert mit zunehmendem Scheibencharakter bis 1,15 und mehr vergrößert [11]. (Die Grösse des Widerstandsbeiwertes wird bei unregelmässigen Körnern auch beeinflusst durch das Verhältnis Querschnittumfang zu Querschnittfläche, wodurch die c_w -Werte für Scheiben noch überschritten werden können.)

Zur Errechnung der Korngeschwindigkeit bei freiem Fall (auf Institutshöhe von 2665 m ü. M.) wurde angenommen, dass der Widerstandskoeffizient bis zu Reynoldsschen Zahlen von $2 \cdot 10^5$ konstant bleibt. Diese Extrapolation ist jedoch nur nötig für Fallagen, die in der Natur nicht stabil sind, die für uns also nur vergleichenden Charakter haben. Die Verhältnisse für stabile Fallagen konnten mit dem Windkanal gerade noch erfasst werden und sind damit verbindlich. Da bei schweren Hagelfällen mit über 3 cm Partikelgrösse rund

Tabelle 2

Vergleich der effektiven mit der theoretischen Fallgeschwindigkeit von Hagelkörnern

	$v_{\text{Hagelkorn}}$ m/s	v_{Kugel} m/s	Abweichung Δv %
Hagelkorn K 57.24 . . .	19,9	29,6	49
Hagelkorn K 57.25 . . .	22,4	30,4	36
Hagelkorn K 57.27 . . .	22,5	29,1	29

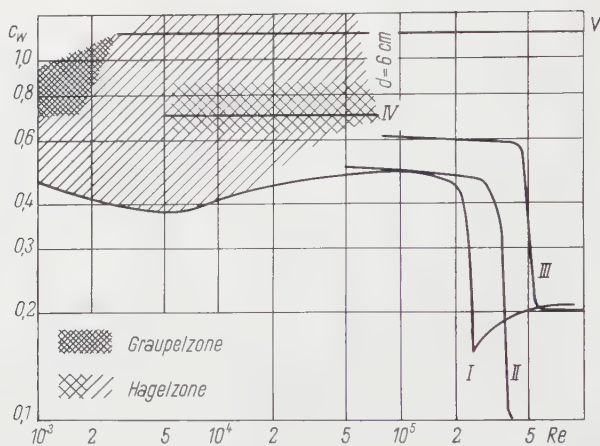
80% der Hagelkörner ellipsoidische Formen aufweisen, soll die Tabelle 2 die erheblichen Abweichungen der tatsächlichen Verhältnisse von den theoretisch berechneten aufzeigen. Die Rechnung wurde für ein kugeliges «Ideal-korn» gleichen Volumens und gleicher Dichte bei einem c_w von 0,5 ausgeführt. Man muss sich bei der Betrachtung dieser Zahlen klar sein, dass es sich nicht um extreme Abweichungen handelt. Im Gegenteil, es sind klare Hinweise im Aufbau der Hagelkörner vorhanden, dass in früheren Wachstumsstadien (gleicher Grösse!) die Oberfläche rauher war und die Protuberanzen wesentlich deutlicher zutage traten (siehe Figur 4). Dass die Rauhgigkeit der Oberfläche und vereinzelter Auftreten von Protuberanzen Widerstandskoeffizienten und Querschnittsfläche vergrössern, zeigen speziell auch die Messungen an dem äusserlich als kugelig zu taxierenden Korn K 57.26. In jeder Fallage ist der Hauptspannt grösser (im Maximum bis 30%) als bei einer Kugel gleichen Volumens und Gewichtes, ebenso der Widerstandskoeffizient (bis 40%).

Damit sind wir in der Lage, Variationsgebiete der Widerstandskoeffizienten der Haupttypen der Hagelkörner im Laufe ihres Wachstums anzugeben (Figur 11), allerdings unter der Beschränkung auf maximale Durchmesser von 6 cm. Die obere Begrenzung dieser Gebiete soll für rauhe, mit Protuberanzen besetzte Schlossen gelten, währenddem die untere eher glatten Hagelkörnern entspricht.

Die Zusammenhänge zwischen Geschwindigkeit und mittlerem Hauptdurchmesser der Hagelkörner sind dargestellt in Figur 12. Die wahrscheinlichsten Zonen sind durch entsprechende Schraffierung hervorgehoben, die zugrunde gelegten Werte für Dichten sind für Reifgraupeln $0,5 \text{ g/cm}^3$, für Frostgraupeln und Hagelkörner $0,8 \text{ g/cm}^3$.

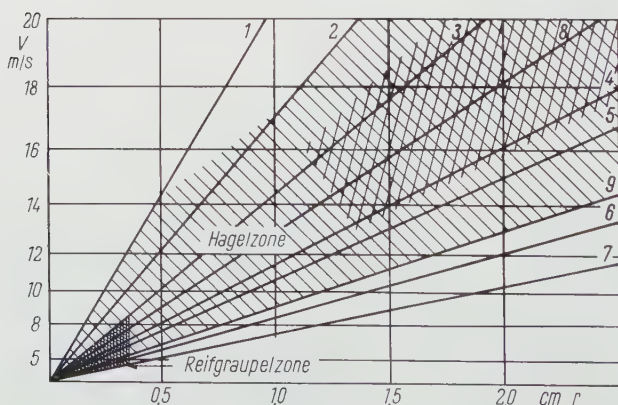
Neben der Fallgeschwindigkeit ist auch die Wachstumsrate dm/dt von grosser Bedeutung. Diese ist, unter Annahme gleicher Einfangswahrscheinlichkeit, proportional dem Produkt aus Geschwindigkeit und Querschnittsfläche senkrecht zur Fallrichtung. So ermittelte Werte sind für reale Formtypen und Widerstandskoeffizienten im Vergleich zu glatten Kugeln gleicher Masse und Dichte dargestellt in Tabelle 3.

Ein Vergleich zeigt, dass in diesen Fällen Hagelkörner praktisch übereinstimmende Wachstumsraten wie ideale Kugeln gleicher Masse und Dichte auf-



Figur 11

Variationsgebiete für Widerstandskoeffizienten (c_w) von Graupeln und Hagelkörnern in Funktion der Reynoldsschen Zahl Re : Kurve I, Beiwerte für glatte Kugeln, gemessen von PRANDTL [11]; Kurve II, Beiwerte für glatte Kugeln, gemessen von BILHAM und RELF [1]; Kurve III, Beiwerte für abgeflachte, glatte Ellipsoide, gemessen von PRANDTL [11]; Kurve IV, Beiwerte für Ellipsoide (Tabelle 1); Kurve V, Beiwerte für Scheiben, gemessen von PRANDTL [11].



Figur 12

Fallgeschwindigkeiten von Graupeln und Hagelkörnern (2665 m ü. M.): 1 Kugel, $\rho = 0,8 \text{ g/cm}^3$, $c_w = 0,5$; 2 Kugel, $\rho = 0,8 \text{ g/cm}^3$, $c_w = 0,7$; 3 Kugel, $\rho = 0,8 \text{ g/cm}^3$, $c_w = 1,0$; 4 Kugel, $\rho = 0,5 \text{ g/cm}^3$, $c_w = 1,0$; 5 Kugelsektor, Kegelöffnungswinkel 90° , $\rho = 0,8 \text{ g/cm}^3$, $c_w = 0,8$; 6 Kugelsektor, Kegelöffnungswinkel 90° , $\rho = 0,5 \text{ g/cm}^3$, $c_w = 0,8$; 7 Kugelsektor, Kegelöffnungswinkel 70° , $\rho = 0,5 \text{ g/cm}^3$, $c_w = 1,0$; 8 dreiachsiges Ellipsoid, $\rho = 0,8 \text{ g/cm}^3$, $c_w = 0,7$; 9 dreiachsiges Ellipsoid, $\rho = 0,8 \text{ g/cm}^3$, $c_w = 1,4$.

Tabelle 3

Vergleich der zur Wachstumsrate proportionalen Produkte $(v \cdot F)$ dreier Hagelkörner mit idealen Kugeln gleicher Masse und Dichte

	$(v \cdot F)$ Hagelkorn m^3/s	$(v \cdot F)$ Kugel m^3/s	$(v \cdot F)$ %
Hagelkorn K 57.24 . . .	$3,30 \cdot 10^{-2}$	$3,18 \cdot 10^{-2}$	- 3,6
Hagelkorn K 57.25 . . .	$4,08 \cdot 10^{-2}$	$4,13 \cdot 10^{-2}$	+ 1,2
Hagelkorn K 57.27 . . .	$2,92 \cdot 10^{-2}$	$3,10 \cdot 10^{-2}$	- 5,8

weisen, sofern die Luft gleich charakterisiert werden kann bezüglich ihres Feuchtegehaltes; nur sind wesentlich kleinere Aufwinde nötig, um eine Schlosse schwebend zu halten. Umgekehrt bedeutet dies, dass bei einem gegebenen vertikal aufsteigenden Luftstrom 1,5- bis 2,5mal schwerere ellipsoidische Körner an Ort gehalten werden können, als es die Rechnung für Kugeln ergibt! Entsprechende Daten für reale «kugelige» Hagelkörner dürften einen Faktor von 1,2 bis 2,0 ergeben, je nach Rauigkeit und Protuberanzen.

Die natürlichen Bedingungen aerodynamischer Natur erweisen sich damit zur Bildung grosser und schwerer Hagelkörner als wesentlich günstiger als die Schlussfolgerungen aus theoretischen Überlegungen.

Eine Darstellung aerodynamischer Verhältnisse bei der Hagelbildung wäre unvollständig, wenn nicht auch auf mögliche Rotationen der Eispartikeln hingewiesen würde. In der Tat sind auch untrügliche Anzeichen im Aufbau einzelner Schlossen zu finden, die auf eine Rotation hinweisen (Figur 19, [12]). Da aber der diesbezügliche Einfluss auf den Widerstandskoeffizienten nicht speziell gross sein dürfte, sei auf diese meist um die Fallachse (!) erfolgende Wirbelung nicht weiter eingegangen.

Damit wäre also von seiten der Aerodynamik her die Basis gegeben, Berechnungen über das Hagelkornwachstum neu anzusetzen. Es wird aber vorläufig darauf verzichtet, weil das tatsächliche thermische Verhalten der Hagelkörner bei ihrem freien Fall durch die Atmosphäre nicht bekannt ist. Zur Verfügung stehende theoretische Überlegungen basieren ebenfalls wieder auf Berechnungen an glatten Kugeln, was noch grössere Fehlresultate als bei der Erfassung aerodynamischer Verhältnisse ergeben dürfte. Auch ist zu beachten, dass die von SCHUMANN [2] gemachten und von MASON [3] und LUDLAM [4] übernommenen oder weitergeführten Ansätze über maximale Anlagerung von Eis in Funktion der höchst möglichen Abführung der Gefrierwärme den tatsächlichen Vorgängen nicht entsprechen. Die Natur kennt diese Wachstumsbeschränkung nicht, da das nicht gefrierende Wasser grösstenteils im Eisgerüst eingebaut wird! Ebenso fehlen genügende Experimente über die Überlagerungen einzelner Wachstumsphasen, die zur Schalenbildung führen kann.

5. Zur Frage des grössten Hagelkornes

BILHAM und RELF [1] beschäftigten sich 1937 eingehend mit der Frage des grössten sphärischen Hagelkornes und glaubten, eine Limitierung des Durchmessers statuieren zu können auf Grund des plötzlichen Absinkens des Widerstandskoeffizienten für Kugeln bei höheren Reynoldsschen Zahlen. Ihre Überlegungen wurden ins allgemeine Lehrgut der Meteorologie aufgenommen [3], ohne dass folgende zwei Punkte, die zu schweren Bedenken Anlass geben, beachtet wurden:

a) BILHAM und RELF führten die Messungen an Kugeln, die an einem Flugzeug angehängt waren, aus. Damit wollten sie jegliche Turbulenzen, die in einem Windkanal die Resultate beeinträchtigen, vermeiden. Vergleiche mit Messungen von PRANDTL [11] zeigen denn auch, dass dadurch eine Verschiebung des Ablösepunktes oder, als Resultat davon, ein Absinken des Widerstandskoeffizienten von Reynoldsschen Zahlen von $Re = 2,2 \cdot 10^5$ nach $Re = 3,2 \cdot 10^5$ verschoben werden konnte (Figur 11). Da aber schon durch die Anwesenheit vieler Hagelkörner in einem Aufwind einer Gewitterwolke dessen Turbulenzgrad erhöht wird, ist es nicht gerade sinngemäss, Messungen in speziell turbulenzfreier Luft für die Hagelbildung herbeizuziehen.

b) Die Messungen von BILHAM und RELF wurden an glatten Kugeln ausgeführt. Glatte kugelige Eiskörner sind aber in der Natur höchstens mit Durchmessern von 15 mm zu finden. Grössere Hagelpartikeln weisen bei ihrem Wachstum wohl öfters diese Form auf, ihre Oberfläche ist jedoch stark aufgeraut bis protuberanzenartig. Diese Oberflächenstruktur hat aber zur Folge, dass auch bei kleinen Re eine turbulente Grenzschicht vorhanden ist. Damit sind wir zum vornherein in einem überkritischen Gebiet der Reynoldsschen Zahl – der Widerstandskoeffizient wird sich nicht stark verändern, eine aerodynamisch bedingte Beschränkung der Hagelkorngrossen wird damit illusorisch.

Für die wertvollen Ratschläge zur Interpretation der Ergebnisse bin ich vor allem Herrn Prof. Dr. J. ACKERET vom Aerodynamischen Institut der ETH zu Dank verpflichtet. Danken möchte ich weiter Herrn Dr. M. DE QUERVAIN für die Förderung dieser Arbeit und den Mitarbeitern Herrn W. PUTRE und Herrn P. RÄSS für ihre Mithilfe bei den Messungen und Auswertungen. Die Untersuchungen wurden im Rahmen des Forschungsprogrammes der Eidgenössischen Kommission zum Studium der Hagelbildung und der Hagelabwehr an der Forschungsstelle Weissfluhjoch ausgeführt; zur Finanzierung standen teilweise Kredite des Schweizerischen Nationalfonds zur Verfügung.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] E. G. BILHAM und E. F. RELF, Quart. J. R. met. Soc. 63, 149 (1937).
- [2] T. E. W. SCHUMANN, Quart. J. R. met. Soc. 64, 1 (1938).
- [3] B. J. MASON, *The Physics of Clouds* (1957).
- [4] F. H. LUDLAM, Nubila 1, 12 (1958).

- [5] D. MELCHER, Z. angew. Math. Phys. 2, 421 (1951).
- [6] V. J. SCHAEFER, Weatherwise 9, 132 (1936).
- [7] R. LIST, Z. angew. Math. Phys. 9a, 180 (1958).
- [8] L. v. BUCH, Berl. Akad. 1874.
- [9] D. L. ARENBERG, Bull. Amer. met. Soc. 22, 113 (1941).
- [10] U. NAKAYA, Snow Crystals (1954).
- [11] L. PRANDTL, Ergebn. aerodyn. Vers.-Anstalt, Göttingen, 2. Lieferung (1923).
- [12] R. LIST, Z. angew. Math. Phys. 9a, 217 (1958).

Summary

All existing hail theories in mathematical form proceed from the assumption that hail stones can be represented as smooth spheres. Observation of the most common types of graupels and hail stones shows, however, that a sphenical shape is found only in a minority of cases, while the surface is generally more or less rough. In order to establish the importance of these obvious deviations from the theoretical assumptions, hail stones and various models of soft hail (graupel) were subjected to wind resistance tests in a wind tunnel. The apparatus and method used can be seen in *Figure 1*; the results are contained in *Figures 2, 7, 8, 9, 10*. The values given for the coefficient of wind resistance, for the actual section facing into the air stream, and for the expected speed of fall have in each case been recorded along the direction of the current outwards from the centre of the figure. The measurements were made with respect to a rotation round the main axes of the hailstones.

Experiments in a water tank further showed that all these measured hail stones fell in one direction, in which the speed of fall was minimal.

If we compare this speed of fall with that of ideal, smooth spheres having the same mass and density, differences result of between 30 and 50% (Table 2). And as the measured hail stones have still a relatively smooth surface, it is reasonable to expect that even greater deviations can in fact occur.

The extent of variation in coefficients of resistance for natural hail stones expressed as functions of the Reynolds number has been entered in *Figure 11*. — Various connections between the particle radius (the mean radius of the section facing the direction of flow) and the particle's speed of fall are represented in *Figure 12* for a number of different hail-stone shapes. In the case of these relationships, too, there is considerable divergence from the usual calculations.

It is also an interesting fact that the products of the speed of fall v and the cross-section F are approximately as great for observed hail stones as for spheres of equal mass and density (Table 3). Based on the assumption of constant collection efficiency these products are proportional to the rate of growth.

Everything goes to show that natural aerodynamic conditions essentially favour the formation of larger and heavier hail stones than is allowed for by theoretical considerations. — It is also not admissible to postulate at the critical Reynolds number a maximum hail-stone diameter on the basis of the decline in the coefficient of resistance of a *smooth* sphere, since equivalent hail stones can be treated in the optimum case as *rough* spheres (with changed character of the boundary layer).

(Eingegangen: 26. September 1958.)

Theory of Oscillation Type Viscometers V: Disk Oscillating Between Fixed Plates¹⁾

By GORDON FRANK NEWELL²⁾, Providence, R. I., USA.

Abstract

A disk oscillating between two fixed plates is considered as an instrument for absolute measurements of viscosity. The existing theories relating the viscosity to the decrement of oscillation are improved by calculating the effects of the edge. This is done by assuming that the separation between the plates is small compared with both the radius of the disk and the boundary layer thickness. A comparison is made with the experimental data of KESTIN and PILARCZYK for which the present theory is estimated to be correct to 0.1%.

1. Introduction

A disk oscillating in a fluid between two fixed parallel plates has been used by several investigators as an instrument for measuring viscosities. The status of the experimental and theoretical problems has recently been discussed by KESTIN and WANG [1]³⁾ and by KESTIN and MOSZYNSKI [2]. As compared with a disk oscillating in an 'infinite' fluid described in parts III and IV [3, 4]⁴⁾, the presence of two stationary plates in the manner shown in Figure 1 tends to increase the viscous drag on the disk. This is desirable from an experimental point of view in cases where the infinite fluid would give a decrement that is too small to measure accurately.

The present paper will deal only with the theoretical aspects of the problem and will employ most of the same notation and mathematical formulation previously described in parts I [5], II [6], III [3] and IV [4]. The only difference between the present problem and those discussed in the previous parts is a

¹⁾ This research was supported by the United States Air Force through the Air Force Office of Scientific Research of the Air Research and Development Command, under contract No. AF 18 (600) 1548. Reproduction in whole or in part is permitted for any purpose of the United States Government. Part of the work was done while the author was being supported by a grant from the Alfred P. Sloan Foundation.

²⁾ Brown University.

³⁾ Numbers in brackets refer to References, page 173.

⁴⁾ Equation numbers and other references to earlier parts of this series will be denoted by the prefix I, II, III or IV. For the most part, however, the present paper is dependent only on part I which also contains a table of notation.

difference in geometry. As compared with the infinite fluid case of parts III and IV, the only new feature is the additional boundary condition that the fluid velocity must vanish on the plates instead of 'at infinity'.

The main deficiency of present theories is that they do not properly take into account the influence of the edge. Whereas KESTIN and WANG have made a semi-empirical study of this aspect and based their considerations upon the experimental data of KESTIN and PILARCZYK [7], the present analysis will be directed toward obtaining the edge correction from first principles. This will permit one to use the viscometer for absolute measurements of viscosity instead of just relative measurements.

Briefly the problem is to solve equation (I, 13), namely

$$s \nabla^2 w - \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{3}{\xi} \cdot \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \quad (1)$$

subject to the boundary conditions

$$\left. \begin{aligned} w(\xi, \eta, s) &= 1 \quad \text{on the disk } A, \\ w(\xi, \eta, s) &= 0 \quad \text{on the plates} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

and evaluate the integral, equation (I, 16),

$$D(s) = \varrho \delta^5 s I^{-1} \iint_A d\sigma \xi^2 \frac{\partial w}{\partial n}. \quad (3)$$

The angular displacement $\alpha(\tau)$ of the disk consists of a transient plus a decaying oscillation of the type, equation (I, 18)

$$\alpha(\tau) = A e^{-\Delta \omega \tau} \cos(\omega \tau + \psi) \quad (4)$$

in which

$$S = \pm(i - \Delta) \omega \quad (5)$$

are the roots of the equation (I, 40)

$$(S + \Delta_0)^2 + 1 + D(S) = 0. \quad (6)$$

The reader is referred to part I for a detailed discussion of notation and of the origin of these equations but particularly relevant here is the fact that all lengths are measured in units of the boundary layer thickness $\delta = (\nu/\omega_0)^{1/2}$; ν is the (unknown) kinematic viscosity and ω_0 the natural frequency of oscillation. In the same units, we let ξ_0 and η_0 denote the radius and half thickness of the disk respectively as in parts III and IV.

To our previous notation, we must add two new lengths, namely the two distances between the plates and disk which we denote by β_1 and β_2 (see Figure 1). We will assume, however, that β_1 and β_2 are nearly equal,

$$\frac{\beta_1 - \beta_2}{\beta_1 + \beta_2} \ll 1. \quad (7)$$

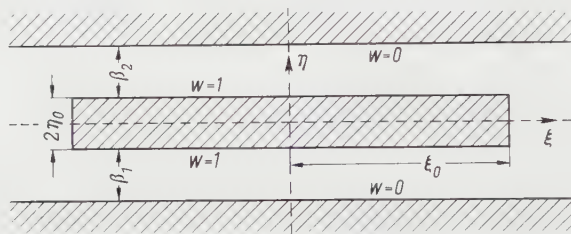


Figure 1

Geometry of a disk oscillating between stationary plates.

In addition we assume that

$$2\eta_0 + \beta_1 + \beta_2 \ll \xi_0 \quad (8)$$

(the separation between plates is small compared with the radius of the disk) and

$$2\eta_0 + \beta_1 + \beta_2 \ll 1 \quad (9)$$

(the separation between plates is small compared with the boundary layer thickness). We will not find it necessary, however, to make any further restrictions on the absolute magnitude of ξ_0 .

Equations (7) and (8) are restrictions on geometry alone whereas equation (9) is in effect a restriction on δ . If, in contrast, with equation (9), we should have $\beta_1 \sim \beta_2 \gg 1$, the plates would be located so far from the disk that they would have practically no influence on the fluid motion and the whole problem would reduce essentially to that of the infinite fluid considered in parts III and IV. If the plates are to serve some useful purpose that could not be achieved with the simpler physical arrangement without the plates, then certainly the plates should be placed at least within a distance δ from the disk and preferably so that $\beta_1 \sim \beta_2 \ll 1$. If η_0 and β_1 are of comparable size then this condition is equivalent to equation (9).

We have chosen to measure lengths in units of δ in order to maintain a notation consistent with that of the previous parts, even though there is no particular advantage to this choice in the present problem. The boundary conditions, equation (2), along with equation (9), will force w to decrease from

1 to 0 in a distance small compared with δ . The physical significance of δ as a 'boundary layer thickness' is therefore essentially lost and we would expect the fluid motion (i. e. w) to be nearly independent of this, at present, rather artificial unit of length.

The mathematical interpretation of this can be seen by noting what would happen to equation (1) if we should measure distances in units of $(2\eta_0 + \beta_1 + \beta_2)$ instead of δ , i. e. let $\xi' = (2\eta_0 + \beta_1 + \beta_2)^{-1} \xi$ and $\eta' = (2\eta_0 + \beta_1 + \beta_2) \eta$. Equation (1) would then become

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi'^2} + \frac{3}{\xi'} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \xi'} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta'^2} = s (2\eta_0 + \beta_1 + \beta_2)^2 w. \quad (10)$$

Since we are interested in the solution of this for $s \sim \pm i$, the right-hand side of equation (10) is small and, in some sense at least, w should be given approximately by the solution of equation (10) or (1) with $s = 0$. We expect then that a power series expansion of w in powers of s should converge rapidly for $|s|$ of order 1.

Thus far we have not taken advantage of equation (8) which we now use to remove the last unpleasant feature of equation (1), the term $3\xi^{-1} \partial w / \partial \xi$. We know that over most of the disk, not too near the edge, both $\partial w / \partial \xi$ and $\partial^2 w / \partial \xi^2$ will be small. The neglect of both of these terms in equation (1) is, in fact, the basis of most previous treatments of this problem. 'Not too near the edge' could only mean within a distance of order $(2\eta_0 + \beta_1 + \beta_2)$ and here we expect $\partial^2 w / \partial \eta'^2$, $\partial^2 w / \partial \xi'^2$ and $\partial w / \partial \xi'$ in equation (10) are of order 1 but $3(\xi')^{-1} \partial w / \partial \xi'$ is of order $(\xi')^{-1} \sim (2\eta_0 + \beta_1 + \beta_2) / \xi_0 \ll 1$.

The smallness of this term corresponds physically to the fact that to an observer situated this near the edge, the edge appears to be nearly straight and the oscillations appear as linear rather than rotational oscillations. We anticipate, therefore, that an asymptotic expansion of w in powers of ξ_0^{-1} will converge rapidly.

The key to the solution of this problem is the above observation that to a first approximation w satisfies LAPLACE'S equation. This approximation to w is valid everywhere including the region near the edge. It will contribute to $D(s)$ a first correction for the edge and will in this sense represent a second approximation to $D(s)$ as compared with earlier theories.

2. First Approximation

Our goal is to obtain eventually an expansion for $D(s)$ in powers of s and ξ_0^{-1} . The contribution to $D(s)$ from the edge will be smaller than that from the flat surfaces of the disk by a factor of order $(2\eta_0 + \beta_1 + \beta_2) / \xi_0$ or smaller so we first present a brief review of the theory neglecting the edge effect in order

to obtain the terms in $D(s)$ of lowest order in ξ_0^{-1} and certain qualitative properties of the disk.

Neglecting the edge effect is equivalent to neglecting the radial dependence of w . To obtain all terms of lowest order in ξ_0^{-1} , we consider the approximation

$$w_1 = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\sinh(\eta_0 + \beta_1 - |\eta|) s^{1/2}}{\sinh \beta_1 s^{1/2}} & \text{for } \xi < \xi_0, \eta > 0, \\ \frac{\sinh(\eta_0 + \beta_2 - |\eta|) s^{1/2}}{\sinh \beta_2 s^{1/2}} & \text{for } \xi < \xi_0, \eta < 0, \\ 0 & \text{for } \xi > \xi_0, \end{array} \right\} \quad (11)$$

which is a solution of equation (1) except for the discontinuity at $\xi = \xi_0$. The lowest order in both ξ_0^{-1} and s is obtained from the simpler approximation,

$$w_0 = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\eta_0 + \beta_1 - |\eta|}{\beta_1} & \text{for } \xi < \xi_0, \eta > 0, \\ \frac{\eta_0 + \beta_2 - |\eta|}{\beta_2} & \text{for } \xi < \xi_0, \eta < 0, \\ 0 & \text{for } \xi > \xi_0. \end{array} \right\} \quad (12)$$

The expression for $D(s)$ resulting from equation (11) is

$$D_1(s) = \xi_0^4 \varrho \delta^5 \pi I^{-1} s^{3/2} \frac{1}{2} [\coth(\beta_1 \sqrt{s}) + \coth(\beta_2 \sqrt{s})], \quad (13)$$

a formula which has been derived and used previously [1]. We shall expand equation (13) in powers of s and write the result in the form

$$D_1(s) = D_0(s) \left\{ 1 + \left(\frac{1}{3}\right) s \beta_1 \beta_2 - \left(\frac{1}{90}\right) s^2 (\beta_1^3 + \beta_2^3) \beta + \left(\frac{1}{945}\right) s^3 (\beta_1^5 + \beta_2^5) \beta + \dots \right\} \quad (14)$$

in which

$$D_0(s) = M(\nu \varrho) s, \quad (14a)$$

$$\beta = \frac{2 \beta_1 \beta_2}{\beta_1 + \beta_2}, \quad (14b)$$

$$M = \pi(\xi \delta)^4 I^{-1} (\beta \delta)^{-1} \omega_0^{-1}. \quad (14c)$$

$D_0(s)$ is the lowest approximation to $D(s)$ and could be obtained directly from equation (12). It has been separated into the product of three factors M , $(\nu \varrho)$ and s the first of which depends only upon the suspension system but not the fluid (since the quantities $\beta \delta$ and $\xi \delta$ are lengths measured in the laboratory system of units), while $\nu \varrho$ depends upon the fluid but not the suspension system.

Equation (6) has two complex conjugate roots which determine Δ and ω , equation (5). It also has infinitely many real negative roots which determine the transient part of $\alpha(\tau)$. One can show, however, that the transient decays in a time short (of order β^{-1}) compared with the natural period of oscillation and the transient can be eliminated from the observation of the main oscillation by waiting a short time for it to decay.

Equation (6), being a complex equation, is equivalent to two real equations and, therefore can, in principle, be used to compute two unknowns. It is a practical experimental necessity, however, that Δ be small (less than 1/10 at least) and by solving equation (6) with $\Delta \ll 1$, one finds that

$$1 - \omega \ll \Delta \ll 1.$$

This means that the change in ω due to the fluid is very small and in present applications, it has not been possible to measure the frequency change $1 - \omega$ with sufficient accuracy to be of much use.

The imaginary part of equation (6) gives the real equation

$$2\omega(\Delta - \Delta_0) = \text{Im } D(i\omega - \Delta\omega), \quad (15)$$

which with $D(s) \sim D_0(s)$ yields as a first approximation

$$2(\Delta - \Delta_0) \sim M\nu\rho. \quad (15a)$$

One may use this equation to compute ν from measured values of M , ρ and $(\Delta - \Delta_0)$. The higher approximations to equation (15) will, however, also contain ω and one has the option of using either an observed value of ω or a value computed from the real part of equation (6). Although the latter would, in most cases, be the more accurate value of ω (otherwise one would be able to use the measured value of $\omega - 1$ to compute something else, perhaps ρ , more accurately than it is already known), the difference is usually insignificant as compared with other errors and one should use whichever value of ω is more convenient to determine.

We now turn our attention to the problem of finding a more accurate expression for $D(s)$ which will include the contribution from the edge and give a more satisfactory formula than equation (15a).

3. Edge Effects

To find the next approximation to $D(s)$, we say that w is approximately equal to the solution of LAPLACE's equation for the geometry of Figure 1. To find this w , we simplify the problem further by taking $\beta_1 = \beta_2 = \beta$. The method to be used here could also be used for $\beta_1 \neq \beta_2$ but the edge contribution to

$D(s)$ will be relatively small (of order β/ξ_0) and the error caused by a small difference in β_1, β_2 is expected to be smaller yet by a factor of order $(\beta_1 - \beta_2)^2/\beta^2$.

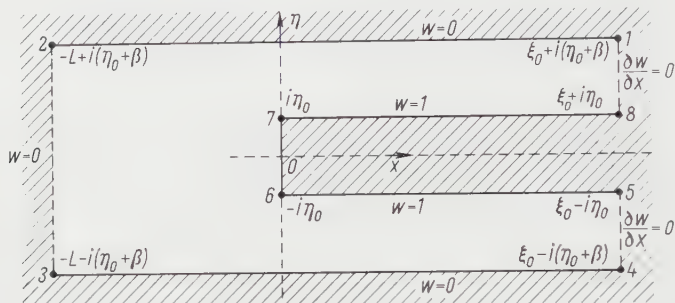


Figure 2

The geometry in the complex z -plane showing boundary conditions on a polygon.

We now modify Figure 1 slightly so as to correspond to Figure 2. We choose a coordinate system with its origin on the walls of the disk and consider

$$x = \xi_0 - \xi \quad (16)$$

and η as coordinates in a complex plane

$$z = x + i\eta. \quad (17)$$

Boundaries at $x = \xi_0$ and $x = -L$ have been added to show boundary conditions on a polygon in the z -plane.

The proposed scheme of expanding w in powers of ξ_0^{-1} and s will, at best, determine w to some finite power of ξ_0^{-1} . We anticipate that the influence of the edge decays exponentially and for $\xi = 0$ ($x = \xi_0$) is proportional to the negative exponential of a number of order $\xi_0/\beta \gg 1$. Such quantities are smaller than any finite power of β/ξ_0 and can therefore be neglected. The problem, in question, therefore is to find w for the limiting case in which the boundaries of Figure 2 at $x = \xi_0$ and $x = -L$ all recede to infinity.

We now determine w by conformal mapping or more specifically by means of a Schwarz-Christoffel transformation. One can easily determine a transformation which maps the polygon of Figure 2 into a half plane with the boundary of the polygon mapping onto the real line. It can be chosen so that the boundary $w = 0$ maps into the negative half of the real line and the boundary $w = 1$ maps into the positive half of the real line. It is convenient to make still a second mapping, a logarithmic transformation, which transforms this upper half plane into a horizontal strip. The pair of transformations then maps the

polygon of Figure 2 into the strip of Figure 3 with the numbered points of Figure 2 mapping into the corresponding numbered points of Figure 3. If we

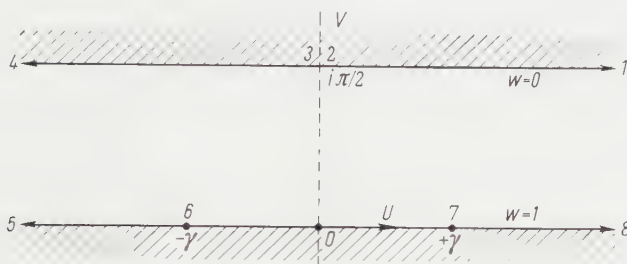


Figure 3

Geometry in W -plane resulting from a conformal mapping of Figure 2. Numbered points are images of corresponding points of Figure 2.

denote the coordinates of Figure 3 by

$$W = U + iV \quad (18)$$

and define

$$\gamma = \cosh^{-1} \left(1 + \frac{\eta_0}{\beta} \right) \quad (19)$$

then the mapping in question is given by the equation

$$z = \frac{2i\beta}{\pi} \left\{ -\sin^{-1} \left(\frac{\sinh W}{\sinh \gamma} \right) + \cosh \gamma \sin^{-1} \left(\frac{\tanh W}{\tanh \gamma} \right) \right\}. \quad (20)$$

One must be careful, however, to use only the analytic continuation of this formula along paths lying entirely within the horizontal strip of Figure 3 of that branch of the multi-valued mapping for which $z = 0$ when $W = 0$.

The purpose of the conformal mapping is to make use of the fact that LAPLACE's equation is invariant to such a transformation, i. e., $w(z(W))$ considered as a function of W also satisfies LAPLACE's equation. The solution in the W -space is trivial, however;

$$w(z(W)) = \operatorname{Re} \left(1 + \frac{2iW}{\pi} \right) = 1 - \frac{2V}{\pi}. \quad (21)$$

We need not find w as an explicit function of z because equations (20) and (21) already give a convenient parametric representation of the solution. For any value of W , equation (20) defines a point $z(W)$ and equation (21) gives the value of w at that point. The point-by-point evaluation of w is not, however, of primary concern. We are mainly interested in evaluating $D(s)$, which can be done directly in terms of w as a function of W .

Before we do this, it is interesting to investigate a few qualitative properties of $\partial w / \partial n$ in the z -space since this measures, in effect, the drag per unit area of the fluid on the disk and it appears in the integrand of equation (3).

The present approximate solution for w gives

$$\frac{\partial w}{\partial n} = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{2}{i\pi} \cdot \frac{dW}{dz} = \frac{\cosh U}{\beta (\cosh^2 \gamma - \cosh^2 U)^{1/2}}$$

along the end of the disk, $|U| < \gamma$ and

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\partial V}{\partial \eta} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{dW}{dz} = \frac{\cosh U}{\beta (\cosh^2 U - \cosh^2 \gamma)^{1/2}} \quad (22)$$

along the top or bottom of the disk; $|U| > \gamma$. This along with equation (20) defines a parametric representation for $\partial w / \partial n$ as a function of z . Near the corner $x = 0$, $\eta = \eta_0$ ($U = \gamma$), $\partial w / \partial \eta$ becomes infinite. As a function of U , it has a $-1/2$ power singularity but one can show from equation (20) that as a function of x for $\eta = \eta_0$ and $0 < x \ll \eta_0$,

$$\frac{\partial w}{\partial n} \sim \left[\frac{1}{2} 3\pi \beta^2 x \tanh \gamma \right]^{-1/3}$$

thus $\partial w / \partial \eta$ has a $-1/3$ power singularity as a function of x .

Of more importance is the behavior for $U \gg \gamma$ or equivalently, $x \gg \beta$. From equation (22) we see that

$$\frac{\partial w}{\partial n} \sim \frac{1}{\beta} \left[1 + \frac{\cosh^2 \gamma}{2 \cosh^2 U} + \dots \right]$$

and from equation (20) that

$$U \sim \frac{\pi}{2\beta} x + [\cosh \gamma \log(\cosh \gamma + 1) - (\cosh \gamma - 1) \log \sinh \gamma] + \dots \quad (23)$$

Together these two equations show that $\partial w / \partial \eta$ is equal to β^{-1} plus a term that decreases as $\exp(-\pi x / \beta)$. The term β^{-1} corresponds to that which obtains from w_0 , equation (12), while the exponential term confirms our earlier prediction that the edge effect would decay exponentially.

The surface integral in equation (3) can be separated into two terms, one from the walls of the disk and the other from the top and bottom. By using the cylindrical symmetry and the reflection symmetry with respect to the plane $\eta = 0$, equation (3) can be reduced to the single integrals

$$D(s) = -\frac{q \delta^3 4 \pi s}{I} \left\{ \int_0^{\xi_0} d\xi \xi^3 \frac{\partial w}{\partial \eta} \Big|_{\eta=\eta_0} + \xi_0^3 \int_0^{\eta_0} d\eta \frac{\partial w}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_0} \right\}. \quad (24)$$

We are interested here only in the excess drag caused by the edge. It is convenient therefore to subtract the part that arises from the constant value $\partial w / \partial \eta = \beta^{-1}$ since its contribution to $D(s)$ has already been included in the analysis of the previous section without some of the simplifying assumptions being used here. If we denote by $D_2(s)$ the contribution to $D(s)$ from the edge, write the integrals in terms of x and expand $\xi^3 = \xi_0^3 (1 - x/\xi_0)^3$ in powers of x , we obtain from equation (24)

$$D_2(s) = \frac{4\beta D_0(s)}{\xi_0} \left\{ - \int_0^{\xi_0} dx \left[\frac{\partial w}{\partial \eta} \Big|_{\eta=\eta_0} + \frac{1}{\beta} \right] + \int_0^{\eta_0} d\eta \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} - \int_0^{\xi_0} dx \frac{\partial w}{\partial \eta} \Big|_{\eta=\eta_0} + \frac{1}{\beta} \right\} + O\left(\frac{\beta^2}{\xi_0^2}\right) \quad (25)$$

The third integral is of order β/ξ_0 and we shall discard it for now but consider it later in a higher approximation. The first two integrals form a single line-integral along the curve $\omega = 1$ of Figure 2 and they can be translated into a corresponding line-integral along $V = 0$ of Figure 3. By using the fact that $W(z)$ is an analytic mapping, one obtains the form

$$D_2(s) = \frac{4\beta D_0(s)}{\xi_0} \left\{ - \int_0^{U(\xi_0)} dU \frac{\partial w}{\partial V} \Big|_{V=0} - \int_0^{\xi_0} \frac{d\xi}{\beta} \right\},$$

in which $U(\xi_0)$ is the value of U for which $x(U) = \xi_0$. By using equation (21) we obtain

$$D_2(s) = 4\beta \xi_0^{-1} D_0(s) \left[\frac{2}{\pi} U(\xi_0) - \beta^{-1} \xi_0 \right].$$

This, in turn, can be evaluated to within an exponentially small error from equation (23). We finally obtain,

$$D_2(s) = 8\beta D_0(s) \pi^{-1} \xi_0^{-1} [\cosh \gamma \log (\cosh \gamma + 1) - (\cosh \gamma - 1) \log \sinh \gamma]. \quad (26)$$

$D_2(s)$ is to be added to $D_0(s)$ or $D_1(s)$ to give the term of order ξ_0^{-1} in the expansion of $D(s)/D_0(s)$ in powers of s and ξ^{-1} . The quantity in brackets is a function only of γ , equation (19) which, in turn, depends only upon the geometry of the suspension system. For $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, equation (26) gives exactly the value for the term of order $\xi_0^{-1} s^0$ in the expansion mentioned above. The fact that we have used a solution of LAPLACE'S equation instead of equation (1) excludes the possibility of also finding the smaller terms of order ξ_0^{-2} , $\xi_0^{-1} s$, etc., directly from the above results.

4. Higher Approximations

Although it is very difficult to obtain a more accurate approximation to w from which to calculate still higher-order terms in the expansion of $D(s)$, one can make more efficient use of the solution at hand by employing the variational form for $D(s)$ introduced in part III, section 4. If w is only an approximate solution of equation (1), then the formula

$$D(s) = \frac{e^{\delta s}}{I} \iint_A \xi^2 \frac{\partial w}{\partial n} d\sigma - \iiint_V d\tau \xi^2 w \left[\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{3}{\xi} \cdot \frac{\partial w}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - s w \right] \quad (27)$$

(in which V is the volume of the fluid and $d\tau$ the element of volume) is an extremal and therefore insensitive to small errors in w . One should be able correctly to obtain from this at least the two terms of order ξ_0^{-2} and of order $s \xi_0^{-1}$ for $\beta_1 = \beta_2$ using only the approximate w of the last section.

The first term of equation (27) is equivalent to equation (3) or (24) but we previously neglected the third integral in equation (25) and we should now include it with the terms of order ξ_0^{-2} . Since our w is a solution of LAPLACE'S equation, the second derivative terms in equation (27) cancel but the first derivative term will also contribute something of order ξ_0^{-2} while the last term of equation (27) will contribute something of order s .

The integral containing $\partial w / \partial \xi$ can be evaluated to the desired accuracy by the following sequence of steps

$$\begin{aligned} \iiint_V d\tau \xi^2 w \frac{3}{\xi} \frac{\partial w}{\partial \xi} &\sim -3\pi \xi_0^2 \iint d\eta d\xi \frac{\partial(w^2)}{\partial \xi} \\ &= 6\pi \xi_0^2 \left\{ \int_0^{\eta_0} d\eta w^2 \Big|_{x=0} + \int_{\eta_0}^{\eta_0+\beta} d\eta w^2 \Big|_{x=\xi_0} \right\} \sim 2\pi \xi_0^2 (3\eta_0 + \beta). \end{aligned}$$

If we denote by $D_3(s)$ the contributions of order ξ_0^{-2} , then the above term combines with the corresponding term from equation (25) to give

$$D_3(s) = 2 D_0(s) \left(\frac{\beta}{\xi_0} \right)^2 \left\{ \left(1 + \frac{3\eta_0}{\beta} \right) + 6 \int_0^{\xi_0} dx \frac{x}{\beta} \left[\frac{\partial w}{\partial \eta} \Big|_{\eta=\eta_0} + \frac{1}{\beta} \right] \right\}. \quad (28)$$

We were not able to evaluate the integral in equation (28) explicitly although the integrand for integration with respect to U instead of x can be written explicitly and the upper limit of integration can be taken as ∞ . It is known, however, that the integral is a function of η_0/β only and that it is always negative, in contrast with the first term of equation (28). For any given geometry η_0/β is fixed and the value of the integral is simply a constant number

that can be calculated by numerical integration. In a specific example (with $\eta_0/\beta \sim 1/2$) a numerical integration showed that the contribution from this integral was only about one tenth as large as the contribution from the first term of equation (26). Although the integral was considered to be negligible in this instance, it is not obvious that this should always be the case.

The only remaining significant contribution from equation (27) is the last term

$$\varrho \delta^5 s^2 I^{-1} \iiint d\tau \xi^2 w^2. \quad (29)$$

This term includes all terms proportional to s^2 including those of relative magnitude ξ_0^0 and ξ_0^{-1} . If we write $w^2 = \bar{w}_0^2 - (\bar{w}^2 - \bar{w}_0^2)$, then the contribution from \bar{w}_0^2 gives the part of order ξ_0^0 and the contribution from $\bar{w}^2 - \bar{w}_0^2$ gives the part of order ξ_0^{-1} . The former part can be evaluated explicitly but it gives nothing new because this has already been evaluated by other means and appears as the second term in equation (14).

The integral with $\bar{w}^2 - \bar{w}_0^2$ could not be evaluated explicitly but again this can be reduced to an integral that depends only upon η_0/β . For any given geometry it could be evaluated numerically, if necessary. For the intended applications, however, this term is quite small. Compared with $D_0(s)$, it is of order $(\beta/\xi_0) \beta^2$ with both $\beta/\xi_0 \ll 1$ and $\beta \ll 1$. Furthermore, it is proportional to s^2 and its contribution to $\text{Im } D(i\omega - \Delta\omega)$ in equation (15) will be of order $(\beta/\xi_0) \beta^2 \Delta$ smaller than $\text{Im } D_0$ with $\Delta \ll 1$ also.

We will neglect this last contribution and take as our final approximation to $D(s)$, the sum of $D_1(s)$, equation (14); $D_2(s)$, equation (26); and $D_3(s)$, equation (28),

$$D(s) \sim M \nu \varrho s \left\{ C + \frac{1}{3} s \beta_1 \beta_2 + \frac{1}{90} s^2 (\beta_1^3 + \beta_2^3) \beta + \frac{1}{945} s^3 (\beta_1^5 + \beta_2^5) \beta + \dots \right\} \quad (30)$$

with

$$\left. \begin{aligned} C &= 1 + \frac{D_2}{D_0} + \frac{D_3}{D_0} \\ &= 1 + 8\pi^{-1} \frac{\beta}{\xi_0} [\cosh \gamma \log (\cosh \gamma + 1) - (\cosh \gamma - 1) \log \sinh \gamma] \\ &\quad + 2 \left(\frac{\beta}{\xi_0} \right)^2 \left[1 + 3 \frac{\eta_0}{\beta} + 6 \int_0^\infty dx \frac{x}{\beta} \left(\beta^{-1} + \frac{\partial w}{\partial \eta} \eta = \eta_0 \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (30a)$$

Note that this differs from $D_1(s)$ only in that the first term of equation (14), the number 1, is replaced by C . C is a function of β/ξ_0 and γ only, however, and for any fixed geometry is just a new constant.

We could obtain as many terms as we like in the expansion of $D_1(s)$ in powers of s although we already have included more than would usually be necessary. Disregarding this as a source of error we see that equation (30) admits fractional errors in $\text{Im } D$ ($i\omega - \Delta\omega$) and in calculated values of ν which are of order

$$\left(\frac{\beta}{\xi_0}\right)^3, \quad \frac{\beta}{\xi_0} \left(\frac{\beta_1 - \beta_2}{\beta}\right)^2, \quad \frac{\beta}{\xi_0} \beta^2 \Delta, \quad \text{and} \quad \frac{\beta}{\xi_0} \beta^4. \quad (31)$$

The first error arises from terminating the series for C , the second from taking $\beta_1 - \beta_2$ in D_2 , the third from neglecting the term from equation (29) and the fourth from the edge correction proportional to s^3 .

The actual calculation of ν from known values of all the other physical quantities can be done very easily and certainly with no greater difficulty with the above value of C than for $C = 1$. $D(s)$, equation (30), is substituted into equation (15) and the latter is solved for ν by a method of successive approximations. Since all but the first term of equation (30) are relatively small, they can be approximated by using a preliminary estimate of ν to determine δ and thus β_1 and β_2 . The only other place that ν appears in $D(s)$ is as a numerical factor which one now calculates. If necessary, one can recalculate β_1 and β_2 to obtain new estimates of the small terms in equation (30) and repeat the calculation of ν .

In the experimental arrangement used by KESTIN and PILARCZYK, $\beta_1/\xi_0 = 0.0282$, $\beta_2/\xi_0 = 0.0269$, $\beta/\xi_0 = 0.0276$ and $\eta_0/\beta = 0.560$. The resulting values of D_2/D_0 , D_3/D_0 and C are respectively 0.0958, 0.0037 and 1.0995. The first two errors in equation (31) contribute errors in C of order 10^{-4} and the experimental measurements of the geometry also contribute to C an error of order 10^{-4} . We estimate that $C = 1.0995 \pm 0.0005$.

To indicate how well the present theory would give absolute values of viscosity, we can make a calibration curve similar to that made by KESTIN and WANG [1] (their value of C has a slightly different meaning from the C used here, however). Using accurately known values of viscosity along with the data of KESTIN and PILARCZYK [7], one can compute what value of C would give exact agreement between the values of viscosity computed from the data of KESTIN and PILARCZYK and the known values. Figure 4 shows some values of C calculated in this way.

Certainly the theoretical value of 1.0995 is a decided improvement over the value $C = 1$ but the agreement between theory and experiment is not as good as expected. On the basis of (31), the theory should be correct to 0.1% for β as large as about 0.4. Furthermore, the dominant error from a constant value should be nearly proportional to β^4 . The experimental measurements were reproducible to about 0.1% but the errors in some of the instrument constants might have been somewhat larger than this. Such errors would have little

effect on the comparative viscosity measurements reported by KESTIN and WANG but would have a significant effect upon absolute measurements. At the present time, the only plausible explanation that can be offered for the remaining discrepancy is that they arise from errors in the measurement of both Δ_0 and the plate separations. Unfortunately there is no way of checking this from the available data⁵).

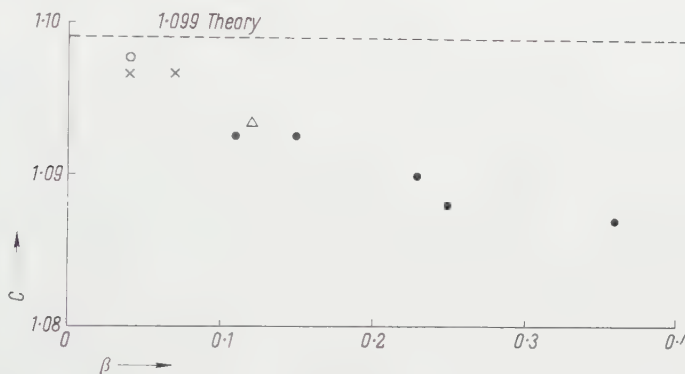


Figure 4

Comparison of the theoretical formula with data of KESTIN and PILARCZYK. Previous theories neglecting the edge effect give a value $C = 1$. ● nitrogen; ○ hydrogen; × helium; △ argon.

Acknowledgment

This problem was suggested to the author by Professor J. KESTIN, and the author wishes to acknowledge the cooperation and assistance received from both Professor J. KESTIN and Mr. H. E. WANG.

REFERENCES

- [1] KESTIN, J., and WANG, H. E., *Corrections for the Oscillating Disk Viscometer*, J. appl. Mech. 24, 197 (1957).
- [2] KESTIN, J., and MOSZYNSKI, J. R., *On the Measurement of the Viscosity of Steam by the Observation of Small Oscillations*, Fifth International Conference on Steam Properties (London 1956).
- [3] AZPEITIA, A. G., and NEWELL, G. F., *Theory of Oscillation Type Viscometers III: A Thin Disk*, Z. angew. Math. Phys. 9a, 97 (1958).
- [4] AZPEITIA, A. G., and NEWELL, G. F., *Theory of Oscillation Type Viscometers IV: A Thick Disk*, Z. angew. Math. Phys. 10, 15 (1959).

⁵ Note added in proof; Some new experiments very similar to those of KESTIN and PILARCZYK but of considerably greater accuracy have just been completed by KESTIN and LEIDENFROST. Their data agree with the theory described here to better than 0.1% over a range of β even larger than one would expect from the error estimates in (31). These data together with the theory yield absolute measurements of viscosity with an accuracy comparable with the best measurements made using capillary tubes.

- [5] KESTIN, J., and NEWELL, G. F., *Theory of Oscillation Type Viscometers I: The Oscillating Cup*, Z. angew. Math. Phys. 8, 433 (1957).
- [6] BECKWITH, D. A., and NEWELL, G. F., *Theory of Oscillation Type Viscometers II: The Oscillating Cup*, Z. angew. Math. Phys. 8, 450 (1957).
- [7] KESTIN, J., and PILARCZYK, K., *Measurement of the Viscosity of Five Gases at Elevated Pressures by the Oscillating-Disk Method*, Trans. Amer. Soc. mech. Engrs. 76, 987 (1954).

Zusammenfassung

Es wird untersucht, ob eine zwischen zwei feststehenden Platten schwingende Scheibe als Gerät für die Absolutmessung der Zähigkeit von Flüssigkeiten benutzt werden kann. Die dafür bestehenden Theorien, bei denen die Viskosität aus dem logarithmischen Dekrement der Schwingung berechnet wird, sind hier durch die Berücksichtigung der Randeffekte erweitert worden, unter der Voraussetzung, dass der Abstand zwischen den beiden feststehenden Platten klein ist im Verhältnis zum Radius der Scheibe und zur Grenzsichtdicke. Die Theorie stimmt mit den von KESTIN und PILARCZYK experimentell gefundenen Werten auf 0,1% genau überein.

(Received: December 21, 1957.)

The Seeding of Cumulus Clouds by Ground-Based Silver Iodide Generators¹⁾

By VINCENT J. SCHAEFER, Schenectady, N. Y.²⁾,
and JOHN H. DIETERICH, Missoula, Mont.³⁾, USA.

The control of thunderstorms is a challenging objective in experimental meteorology. For the past five years it has been the long-range goal of Project Skyfire [1]⁴⁾.

The lightning storm season in western Montana, northern Idaho, eastern Oregon and Washington normally extends from June to September with the greatest storm intensity occurring in July and August. Over the past twenty year period approximately 70% of all fires occurring in the forests of the north-western United States were caused by lightning. In 1948 a start was made toward a study of these storms by SCHAEFER and GISBORNE [2]. In 1952 seven time lapse cameras were installed on mountain summits of the Northwest to obtain visual records of the types of storms which occur during the summer

¹⁾ Paper presented at 163rd National Meeting, American Meteorological Society, New York City, January 27-30, 1958.

²⁾ The Munitalp Foundation, Inc. of Hartford, Conn., and Nairobi, Kenya.

³⁾ The US. Forest Service, Intermountain Forest and Range Experiment Station.

⁴⁾ Numbers in brackets refer to References, page 187.

period [3]. Fire lookout towers such as shown in Figure 1 were used for this purpose. The following year lookout observers manning a network of 25 mountain tops in that area attended the first of a series of cloud survey schools sponsored by the U.S. Forest Service and the Munitalp Foundation [4]. The daily reports of cloud and storm patterns radioed to headquarters of Project Skyfire laid the foundation for a better understanding of the nature of the lightning storm problem in that area.

Although this five-year study established that certain areas were likely to generate storms at specific locations, it also served to emphasize the great variability of storminess and the complexity of the storm types which occurred across the area.

The studies made during the five-year Skyfire cloud and storm survey clearly show the great difficulties which would accompany an attempt to use a purely statistical approach toward establishing the success or failure of cloud seeding techniques for moderating lightning storms. To have any chance for valid results, a statistical program must be based on the premise that a sufficient number of 'pairs' occur which can be treated and untreated for comparative testing.

Highly variable weather conditions and the occurrence of several types of thunderstorms makes it difficult to obtain a number of 'pairs' which are similar in basic characteristics. Therefore, in the 1957 Project Skyfire program, it was decided to carry out experimental cloud seeding on each day meeting operational specifications and to study these results in relation to unseeded conditions in surrounding areas. This approach would broaden the experience in experimental cloud seeding and would provide basic information for the design of future research.

The test area consisted of a pie-shaped region covering about a thousand square miles extending about 50 miles northeast of the Montana-Idaho border with its apex in the vicinity of Lolo Pass in the Bitterroot Mountains as depicted in Figure 2. This area in turn is embedded in the much larger Skyfire network illustrated in Figure 3.

Initial studies of this area were made in August 1956 [5]. Although the mountains and valleys in this area comprise a highly complex terrain, a definite behavior pattern became apparent after a month of field observations and activities.

Based on these observations and experiences, a program was laid out for the 1957 season centered about an assembly of 30 silver iodide ground generators designed by WELLS and FUQUAY [6]. These were placed at 1/2 mile intervals in the form of a cross. By operating those located along the southwest-northeast line, a narrow silver iodide plume of high concentration could be generated. The generators on the northwest-southeast legs on the other hand produced a much wider plume of lower concentration. With such an arrangement a great variety of tests could be made. In addition to producing wide and

narrow plumes of relatively high concentration, the effect produced by all thirty generators could be studied as well as that caused by a single one.

By late July it had been firmly established that, although most of the generators were located near the top of a mountain ridge, little silver iodide would be carried aloft until after 11 o'clock in the morning. Previous to this time of the day, the effluent would be carried by drainage winds into the deep valleys extending to the southwest and northeast of the generator lines. This phenomenon might be exploited when fully understood. By operating the generators continuously during the night and early morning hours, large masses of valley air might be loaded with nuclei so that, as thermals develop, the cloud area infected by the generators would extend over a much larger zone; including areas ten or more miles in the direction which would ordinarily be considered upwind of the generator site.

The objective of the 1957 season was directed toward determining the degree of lightning suppression (if any) which might be achieved through cloud seeding operations. Previous studies during the summer months in the northwest had established that the concentration of natural ice nuclei at temperatures warmer than -20°C was either very low or undetectable. These determinations were made, using both surface and airborne cold chambers and by watching supercooled clouds in the area. Except in extremely rare instances, evidence of ice crystals in clouds never was observed until the clouds subcooled to at least -20°C . Consequently, the primary objective of the 1957 field program was the determination of whether or not clouds could be consistently nucleated on a massive scale within the test area as contrasted to the adjacent regions. The two small aircraft available to the project were to be used for aerial temperature and moisture sounding of the atmosphere, plume tracing, determining the temperature of cloud tops and bases, the concentration of natural ice nuclei, the behavior of clouds in regions beyond the test area and the degree of thermal activity over and downwind of the generator sites throughout the day.

Project Skyfire Field Activities on an Operational Day

In order to acquire sufficient quantitative data for analytical use in evaluating the results of the seeding of cumulus clouds from ground-based generators, a considerable amount of organizational planning and activity was necessary. A typical day's operation involved the field activity of twelve to fifteen persons. About half of the field staff had a scientific background, the rest being students near or at post-graduate level.

Sounding Flight

The first activity of the day involved an atmospheric sounding flight using a single engined monoplane, the Cessna 180. A recording aerograph was flown

to an altitude of 16000 ft shortly after sunrise. The data from this flight was immediately transcribed and in addition a report was made of the condition of the sky in the general area of the test region. This information was then turned over to the forecaster.

Weather Forecast

At about 08-00 M.S.T. a special forecast for the day was completed. This was based on standard weather reports including facsimile weather maps and special local weather data such as obtained by the sounding flight of the previous hour and a special pilot balloon observation made in the center of the test area at about the time the sounding flight was being made. This was obtained by the field crew charged with operating the silver iodide ground generators. This information was supplemented by wet and dry bulb observations made at a group of mountain-top fire lookout stations scattered throughout the area and sent in by radio and telephone as the day's forecast was being prepared.

Based on this information, an hour-by-hour forecast was prepared. This information was presented in schematic form and showed the probable cloud bases and heights likely to occur during the day, the location of the freezing level, the $+4^{\circ}\text{C}$ level (where the first effects of silver iodide would occur) and the -39°C level (where spontaneous nucleation occurs). The presentation also showed the temperature with height profile, and the wind velocities and directions to be expected. It also included a brief forecast for the area and the location of the major axis of the nearest jet stream.

The forecaster also prepared a summary of the cloud development which occurred on the previous day, the precipitation and the lightning storm activity as reported by the nearly 100 fire weather stations scattered throughout the mountain area and the 22 Project Skyfire special fire lookout stations.

Briefing for the Day's Operation

At 08.15, the project leaders gathered at the airport for a briefing. If the forecast was favorable for an operational day, the project leaders checked over their duties, supplies, the manpower available and, after agreeing on the procedures to follow, departed for their respective observation posts. Since cumulus clouds in the test area rarely formed before 11.30 and the trip to the various locations required about an hour of driving, it was quite feasible to have the posts manned and all observational equipment operating before cumulus activity was underway. At the end of the briefing, word was also sent by telephone to the generator operations crew so they could arrange their activity to fit into the day's schedule.

Manning of Observation Sites

About 11.30, all posts were in operational order. As each station was set up, the word was transmitted by radio to the control station so the individual charged with coordinating activities knew that proper observational data would be obtained. During most of the 1957 field season, the control site was located at West Fork Butte L.O. where both radio and telephone ground line were available. This site is shown in Figure 4. With the latest field information available on the current weather and seeing the condition of the sky, the controller then telephoned the flight crew, who were in standby status, and instructed them on take-off schedule and operational procedure. At this time, the flight observer was given a rough schedule for his operation. This would be supplemented by radio instructions during the flight in the area.

Exploratory Flight Operations

During each operational day, plans called for an exploratory flight during the active part of the day. The Cessna 180 would be flown to the test area, following instructions telephoned from the control site. Ordinarily, the flight was called for when the first small cumulus clouds appeared in the area. Upon take-off, the plane would be headed for the region above the generator lines, climbing as it traveled. In this manner, when that area was reached, the plane would be close to cloud base altitude. The temperature and height at cloud base would be measured and this information relayed to the control station where it was checked against the forecast. Information on up-drafts was also given by the pilot and observer. The plane crew was then released for a period, to attempt to survey the location of the plume of silver iodide particles rising from the ground generators. Measurements were made with a light, portable, cold chamber, samples being taken both in the vicinity of the generators and in areas beyond possible influence of the generators, the latter observations being made to establish the background level of natural ice-forming nuclei in the air which might also modify the clouds, if present in sufficient concentration. The silver iodide plume boundary was generally established by sampling the convective air immediately downwind of the generator line and in similar locations and altitudes farther downwind. After the nuclei observations were completed, the plane was then flown into the test area and observations made of cloud-top elevations and temperatures. In addition, the observer was often requested to determine the nature of the clouds, using optical effects or taking samples of glaciation, virga or precipitation. They might also be requested to survey and report on the behavior of clouds in areas adjacent to the test region and beyond the possible influence of the silver iodide emitted by the ground generators. Occasionally the plane was utilized to do some-localized seeding, using either an airborne silver iodide generator or small quantities of dry ice.

The use of the Cessna 180 proved to be eminently satisfactory. Not a single case of difficulty was encountered due to malfunction of the aircraft. Whenever a flight was needed, it was available; and by flying the plane properly, it was found to be eminently satisfactory for scouting, sounding, seeding and general observational use below 20000 ft.

The Use of Time Lapse Cameras

The time lapse camera provides one of the best possible records of the reactions which occur during an operational day. A number of such cameras were used, including a pair of full sky cameras for making triangulation measurements of cloud position, an extreme wide angle camera (84°) for covering most of the test area and the adjacent regions, and several ordinary time lapse cameras with 9.5 mm, 17 mm and 25 mm focal lengths. These were used to obtain detailed observations of reactions occurring in the test area. In a number of instances it was possible to orient the camera so that it included both the plume area and the region adjacent to it. In this manner both seeded and unseeded clouds appeared in the same sequences. Two-second interval periods were used for the reaction studies, 60 to 120 s intervals for the full sky and 84° horizon came as,

The Use of Still Cameras

While rate of growth and cloud location data could be obtained from the time lapse cameras, the 16 mm pictures are too small for illustrative use and ready reference. A group of still cameras were used for this purpose, including 35 mm color cameras, specially constructed panoramic cameras providing about 90° of the horizon on a film $2\frac{1}{4}'' \times 6''$, several $4'' \times 5''$ press cameras and a $3\frac{1}{4}'' \times 4\frac{1}{4}''$ Land Polaroid Camera. This latter camera was used extensively to provide a current record of the typical clouds and effects observed during the active part of the day. The photographs obtained with this camera were used to illustrate the log obtained at the control site and proved to be extremely useful in post-briefing discussions of the operation and for classifying the general nature of the operational day.

The Use of a Mobile Radar Unit

About $9\frac{1}{2}$ miles NNW of the control site at West Fork Butte, a mobile radar unit was located on the peak of a grass-covered knob near the top of a long narrow ridge close to the northern edge of the test area. This was an APS-2 10 cm aircraft radar, modified so it could be controlled from within a small 14 ft house trailer. A retractable plastic dome made it weather proof. A time lapse camera photographed a slave scope and related clock, elevation indicator and title board. This radar was activated by portable generators and was operated whenever there were suitable clouds within sixty miles of the area.

The Use of Cloud Theodolites

During the period of 11.30–14.30, which was generally the most active part of the day, cloud growth studies were often made, using cloud theodolites [7]. In addition to rate of growth studies, the exact location and elevation of cloud base and top were determined, using azimuths obtained from control and radar sites. An accurate field map at each site permitted the observers to triangulate the cloud and thus have current information on the cloud behavior, probable temperatures and the likelihood of it being affected by the plume from the silver iodide ground generators.

The Release of Free Lift and Zero Lift Balloons

During the course of an operational day, and especially during the period of initial cloud activity, a number of small 30 g balloons were launched from the several field stations. These were used to determine air motions both in terms of local trajectories and the presence or lack of convective movements.

The balanced or zero lift balloon was particularly useful at the generator site, especially when the lines were first operated. A 30 g balloon was inflated with helium or hydrogen and then weighted with a small tree branch. Twigs or leaves were then removed until the balloon showed just a trace of buoyancy. It was then released and followed by theodolite or binoculars until lost to view. Ordinarily, the balloon could be followed for seven to ten minutes, if convection was underway. Earlier in the day, if drainage winds were dominant, the balloon would either remain near the release point or would quickly be lost from view as it moved down into the valley.

If, at either the control or radar site, the local winds or cloud motions showed a considerable variation from the forecast, a 30 or 100 g free balloon would be released and a pilot-balloon run made to determine any changes which had occurred in the wind field.

Occasionally zero lift balloons were released from the radar site and followed by a 1 m range finder. This method was found to be very useful and extremely easy to accomplish, especially when a thin strip of 1/2" wide 0.001" thick aluminium foil was used as the weight. The sparkling foil was an ideal object for obtaining an accurate fix on the balloon location.

The Use of a Tethered Balloon or Kite for Local Wind Observations

Since the wind field in a mountainous area follows an extremely complex pattern and modifications occur quite frequently, experiments were conducted to determine if a method could be devised for making continuous observations.

A 500 g balloon was tethered by nylon cord with smaller balloons on 10 m strings placed at 100 m intervals along the cord. This method provided very good indications of the air motions under conditions of light winds. However, as the wind increased with altitude, the balloon tended to lay over more and more until its usefulness was nullified.

A few experiments with a box kite indicated that such a device would solve this problem. The stronger the wind, the higher such a kite climbs, so that it is quite possible the air motions at least to cloud base could be continuously observed. Small balloons or streamers of different color placed at 200 m spacings would provide indications of the local wind field. Not enough time was available to develop this technique, but it would provide extremely useful data, if successful.

Observations of Local Weather

At each location hourly weather observations were made. These included wet and dry bulb temperatures, wind velocity and direction, condition of the sky, amount and distribution of cloudiness, location and number of lightning strokes, if any, storm tracks and precipitation.

If any special changes occurred between the regular observation periods, these were included in the records. Time of appearance and location of the first cumulus clouds, the first glaciation, virga, precipitation and lightning were also noted.

Observations of Atmospheric Electricity

During the 1957 operation, the main emphasis of the field operation was directed toward the development of adequate observational techniques, to obtain sufficiently detailed records for reconstructing changes which occurred in the clouds over the test area and the immediately adjacent regions, to permit an objective evaluation of cloud modification effects. Although the subject of atmospheric electricity was given a high priority listing, it was not feasible to get the necessary field installations in time for the field operations. Some corona current measurements were obtained from time to time [8]. The results merely emphasized the importance of such measurements and the interesting effects which could be obtained if suitable instrumentation were available. This activity resulted in the decision to pay particular attention to this subject during the 1958 field season.

Data Collection

For each operational day a mass of data was accumulated. To keep this information in order and to make sure that adequate records were being obtained, a folder was prepared for each active day's operation. A check list fastened to the outer cover indicated the completeness of the file. A certain degree of lag

in completing the file was inevitable, especially with respect to the photographic records. However – by using nonoperational days to work up some of the current data, the individuals charged with conducting the analysis quickly discovered the importance of closing the gaps and keeping their own contributions up to date. This helped a great deal in having good data for the arduous job of evaluation which was carried out for several months after the field operations ended.

Based on these studies, a number of forms were developed to greatly simplify data recording. These forms not only improved the reporting results but served to insure that the data obtained included the information necessary for satisfactory evaluation operations.

Conclusions

The results of the 1957 field season were highly encouraging [9]. From the field experiences emerged a much better understanding of atmospheric behavior in the northern Rockies. As this knowledge increased we found it possible to anticipate certain reactions and to recognize unique effects which might possibly become as important to the field experimentalist in meteorology as the rain gauge and stream flow measurements are to the flood forecaster and hydrologist.

In previous years attempts have been made to tag and trace air parcels with aerosols made of fluorescent powder [10]. Silver iodide is a far more sensitive and effective substance [11]. It is entirely feasible to produce at least 10^{16} detectable particles from 1 g of material. As experience is gained of the unique effects caused by the introduction of silver iodide into subcooled clouds, it will probably become unnecessary to establish its presence by any other means than the unusual visible changes which occur in them.

The 1957 results of Project Skyfire showed conclusively that it is quite feasible to introduce enough silver iodide into cumulus clouds by suitably located silver iodide ground based generators to produce unnatural effects wherever the clouds were colder than -4°C . The complete change from subcooled cloud droplets to masses of ice crystals occurs rapidly and produces spectacular changes. These are three basic changes commonly seen in clouds being modified by silver iodide. The first effect is the glaciation of the edges as shown in Figure 5. This is observed at the dissipating edges of the clouds. If ice crystals have not formed in these portions, the fringes disappear by evaporation within 60 s, often in a third of that time. If ice crystals have formed, the fringes persist for many minutes as fuzzy diffuse areas of ice crystals forming false cirrus clouds. Optical effects due to the ice crystals are rarely seen.

The second effect which follows the initial glaciation is illustrated in Figure 6. If the cloud base is near the 0°C level 13,000 to 15,000 ft. M.S.L. (of frequent occurrence in the northern Rockies), the shift to ice crystals is often

noticed to begin at the bottom of the cloud and progress upwards until the entire cloud has turned to a mass of ice crystals. Natural clouds tend to show the change to ice crystals at the top, the base rarely, if ever, showing this change in phase. The illustration is an excellent example of natural and unnatural effects, since the silver iodide plume causing the change of the middle cloud was from a narrow stream of silver iodide diverted by a local wind shift from a plume whose major axis was at right angles to this local wind development.

The third effect is illustrated in Figure 7 which is essentially an extended phase of the effect shown in Figure 6. In this case a sustained thermal forms a cloud over an active cloud breeding spot. In addition to carrying moisture upward and into the cloud base, silver iodide is also in the rising air. As the cloud droplets subcool to about -5°C , ice crystals form and grow at the expense of the cloud droplets. Depending on the concentration of silver iodide carried into the clouds, the ice crystals which form on the iodide particles either immediately use up all of the available moisture, or, if the concentration is low, the crystals which form sweep up some of the droplets to form soft hail or snow pellets (Graupel). Figure 8 illustrates an excellent example of changes in cloud structure due to seeding from ground-based generators.

By shifting clouds to ice crystals continuously at an early stage of their development, as rarely happens under natural conditions, it is hoped that the charge separation process which leads to lightning generation may be disrupted or at least modified to the extent the cloud-to-ground strikes are reduced or prevented. Whether this will be the direction that will be successful in achieving lightning storm modification can only be answered by additional studies. Besides studying changes in the nature of the cloud particles, more study of the electrical effects occurring in natural and seeded clouds is needed. The 1958 Skyfire program is directed toward obtaining data on the electrical properties of both seeded and unseeded clouds.

Acknowledgments

The authors wish to express their sincere thanks to all personnel associated with Project Skyfire for the cooperation they invariably enjoyed from all while they operated the control station on West Fork Butte during the 1957 field season. Appreciation is also extended to PAT and ROY CARLSON, who were the fire lookouts on the mountain, and the personnel of the Lolo Ranger District for the many ways in which they made the job easier.

REFERENCES

- [1] J. S. BARROWS, V. J. SCHAEFER, and PAUL B. MACCREADY Jr., *Project Skyfire A Progress Report on Lightning Fire and Atmospheric Research*, Research Paper No. 35 (1954). Intermountain Forest and Range Expt. Sta., U.S. Forest Service.

- [2] V. J. SCHAEFER, *The Possibilities of Modifying Lightning Storms in the Northern Rockies*, Station Paper No. 19 (1949). Northern Rocky Mt. Forest and Range Expt. Sta. US. Forest Service.
- [3] V. J. SCHAEFER, *Cloud Photography Project*, Weatherwise 6, 72 (1953).
- [4] J. S. BARROWS *et al.*, *Project Skyfire*, vol. II: *Final Report Advisory Committee on Weather Control*, pp. 105–111 (1957). US. Govt. Print. Off.
- [5] J. S. BARROWS *et al.*, *Project Skyfire*, vol. II: *Final Report Advisory Committee on Weather Control*, pp. 112–113 (1957). US. Govt. Print. Off.
- [6] D. M. FUQUAY and H. J. WELLS, *The Project Skyfire Cloud Seeding Generator*, Research Paper No. 48 (1957). Intermountain Forest and Range Expt. Sta., US. Forest Service.
- [7] PAUL B. MACCREADY JR., *The Munitalp Cloud Theodolite*, Bull. Amer. met. Soc. 38, 460 (1957).
- [8] V. J. SCHAEFER, *Atmospheric Electrical Measurements in the Hawaiian Islands*, Geofis. pura appl. 34, 209 (1956).
- [9] J. S. BARROWS *et al.*, *Project Skyfire*, vol. II: *Final Report Advisory Committee on Weather Control*, pp. 119–125 (1957). US. Govt. Print. Off.
- [10] W. D. CROZIER and B. K. SEELEY, *Concentration Distributions in Aerosol Plumes 3–22 Miles from a Point Source*, Trans. Amer. geophys. Union 36, 42 (1955).
- [11] V. J. SCHAEFER, *The Use of Silver Iodide as an Air Tracer*, J. Met. 15, 121 (1958).

Zusammenfassung

Während den Monaten Juli und August 1957 sind 30 AgI-Bodengeneratoren, die bei einem gegenseitigen Abstand von einer halben Meile in zwei gekreuzten Reihen auf einem hohen Kamm der Bitterrooth Mountains längs der Grenze Montana-Idaho angeordnet waren, eingesetzt worden, um das Ausmass der Veränderungen zu erforschen, welches erreicht werden kann, wenn unterkühlte Wolken mit Silberjodid-Rauch beschickt werden.

Auffallende Veränderungen sind wahrgenommen worden, wenn der Generatorenrauch Kumuluswolken verschiedener Grösse erreichte. Die Wirkungen sind von der Leitstation des Projekts Skyfire auf West Fork Butte aus beobachtet und im Lichtbild von den Autoren, die während des ganzen Sommerprogrammes des Skyfire-Projektes den Posten betreuten, festgehalten worden. Die Lage der AgI-Fahnen ist einerseits durch Verwendung von Pilot- und Schwebeballonen, die von den Generatoren aus gestartet wurden, und andererseits durch den Einsatz von tragbaren Kühlkammern, die im Auto oder Flugzeug transportiert wurden, ermittelt worden. Die Ergebnisse der AgI-Impfungen sind derart ungewöhnlich, dass erwartet werden kann, weitere Studien würden die Möglichkeit erschliessen, durch die Beobachtung der tatsächlich sich einstellenden Veränderungen an Wolken, die Rauchfahne örtlich festzulegen, insbesondere wenn die Wolken klein und nicht kälter als -10°C sind.

(Received: May 5, 1958.)



Figure 1

Forest fire lookout cooperating with Project Skyfire, Gisborne Mt. L. O., Idaho.



Figure 4

West Fork Butte L. O. Site of 1957 control station of Project Skyfire.

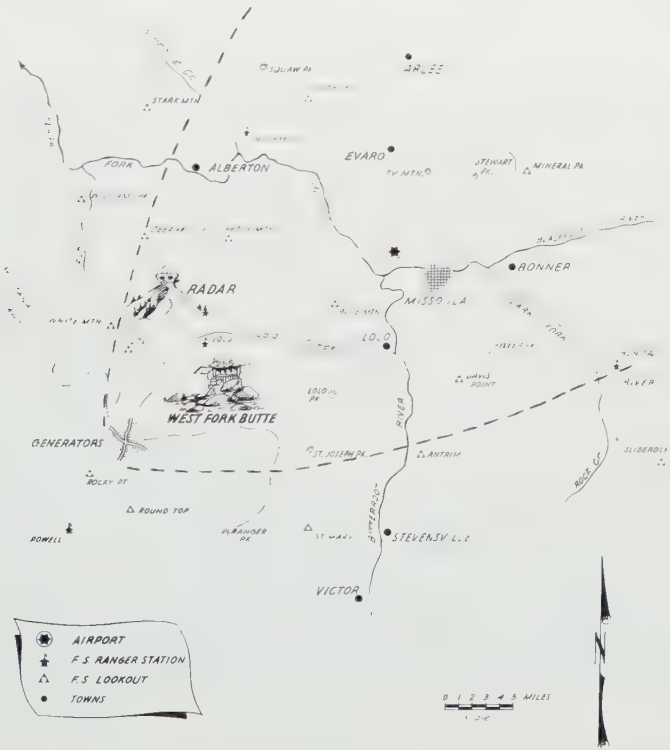


Figure 2

Location of Project Skyfire test area in Western Montana.



Figure 3
Location of test area with respect to Project Skyfire cloud observation lookout-stations.



Figure 5
Initial modification of supercooled cloud by silver iodide – the ice halo or glaciation halo effect.
Note unaffected cloud beyond edge of plume.



Figure 6

Effect produced in a cloud by silver iodide. A narrow finger of the plume reached the center cloud without modifying the clouds on either side. August 22, 1957.

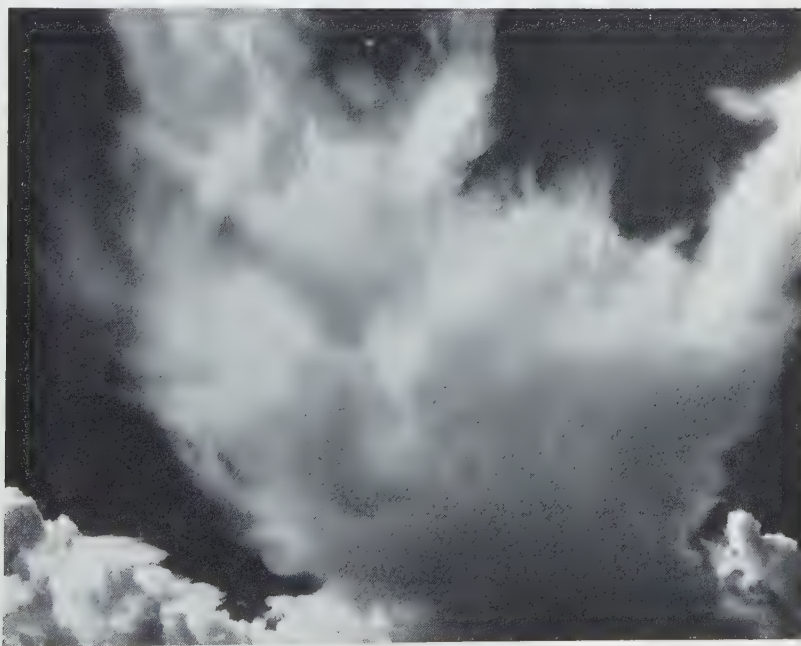


Figure 7

Major effect caused in cloud due to silver iodide seeding by ground generator. August 22, 1957.



Figure 8

Typical example of effective cumulus cloud seeding observed during a Project Skyfire operation.

Eine wahrscheinlichkeitstheoretische Begründung der Integrationsformeln von Newton-Cotes

VON WERNER UHLMANN, Hamburg, Deutschland¹⁾

Ein bestimmtes Integral einer reellen Funktion soll mit Hilfe eines Mittelwertverfahrens mit äquidistanten Stützstellen approximiert werden. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass das Integrationsintervall symmetrisch zum Nullpunkt liegt. Es soll also

$$J = \int_{-nh}^{-nh} x(t) dt \quad \text{näherungsweise gleich} \quad \tilde{J} = \sum_{i=-n}^n a_i x(ih)$$

sein. Es kommt dann darauf an, die Koeffizienten a_i möglichst günstig zu wählen. Dafür gibt es zwei Möglichkeiten, die naturgemäss zu denselben Werten a_i führen (Formeln von NEWTON-COTES): 1. Man fordert, dass für Polynome bis zu möglichst hohem Grade $J = \tilde{J}$ ist. Neben den guten numerischen Erfahrungen besteht eine gewisse theoretische Rechtfertigung im Approximationsatz von WEIERSTRASS. 2. Man verlangt, dass die Taylor-Entwicklungen nach h von J und \tilde{J} bis zu Gliedern möglichst hoher Ordnung übereinstimmen. Dieses Vorgehen hat den Vorteil, dass es zugleich Fehlerabschätzungen liefert; dafür sind aber auf der anderen Seite Differenzierbarkeitsvoraussetzungen zu machen, die für das bloße Integrieren unnötig sind.

Es ist daher von Interesse, das Problem ohne solche Differenzierbarkeitsvoraussetzungen zu behandeln. Eine Möglichkeit dazu besteht in der Heranziehung der Theorie der stochastischen Prozesse. Auf dieser Grundlage hat CH. BLANC [1]²⁾ teilweise zusammen mit W. LINIGER [2] den Fehler für verschiedene gegebene Näherungsverfahren untersucht. In dieser Arbeit³⁾ soll nun umgekehrt festgestellt werden, welches das günstigste Verfahren im Sinne dieser stochastischen Fehlerauswertung ist und welche Eigenschaften es hat.

¹⁾ Institut für Versicherungsmathematik und mathematische Statistik der Universität Hamburg.

²⁾ Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, S. 206.

³⁾ Der Vereinsbank in Hamburg ist für die Bereitstellung von Mitteln zur Durchführung dieses Forschungsvorhabens zu danken.

1. Problemstellung

Es sei $\xi(t)$ ein stochastischer Prozess (vgl. [3] oder [4]). Jede Realisierung dieses Prozesses ist eine reellwertige Funktion $x(t)$ der reellen Variablen t im gewöhnlichen Sinne. Wir setzen voraus, dass die folgenden Erwartungswerte existieren, und zwar sei für alle t

$$E[\xi(t)] = 0 \quad \text{und} \quad E[\xi^2(t)] = 1. \quad (1)$$

Dann ist $r(t, t') = E[\xi(t) \xi(t')]$ die Korrelationsfunktion, und wir setzen voraus, dass sie nur von $t - t'$ abhängt:

$$E[\xi(t) \xi(t')] = R(t - t'). \quad (2)$$

Wir haben also einen stationären stochastischen Prozess im weiteren Sinne (von 2. Ordnung) vorliegen. Diese Voraussetzungen können wohl für unsere Zwecke als sinnvoll und gerechtfertigt angesehen werden.

Wir setzen

$$S(t) = \int_0^t R(\tau) d\tau. \quad (3)$$

Dann ist ersichtlich

$$R(0) = 1, \quad R(-t) = R(t), \quad S(0) = 0, \quad S(-t) = -S(t). \quad (4)$$

Die Frage, welche Funktionen als Korrelationsfunktionen auftreten können, beantwortet der Satz von KHINTCHINE [5]. Zwei Möglichkeiten sind zum Beispiel: $R(t) = \sin \omega t / \omega t$, $\omega > 0$ (vgl. [2]) und $R(t) = e^{-t^2/2\sigma^2}$, $\sigma > 0$.

Unter diesen Voraussetzungen ist ($h > 0$, n natürliche Zahl ≥ 1)

$$\eta = \int_{-nh}^{+nh} \xi(t) dt - \sum_{i=-n}^n a_i \xi(ih) \quad (5)$$

eine zufällige Variable mit $E[\eta] = 0$, die für jede Realisierung $x(t)$ den Fehler der näherungsweisen Integration darstellt. Es sei bemerkt, dass hier die Anzahl der Stützstellen gleich $(2n + 1)$ ist. Man kann aber sofort auch den Fall einer geraden Anzahl von Stützstellen erfassen, indem man von vornherein n ungerade und $a_{2i} = 0$ wählt für

$$i = 0, \pm 1, \dots, \pm \frac{n-1}{2};$$

nur ist die Schrittweite dann $2h$.

Als Mass für die Güte der Näherung wollen wir den Erwartungswert $E[\eta^2]$ benutzen. Bei vorgegebener Korrelationsfunktion ist η und damit auch $E[\eta^2]$ eine Funktion der Schrittweite h und der Koeffizienten a_i .

Man rechnet leicht nach (vgl. [1]), dass

$$E[\eta^2] = 2 \int_0^{2nh} S(t) dt - 2 \sum_{i=-n}^n a_i \{S((n+i)h) + S((n-i)h)\} + \sum_{k,i=-n}^n a_k a_i R((i-k)h) \quad (6)$$

ist. Beschränkt man sich auf den Fall symmetrischer Integrationsformeln (das heisst $a_i = a_{-i}$ für $i = 1, 2, \dots, n$), so lässt sich (6) umformen zu

$$E[\eta^2] = 2 \int_0^{2nh} S(t) dt - 4 a_0 S(nh) - 4 \sum_{i=1}^n a_i \{S((n+i)h) + S((n-i)h)\} + a_0^2 + 4 \sum_{i=1}^n a_0 a_i R(ih) + 2 \sum_{k,i=1}^n a_k a_i \{R((i+k)h) + R((i-k)h)\} \quad (7)$$

Unser Problem ist es, die Koeffizienten a_i so zu bestimmen, dass $E[\eta^2]$ minimal ausfällt. Jedes $(2n+1)$ -Tupel (a_{-n}, \dots, a_n) , für das $E[\eta^2] = \text{Min}$ ist, bezeichnen wir als Minimallösung. Bei gegebener Korrelationsfunktion hängt jede Minimallösung ersichtlich nur noch von h ab.

Es wird sich zeigen, dass jede Minimallösung näherungsweise gleich den Koeffizienten von NEWTON-COTES ist, und zwar unabhängig von der – immer etwas schwierig zu rechtfertigenden – Wahl der Korrelationsfunktion. Überdies wird bewiesen werden, dass $E[\eta^2]$ für die Minimallösung von derselben Grössenordnung ist wie für die Formeln von NEWTON-COTES. Zugleich erhält man Schätzwerte für den Fehler, die den bekannten Restgliedern bei NEWTON-COTES entsprechen, die aber statt der höheren Ableitungen des Integranden höhere Differenzen enthalten.

Zuvor wollen wir einen Zusammenhang zwischen der Korrelationsfunktion $R(t)$ und den höheren Differenzen von $\xi(t)$ herstellen. Wie üblich setzen wir

$$\Delta^\mu \xi(t) = \sum_{\nu=0}^{\mu} \binom{\mu}{\nu} (-1)^\nu \xi(t + (\mu - \nu)h) \quad \text{für } \mu = 0, 1, 2, \dots$$

Dann ist offenbar

$$E[(\Delta^\mu \xi(t))^2] = \sum_{\nu, \varrho=0}^{\mu} \binom{\mu}{\nu} \binom{\mu}{\varrho} (-1)^{\nu+\varrho} R((\nu - \varrho)h).$$

Wir setzen nun voraus, dass $R(t)$ $(2\mu + 2)$ -mal stetig differenzierbar ist und sich also darstellen lässt in der Form

$$R(t) = \sum_{\sigma=0}^{\mu} b_{2\sigma} t^{2\sigma} + O(t^{2\mu+2}), \quad (8)$$

wobei $b_0 = 1$ wegen (4) und O das Landau-Symbol ist.

Wir wollen zeigen, dass für $\mu = 0, 1, 2, \dots$ gilt:

$$E[(\Delta^\mu \xi(t))^2] = (-1)^\mu (2\mu)! b_{2\mu} h^{2\mu} + O(h^{2\mu+2}). \quad (9)$$

Beweis: Für $\mu = 0$ ist (9) offensichtlich richtig. Für $\mu \geq 1$ benutzen wir, dass

$$\sum_{\nu=0}^{\mu} \binom{\mu}{\nu} (-1)^\nu \nu^\tau = \begin{cases} (-1)^\mu \mu! & \text{für } \tau = \mu, \\ 0 & \text{für } \tau < \mu \end{cases}$$

ist, was sofort aus dem Mittelwertsatz für höhere Differentialquotienten angewendet auf die Funktion $y = x^\tau$ folgt. Nun ist unter Verwendung von (8):

$$\begin{aligned} E[(\Delta^\mu \xi(t))^2] &= \sum_{\sigma=0}^{\mu} \left[\sum_{\nu, \varrho=0}^{\mu} \binom{\mu}{\nu} \binom{\mu}{\varrho} (-1)^{\nu+\varrho} (\nu - \varrho)^{2\sigma} \right] b_{2\sigma} h^{2\sigma} + O(h^{2\mu+2}) \\ &\quad - \sum_{\sigma=0}^{\mu} \sum_{\tau=0}^{2\sigma} (-1)^\tau \binom{2\sigma}{\tau} \left[\sum_{\nu=0}^{\mu} \binom{\mu}{\nu} (-1)^\nu \nu^{2\sigma-\tau} \right] \left[\sum_{\varrho=0}^{\mu} \binom{\mu}{\varrho} (-1)^\varrho \varrho^\tau \right] b_{2\sigma} h^{2\sigma} \\ &\quad + O(h^{2\mu+2}) = (-1)^\mu (2\mu)! b_{2\mu} h^{2\mu} + O(h^{2\mu+2}). \end{aligned}$$

2. Existenz und Charakterisierung der Minimallösung

Nach (6) ist der Erwartungswert $E[\eta^2]$ als Funktion der $(2n+1)$ Koeffizienten a_i im ganzen $(2n+1)$ -dimensionalen Raum definiert. Da $\eta^2 \geq 0$ ist, ist es auch $E[\eta^2]$. Folglich ist die quadratische Form $\sum_{k,i=1}^n a_k a_i R((i-k)h)$ positiv semi-definit und die symmetrische Matrix $(R((i-k)h))$, deren Eigenwerte also ≥ 0 sind, lässt sich nicht-singulär auf Diagonalgestalt transformieren. Durch diese Transformation geht (6) über in eine Form, die – von einer additiven Konstanten abgesehen – nur noch quadratische Glieder enthält und der man also unmittelbar ansehen kann, dass $E[\eta^2]$ sein absolutes Minimum annimmt, und zwar auf einer linearen Mannigfaltigkeit, deren Dimension $= (2n+1) - [\text{Rang von } (R((i-k)h))]$ ist. Weiter folgt, dass diese Mannig-

faltigkeit genau die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=-n}^n a_i R((i-j)h) &= S((n+j)h) + S((n-j)h) \\ (j &= -n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ist, das man aus (6) durch partielle Differentiation von $E[\eta^2]$ nach den a_j erhält.

Damit sind die Minimallösungen in bekannter Weise als Lösungen von (10) charakterisiert. Sie sind nicht notwendig eindeutig bestimmt, aber jede Lösung von (10) ergibt denselben Wert von $E[\eta^2]$.

Für die Praxis interessieren nur symmetrische Lösungen (das heisst $a_i = a_{-i}$), und in der Tat rechnet man sofort nach, dass zu jeder Lösung von (10) – sagen wir a'_{-n}, \dots, a'_n – eine symmetrische Lösung existiert, nämlich $a_i = a_{-i} = (a'_i + a'_{-i})/2$. Für symmetrische Lösungen reduziert sich (10) auf

$$\left. \begin{aligned} a_0 R(jh) + \sum_{i=1}^n a_i \{ R((i-j)h) + R((i+j)h) \} \\ = S((n+j)h) + S((n-j)h) \quad (j = 0, 1, 2, \dots, n), \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

und man hat dann also nur noch $(n+1)$ lineare Gleichungen zu lösen.

Für den Fall einer geraden Anzahl von Stützstellen (n ungerade, $\tilde{a}_{2i} = 0$) sind nur die $(n+1)$ Koeffizienten $\tilde{a}_{-n}, \dots, \tilde{a}_{-1}, \tilde{a}_1, \tilde{a}_3, \dots, \tilde{a}_n$ zu bestimmen. Ersichtlich bleiben die obigen Betrachtungen sinngemäss richtig, nur entfallen natürlich in (10) und (11) alle Gleichungen für gerade j .

3. Die Integrationsformeln von Newton-Cotes

Bevor wir die Minimallösungen näher untersuchen, wollen wir einige bekannte Eigenschaften der Formeln von NEWTON-COTES zusammenstellen (vgl. etwa [6], teilweise auch [8]).

1. Ungerade Anzahl von Stützstellen

$x(t)$ sei im Intervall $(-nh, +nh)$ eine $(2n+4)$ -mal stetig differenzierbare Funktion. Das Integral

$$\int_{-nh}^{+nh} x(t) dt$$

soll angenähert werden durch

$$\sum_{i=-n}^n h \alpha_i x(ih) \quad \text{mit} \quad \alpha_i = \alpha_{-i}.$$

Aus der Taylor-Entwicklung des Fehlers

$$y(h) = \int_{-nh}^{nh} x(t) dt - \sum_{i=-n}^n h \alpha_i x(ih)$$

nach h erkennt man unmittelbar, dass die α_i eindeutig bestimmt sind als Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\sum_{i=-n}^n i^{2\sigma} \alpha_i = \frac{2}{2\sigma+1} n^{2\sigma+1} \quad \text{für } \sigma = 0, 1, \dots, n \quad (12)$$

und dass

$$y(h) = \frac{2}{(2n+2)!} \left\{ \frac{n^{2n+3}}{2n+3} - \sum_{i=1}^n i^{2n+2} \alpha_i \right\} h^{2n+3} x^{(2n+2)}(0) + O(h^{2n+5}) \quad (13)$$

ist. Unter Benutzung eines Interpolationspolynoms für $x(t)$ ergibt sich andererseits

$$y(h) = \frac{2}{(2n+2)!} r_n h^{2n+3} x^{(2n+2)}(\tau),$$

wobei τ passend aus $[-nh, +nh]$ und

$$r_n = \int_0^n \prod_{i=0}^n (t^2 - i^2) dt \neq 0 \quad (14)$$

ist. Also ist auch

$$\frac{n^{2n+3}}{2n+3} - \sum_{i=1}^n i^{2n+2} \alpha_i = r_n \neq 0. \quad (15)$$

2. Gerade Anzahl von Stützstellen

Hier sei $x(t)$ $(n+3)$ -mal stetig differenzierbar im Intervall $[-nh, +nh]$, wobei n ungerade ist. Das Integral

$$\int_{-nh}^{nh} x(t) dt$$

soll angenähert werden durch

$$\sum_{i=-n}^n h \tilde{\alpha}_i x(ih) \quad \text{mit} \quad \tilde{\alpha}_i = \tilde{\alpha}_{-i} \quad \text{und} \quad \tilde{\alpha}_{2k} = 0 \quad \text{für} \quad k = 0, 1, \dots, \frac{n-1}{2}.$$

Die verbleibenden $\tilde{\alpha}_i$ sind eindeutig bestimmt als Lösungen von

$$\sum_{\substack{i=1 \\ 2 \nmid i}}^n i^{2\sigma} \tilde{\alpha}_i = \frac{1}{2^{\sigma+1}} n^{2\sigma+1} \quad \text{für } \sigma = 0, 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}, \quad (16)$$

wobei wir die Schreibweise $2 \mid i$ für i gerade bzw. $2 \nmid i$ für i ungerade benutzen. Für den Fehler

$$y(h) = \int_{nh}^{n+h} x(t) dt - \sum_{\substack{i=1 \\ 2 \nmid i}}^n h \tilde{\alpha}_i x(ih)$$

ergibt sich

$$y(h) = \frac{1}{(n+1)!} \tilde{r}_n h^{n+2} x^{(n+1)}(\tau) = \frac{1}{(n+1)!} \tilde{r}_n h^{n+2} x^{(n+1)}(0) + O(h^{n+4}), \quad (17)$$

wobei τ passend aus $[-nh, +nh]$ und

$$\tilde{r}_n = \frac{n^{n+2}}{n+2} - \sum_{\substack{i=1 \\ 2 \nmid i}}^n i^{n+1} \tilde{\alpha}_i = \int_0^n \prod_{\substack{j=1 \\ 2 \nmid j}}^n (t^2 - j^2) dt \neq 0 \quad (18)$$

ist.

4. Taylor-Entwicklung der Minimallösungen

Wir denken uns jetzt die Korrelationsfunktion $R(t)$ vorgegeben. Dann hängen die durch (10) bestimmten Minimallösungen nur noch von h ab. Wir wollen beweisen, dass unter gewissen Voraussetzungen die Taylor-Entwicklung jeder Minimallösung mit den Koeffizienten von NEWTON-COTES beginnt, dass also die Koeffizienten von NEWTON-COTES näherungsweise Minimallösungen sind.

Zunächst wollen wir den Fall einer ungeraden Anzahl von Stützstellen behandeln.

Wir setzen voraus, dass $R(t)$ $(4n+5)$ -mal stetig differenzierbar ist. Dann lässt sich $R(t)$ schreiben in der Form

$$R(t) = \sum_{i=0}^{2n+1} b_{2i} h^{2i} + O(h^{4n+4}) \quad (19)$$

mit $b_0 = 1$. Denkt man sich das Gleichungssystem (10) bzw. (11) nach dem Gaußschen Eliminationsverfahren aufgelöst und die frei wählbaren $a_i(h)$ hinreichend oft differenzierbar gewählt, so erkennt man, dass alle $a_i(h)$ ebenfalls $(4n+5)$ -mal stetig differenzierbar sind und dass die Taylor-Entwicklungen der $a_i(h)$ nur ungerade Potenzen von h enthalten. Wir können also schreiben:

$$a_i(h) = \sum_{j=1}^{2n+2} \alpha_{i,2j-1} h^{2j-1} + O(h^{4n+5}). \quad (20)$$

Weiter setzen wir voraus, dass für $\tau = 1, 3, 5, \dots, 2n + 1$

$$\det [{}_{(\mu-\tau)}^{(\mu-\nu)} b_{\mu-\nu}] \neq 0 \quad (21)$$

ist; dabei durchläuft der Zeilenindex μ die Werte $\tau, \tau + 2, \dots, 2\tau - 1$ und der Spaltenindex ν die Werte $1, 3, 5, \dots, \tau$.

Diese Voraussetzung (21) ist zum Beispiel erfüllt für die im 1. Abschnitt erwähnten Korrelationsfunktionen, wie die folgenden beiden Hilfssätze zeigen.

Hilfssatz: Für $R(t) = \sin \omega t / \omega t$ mit $\omega > 0$ ist für alle τ (τ ungerade)

$$D = \det [{}_{(\mu-\tau)}^{(\mu-\nu)} b_{\mu-\nu}] \neq 0.$$

Beweis: Für

$$R(t) = \frac{\sin \omega t}{\omega t} = \sum_{\varrho=0}^{\infty} (-1)^{\varrho} \frac{\omega^{2\varrho}}{(2\varrho+1)!} t^{2\varrho}$$

ist

$${}_{(\mu-\tau)}^{(\mu-\nu)} b_{\mu-\nu} = \frac{(-1)^{\mu/2} \omega^{\mu}}{(\mu-\tau)!} \cdot \frac{(-1)^{\nu/2} \omega^{-\nu}}{(\tau-\nu)!} \cdot \frac{1}{(\mu-\nu+1)}.$$

Da es uns nur auf das Verschwinden bzw. Nichtverschwinden von D ankommt, bezeichnen wir mit c_1, c_2, \dots passende reelle Zahlen $\neq 0$. Wir können dann schreiben

$$D = c_1 \det \left(\mu - \frac{1}{\nu+1} \right).$$

Wir setzen $(\tau+1)/2 = m$, $\mu = \tau + 2i - 2$, $\nu = \tau - 2k + 2$ und erhalten

$$D = c_1 \det \left(\frac{1}{2i + 2k - 3} \right),$$

wobei $i, k = 1, 2, 3, \dots, m$. Um zu beweisen, dass $D \neq 0$ ist, zeigen wir gleich allgemeiner: Für jede natürliche Zahl $m \geq 1$ und jede natürliche Zahl $M \geq 1$ ist

$$\det \left(\prod_{\nu=1}^M \frac{1}{2i + 2k + 2\nu - 5} \right)_m \neq 0, \quad (22)$$

wobei der Index m andeuten soll, dass i und k die Zahlen $1, 2, \dots, m$ durchlaufen. Wir beweisen (22) durch vollständige Induktion nach m . Für $m = 1$ ist (22) offensichtlich richtig, und für den Schluss von $(m-1)$ auf m benutzen wir, dass bekanntlich für jede beliebige Determinante

$$\det (a_{i,k})_m = \left(\prod_{k=1}^m a_{m,k} \right) \det \left(\frac{a_{i,k}}{a_{m,k}} - \frac{a_{i,k+1}}{a_{m,k+1}} \right)_{m-1} \quad (23)$$

ist, wenn nur $a_{m,k} \neq 0$ ist für $k = 1, 2, \dots, m$ ($m > 1$). Damit rechnet man

sofort nach, dass

$$\det \left(\prod_{\nu=1}^M \frac{1}{2i + 2k + 2\nu - 5} \right)_m = c_2 \det \left(\prod_{\nu=1}^{M-1} \frac{1}{2i + 2k + 2\nu - 5} \right)_{m-1}$$

ist, und die rechte Determinante ist $\neq 0$ nach Induktionsannahme.

Hilfssatz: Für $R(t) = e^{-t^2/2\sigma^2}$ mit $\sigma > 0$ ist für alle τ (τ ungerade)

$$D_1 = \det [{}_{\mu-\tau}^{(\mu-\nu)} b_{\mu-\nu}] \neq 0.$$

Beweis: Für

$$R(t) = e^{-t^2/2\sigma^2} = \sum_{\varrho=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\varrho}}{\varrho! 2^{\varrho} \sigma^{2\varrho}} t^{2\varrho}$$

ist

$${}_{\mu-\tau}^{(\mu-\nu)} b_{\mu-\nu} = \frac{(\mu-\nu)!}{((\mu-\nu)/2)!} \cdot \frac{(-1)^{\mu/2}}{(\mu-\tau)! 2^{\mu/2} \sigma^{\mu}} \cdot \frac{(-1)^{\tau/2}}{(\tau-\nu)! 2^{-\tau/2} \sigma^{-\tau}}.$$

Mit den oben eingeführten Bezeichnungen ist also

$$D_1 = c_3 \det \left(\frac{(\mu-\nu)!}{((\mu-\nu)/2)!} \right) = c_3 \det \left(\frac{(2i + 2k - 4)!}{(i + k - 2)!} \right)_m.$$

Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion nach m . Der Fall $m = 1$ ist trivial, und für den Schluss von $(m-1)$ auf m benutzen wir (23). Man rechnet leicht nach, dass

$$D_1 = c_3 \det \left(\frac{(2i + 2k - 4)!}{(i + k - 2)!} \right)_m = c_4 \det \left(\frac{(2i + 2k - 4)!}{(i + k - 2)!} \right)_{m-1}$$

ist, und die rechte Seite ist $\neq 0$ nach Induktionsannahme.

Wir behaupten nun:

Satz: Unter den einleitend angeführten Voraussetzungen (19), (20) und (21) sind die $\alpha_{i,1}$ ($i = n, \dots, -n$) die Koeffizienten von NEWTON-COTES, das heisst, sie genügen den Gleichungen (12).

Wir beweisen gleich etwas mehr:

Satz: Unter den Voraussetzungen (19), (20) und (21) erfüllen die $\alpha_{i,\nu}$ die folgenden Gleichungen für $\tau = 1, 3, 5, \dots, 2n+1$ ($n \geq 1$):

$$\sum_{i=-n}^n i^{\tau-1} \alpha_{i,1} = \frac{2}{\tau} n^{\tau}, \quad (24)$$

$$\sum_{i=-n}^n i^{\tau-\nu} \alpha_{i,\nu} = 0 \quad \text{für } \nu = 3, 5, \dots, \tau, \quad (25)$$

$$\left. \begin{aligned} & \binom{\mu-1}{\mu-\sigma} b_{\mu-1} \left[\sum_{i=-n}^{+n} i^{\sigma-1} \alpha_{i,1} - \frac{2}{\sigma} n^{\sigma} \right] + \sum_{\substack{\nu=3 \\ 2 \nmid \nu}}^{\sigma} \binom{\mu-\nu}{\mu-\sigma} b_{\mu-\nu} \left[\sum_{i=-n}^{+n} i^{\sigma-\nu} \alpha_{i,\nu} \right] = 0, \\ & \text{für } \sigma = 1, 3, 5, \dots, \mu \text{ und } \mu = 1, 3, 5, \dots, 2n+2+\tau. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Beweis: Es sei $a_i(h)$ eine symmetrische Minimallösung der Form (20). Die $a_i(h)$ genügen also dem Gleichungssystem (10), und zwar identisch in h . Wir differenzieren nun (10) μ -mal nach h und erhalten für $j = -n, \dots, +n$

$$\begin{aligned} \sum_{i=-n}^{+n} \sum_{\nu=0}^{\mu} \binom{\mu}{\nu} a_i^{(\nu)}(h) (i-j)^{\mu-\nu} R^{(\mu-\nu)}((i-j)h) \\ = (n+j)^{\mu} R^{(\mu-1)}((n+j)h) + (n-j)^{\mu} R^{(\mu-1)}((n-j)h) \end{aligned}$$

und insbesondere für $h = 0$

$$\sum_{i=-n}^{+n} \sum_{\nu=0}^{\mu} \binom{\mu}{\nu} a_i^{(\nu)}(0) (i-j)^{\mu-\nu} R^{(\mu-\nu)}(0) = [(n+j)^{\mu} + (n-j)^{\mu}] R^{(\mu-1)}(0). \quad (27)$$

Wegen $a_i^{(\nu)}(0) = 0$ für ν gerade und $R^{(\nu)}(0) = 0$ für ν ungerade verschwinden die rechte und die linke Seite von (27) für μ gerade.

Für ungerade μ und $j = -n, \dots, +n$ folgt aus (27)

$$\sum_{i=-n}^{+n} \sum_{\substack{\nu=0 \\ 2 \nmid \nu}}^{\mu} \binom{\mu}{\nu} (i-j)^{\mu-\nu} \alpha_{i,\nu} b_{\mu-\nu} = [(n+j)^{\mu} + (n-j)^{\mu}] b_{\mu-1}, \quad (28)$$

und das ist gleichbedeutend mit (beachte $\alpha_{i,\nu} = \alpha_{-i,\nu}$)

$$\sum_{\substack{\nu=0 \\ 2 \nmid \nu}}^{\mu-1} j^{\nu} \left\{ \left[\sum_{\substack{\nu=1 \\ 2 \nmid \nu}}^{\mu-1} \binom{\mu-\nu}{\nu} b_{\mu-\nu} \sum_{i=-n}^{+n} i^{\mu-\nu-\nu} \alpha_{i,\nu} \right] - 2 \binom{\mu}{2} n^{\mu-2} b_{\mu-1} \right\} = 0. \quad (29)$$

Wir setzen nun $\sigma = \mu - \varrho$ und erhalten damit

$$\sum_{\substack{\sigma=1 \\ 2 \nmid \sigma}}^{\mu} j^{\mu-\sigma} \mu \left\{ \binom{\mu-1}{\mu-\sigma} b_{\mu-1} \left[\sum_{i=-n}^{+n} i^{\sigma-1} \alpha_{i,1} - \frac{2}{\sigma} n^{\sigma} \right] + \sum_{\substack{\nu=3 \\ 2 \nmid \nu}}^{\sigma} \binom{\mu-\nu}{\mu-\sigma} b_{\mu-\nu} \left[\sum_{i=-n}^{+n} i^{\sigma-\nu} \alpha_{i,\nu} \right] \right\} = 0 \quad (30)$$

für μ ungerade und $j = -n, \dots, +n$.

Nun ist die linke Seite von (30) ein Polynom in j vom Grad $\leq \mu - 1$ mit $(2n+1)$ verschiedenen Nullstellen ($j = -n, \dots, +n$). Daher verschwinden für $\mu < 2n+2$ alle Koeffizienten, und es ergibt sich also

$$\binom{\mu-1}{\mu-\sigma} b_{\mu-1} \left[\sum_{i=-n}^{+n} i^{\sigma-1} \alpha_{i,1} - \frac{2}{\sigma} n^{\sigma} \right] + \sum_{\substack{\nu=3 \\ 2 \nmid \nu}}^{\sigma} \binom{\mu-\nu}{\mu-\sigma} b_{\mu-\nu} \left[\sum_{i=-n}^{+n} i^{\sigma-\nu} \alpha_{i,\nu} \right] = 0 \quad (31)$$

für $\sigma = 1, 3, 5, \dots, \mu$ und $\mu = 1, 3, 5, \dots, 2n+1$.

Unter Benutzung von (30) und (31) beweisen wir nun (24), (25) und (26) durch vollständige Induktion nach τ .

Verankerung: Für $\tau = 1$ folgt (24) sofort aus (31) für $\sigma = \mu = 1$. (25) entfällt für $\tau = 1$, und (26) ist wegen (31) schon bewiesen für $\mu = 1, 3, \dots, 2n + 1$. Wegen (24) verschwindet in (30) das Glied mit $\sigma = 1$. Für $\mu = 2n + 3$ ist daher (30) ein Polynom in j vom Grad $\leq 2n$ mit $(2n + 1)$ verschiedenen Nullstellen. Es verschwinden also alle Koeffizienten, das heisst, (26) gilt auch für $\mu = 2n + 3$.

Der Satz sei nun richtig für alle ungeraden Zahlen $< \tau$ ($1 < \tau \leq 2n + 1$).

Schluss von $(\tau - 2)$ auf τ : Wir betrachten Gleichung (26) für $\sigma = \tau$. Wegen $\tau \leq 2n + 1$ ist sie insbesondere erfüllt für $\mu = \tau, \tau + 2, \dots, \tau - 1 + \tau$. Dies kann man auffassen als homogenes lineares Gleichungssystem

$\left(\frac{\tau + 1}{2} \text{ Gleichungen} \right)$ für die $\frac{\tau + 1}{2}$ «Unbekannten»

$$\left[\sum_{i=-n}^n i^{\tau-1} \alpha_{i,1} - \frac{2}{\tau} n^{\tau} \right], \left[\sum_{i=-n}^n i^{\tau-3} \alpha_{i,3} \right], \dots, \left[\sum_{i=-n}^n i^{\tau-\tau} \alpha_{i,\tau} \right].$$

Da die zugehörige Determinante $\det \left[\binom{\mu-\nu}{\mu-\tau} b_{\mu-\nu} \right]$ als $\neq 0$ vorausgesetzt wurde (21), gibt es nur die triviale Lösung, das heisst, (24) und (25) gelten auch für τ . Daraus folgt weiter, dass in (30) alle Glieder verschwinden für $\sigma = 1, 3, \dots, \tau$. Also ist für $\mu = 2n + 2 + \tau$ die linke Seite von (30) ein Polynom in j vom Grad $\leq 2n$ mit $(2n + 1)$ verschiedenen Nullstellen. Folglich verschwinden wieder alle Koeffizienten, und damit gilt also (26) auch für $\mu = 2n + 2 + \tau$, was zu beweisen war.

Die Gleichungen (24) und (25) schliessen zunächst nicht aus, dass die Koeffizienten von NEWTON-COTES nicht nur näherungsweise, sondern auch exakt eine Minimallösung bilden. Dass dies nicht der Fall ist, zeigt sich schon für $n = 1$. Man rechnet nämlich leicht durch Auflösung der Gleichungen (11) nach, dass die Minimallösung (falls $6b_4 \neq b_2^2$ ist, ist sie für $n = 1$ eindeutig bestimmt) die Form hat

$$a_{-1}(h) = a_1(h) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2S(h) \\ R(h) & S(2h) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2R(h) \\ R(h) & 1 + R(2h) \end{vmatrix}} = \frac{1}{3} h + \frac{2b_2 b_4 - 30b_6}{15(6b_4 - b_2^2)} h^3 + O(h^5),$$

$$a_0(h) = \frac{\begin{vmatrix} 2S(h) & 2R(h) \\ S(2h) & 1 + R(2h) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2R(h) \\ R(h) & 1 + R(2h) \end{vmatrix}} = \frac{4}{3} h - 2 \frac{2b_2 b_4 - 30b_6}{15(6b_4 - b_2^2)} h^3 + O(h^5).$$

Für $R(t) = \sin \omega t / \omega t$ ebenso wie für $R(t) = e^{-t^2/2\sigma^2}$ sind die Koeffizienten von h^3 sicher $\neq 0$.

Wir wollen nun noch in aller Kürze auf den Fall einer geraden Anzahl von Stützstellen eingehen. Es sei also n ungerade und

$$\tilde{a}_{2i}(h) \equiv 0 \quad \text{für} \quad i = 0, \pm 1, \dots, \pm \frac{n-1}{2}.$$

Wir setzen voraus, dass $R(t)$ $(2n-3)$ -mal stetig differenzierbar ist, und benutzen die Bezeichnungen (19) und (20) unter sinngemässer Abänderung der Summationsgrenzen. Die Voraussetzung (21) sei erfüllt für $\tau = 1, 3, 5, \dots, n$. Dann lässt sich wieder zeigen, dass die $\tilde{\alpha}_{i,1}$ die Koeffizienten von NEWTON-COTES sind, und zwar indem man allgemeiner den folgenden Satz beweist:

Satz: *Unter den oben angegebenen Voraussetzungen erfüllen die $\tilde{\alpha}_{i,v} = \tilde{\alpha}_{-i,v}$ ($i = 1, 3, \dots, n$) für $\tau = 1, 3, 5, \dots, n$ (n ungerade ≥ 1) die folgenden Gleichungen:*

$$\sum_{\substack{i=1 \\ 2 \nmid i}}^n i^{\tau-1} \tilde{\alpha}_{i,1} = \frac{1}{\tau} n^{\tau}, \quad (32)$$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ 2 \nmid i}}^n i^{\tau-v} \tilde{\alpha}_{i,v} = 0 \quad \text{für} \quad v = 3, 5, \dots, \tau, \quad (33)$$

$$\left. \begin{aligned} & \binom{\mu-1}{\mu-\sigma} b_{\mu-1} \left[\sum_{\substack{i=1 \\ 2 \nmid i}}^n i^{\sigma-1} \tilde{\alpha}_{i,1} - \frac{1}{\sigma} n^{\sigma} \right] + \sum_{\substack{v=3 \\ 2 \nmid v}}^{\sigma} \binom{\mu-v}{\mu-\sigma} b_{\mu-v} \left[\sum_{\substack{i=1 \\ 2 \nmid i}}^n i^{\sigma-v} \tilde{\alpha}_{i,v} \right] = 0 \\ & \text{für} \quad \sigma = 1, 3, 5, \dots, \mu \quad \text{und} \quad \mu = 1, 3, 5, \dots, n+1+\tau. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Da der Beweis völlig analog zum vorhergehenden Satz erfolgt, können wir hier auf seine Wiedergabe verzichten.

5. Erwartungswert des Fehlerquadrats für die Formeln von Newton-Cotes

Wir wollen hier den Erwartungswert $E[\eta^2]$ für die Formeln von NEWTON-COTES berechnen, einerseits um die Analogie zu den Fehlergliedern (13) bzw. (17) aufzuzeigen, und andererseits um im nächsten Abschnitt einen Vergleich mit $E[\eta^2]$ für die Minimallösungen durchführen zu können. Ausserdem ist es für die Anwendung der Integrationsformel von Interesse, den tatsächlich zu erwartenden Fehler mit Hilfe des Erwartungswertes $E[\eta^2]$ zu schätzen.

Satz: *Wenn die Korrelationsfunktion $R(t)$ $(4n+8)$ -mal stetig differenzierbar und die Anzahl der Stützstellen $(-nh, \dots, -h, 0, h, 2h, \dots, nh)$ ungerade ist,*

so gilt für den Fehler η siehe (5) bei Benutzung der Koeffizienten α_i von NEWTON-COTES

$$E[\eta^2] = \left\{ \frac{2}{(2n+2)!} \left[\frac{n^{2n+3}}{2n+3} - \sum_{i=1}^n i^{2n+2} \alpha_i \right] \right\}^2 \\ < (4n+4)! b_{4n+4} h^{4n+6} + O(h^{4n+8}) \\ = \left\{ \frac{2}{(2n+2)!} \left[\frac{n^{2n+3}}{2n+3} - \sum_{i=1}^n i^{2n+2} \alpha_i \right] \right\}^2 \\ \times h^2 E[(\Delta^{2n+2} \xi(t))^2] + O(h^{4n+8}). \quad (35)$$

Dabei ist

$$R(t) = \sum_{i=0}^{2n+2} b_{2i} h^{2i} + O(h^{4n+8}). \quad (36)$$

Beweis: Wir setzen $a_i(h) = a_{-i}(h) = h \alpha_i$ (α_i unabhängig von h) in Formel (6) ein und erhalten

$$E[\eta^2] \big|_{h=0} = 0, \quad (37)$$

$$E'[\eta^2] = 4n S(2nh) - 2 \sum_{i=-n}^n \alpha_i \{S((n+i)h) + S((n-i)h)\} \\ - 2 \sum_{i=-n}^n h \alpha_i \{(n+i) R((n+i)h) + (n-i) R((n-i)h)\} \\ + 2 \sum_{i,k=-n}^n h \alpha_i \alpha_k R((i-k)h) + \sum_{i,k=-n}^n h^2 \alpha_i \alpha_k (i-k) R'((i-k)h), \\ E'[\eta^2] \big|_{h=0} = 0. \quad (38)$$

Allgemein ergibt sich durch ϱ -maliges Differenzieren ($\varrho = 2, 3, \dots, 4n+7$):

$$E^{(\varrho)}[\eta^2] = 2(2n)^\varrho R^{(\varrho-2)}(2nh) \\ - 2\varrho \sum_{i=-n}^n \alpha_i \{(n+i)^{\varrho-1} R^{(\varrho-2)}((n+i)h) + (n-i)^{\varrho-1} R^{(\varrho-2)}((n-i)h)\} \\ - 2 \sum_{i=-n}^n h \alpha_i \{(n+i)^\varrho R^{(\varrho-1)}((n+i)h) + (n-i)^\varrho R^{(\varrho-1)}((n-i)h)\} \\ + \varrho(\varrho-1) \sum_{i,k=-n}^n \alpha_i \alpha_k (i-k)^{\varrho-2} R^{(\varrho-2)}((i-k)h) \\ + 2\varrho \sum_{i,k=-n}^n h \alpha_i \alpha_k (i-k)^{\varrho-1} R^{(\varrho-1)}((i-k)h) \\ + \sum_{i,k=-n}^n h^2 \alpha_i \alpha_k (i-k)^\varrho R^{(\varrho)}((i-k)h)$$

und

$$E^{(\varrho)}[\eta^2] \big|_{h=0} = 2 R^{(\varrho-2)}(0) \left\{ (2n)^\varrho - \varrho \sum_{i=-n}^n \alpha_i [(n+i)^{\varrho-1} + (n-i)^{\varrho-1}] + \binom{\varrho}{2} \sum_{i,k=-n}^n \alpha_i \alpha_k (i-k)^{\varrho-2} \right\} \quad (39)$$

Daraus folgt sofort:

$$E^{(\varrho)}[\eta^2] \big|_{h=0} = 0 \quad \text{für } \varrho \text{ ungerade.} \quad (40)$$

Mit Hilfe von

$$2^\varrho = 2 \sum_{\substack{\sigma=0 \\ \geq \sigma}}^{\varrho-2} \binom{\varrho}{\sigma+1}$$

und einiger elementarer Umformungen können wir aus (39) für gerade ϱ folgern:

$$E^{(\varrho)}[\eta^2] \big|_{h=0} = R^{(\varrho-2)}(0) \sum_{\substack{\sigma=0 \\ \geq \sigma}}^{\varrho-2} \binom{\varrho}{\sigma+1} \left\{ (\sigma+1) \sum_{i=-n}^n i^\sigma \alpha_i - 2n^{\sigma+1} \right\} \left\{ (\varrho-\sigma-1) \sum_{k=-n}^n k^{\varrho-\sigma-2} \alpha_k - 2n^{\varrho-\sigma-1} \right\} \quad (41)$$

Wir nutzen nun aus, dass die α_i die Koeffizienten von NEWTON-COTES sind und also den Gleichungen (12) genügen. Dann folgt aus (41) sofort:

$$E^{(\varrho)}[\eta^2] \big|_{h=0} = 0 \quad \text{für } \varrho = 2, 4, 6, \dots, 4n+4 \quad (42)$$

und

$$E^{(4n+6)}[\eta^2] \big|_{h=0} = R^{(4n+4)}(0) \binom{4n+6}{2n+3} \left[(2n+3) \sum_{i=-n}^n i^{2n+2} \alpha_i - 2n^{2n+3} \right]^2. \quad (43)$$

Mit Hilfe von (37), (38), (40), (42) und (43) lässt sich nun die Taylor-Entwicklung von $E[\eta^2]$ aufstellen, und man erhält den ersten Teil von Formel (35). Der zweite Teil folgt sofort aus Formel (9) für $\mu = 2n+2$, was zu beweisen war.

Am Beispiel $n=1$ sei gezeigt, dass man in Formel (35) im allgemeinen nicht auf $O(h^{4n+8})$ verzichten kann. Man rechnet nämlich leicht für $n=1$ nach:

$$\begin{aligned} E[\eta^2] &= \frac{224}{45} b_8 h^{10} + \frac{992}{99} b_{10} h^{12} + O(h^{14}) \\ &= \frac{1}{90^2} h^2 E[(A^4 \xi(t))^2] - \frac{13792}{99} b_{10} h^{12} + O(h^{14}). \end{aligned}$$

Ganz entsprechend wie oben beweist man:

Satz: Wenn die Korrelationsfunktion $R(t)$ $(2n+6)$ -mal stetig differenzierbar und die Anzahl der Stützstellen $(-nh, \dots, -3h, -h, h, 3h, \dots, nh)$ gerade ist, so gilt für den Fehler η bei Benutzung der Koeffizienten $\hat{\alpha}_i$ von NEWTON-COTES

$$E[\eta^2] = \left\{ \frac{2}{(n+1)!} \left[\frac{n^{n+2}}{n+2} - \sum_{\substack{i=1 \\ 2 \nmid i}}^n i^{n+1} \hat{\alpha}_i \right] \right\}^2 (2n+2)! b_{2n+2} h^{2n+4} + O(h^{2n+6}) \\ = \left\{ \frac{2}{(n+1)!} \left[\frac{n^{n+2}}{n+2} - \sum_{\substack{i=1 \\ 2 \nmid i}}^n i^{n+1} \hat{\alpha}_i \right] \right\}^2 h^2 E[1^{n+1} \xi(t)^2] + O(h^{2n+6}). \quad (44)$$

Man beachte dabei, dass für die Integration die Schrittweite $= 2h$, für $1^{n+1} \xi(t)$ aber nur $= h$ ist. Wenn man will, kann man das leicht abändern, indem man etwa in $(9) h$ durch $2h$ ersetzt und Formel (44) entsprechend abändert.

6. Erwartungswert des Fehlerquadrats für die Minimallösungen

Wir wollen nun beweisen, dass der Erwartungswert $E[\eta^2]$ für die Minimallösungen von derselben Grössenordnung ist wie für die Koeffizienten von NEWTON-COTES [vgl. (35) und (44)]. Damit kann von unserem Standpunkt aus für praktische Anwendungen die Benutzung der Formeln von NEWTON-COTES als gerechtfertigt angesehen werden. Denn bei gleicher Grössenordnung des Fehlers haben die Minimallösungen den Nachteil, komplizierter zu sein, und ausserdem hängen sie von der nur schwer zu treffenden Wahl der Korrelationsfunktion ab (vgl. dazu auch für $n=1$ Abschnitt 4).

Satz: Die Anzahl der Stützstellen $(-nh, \dots, -h, 0, h, 2h, \dots, nh)$ sei ungerade. Die Korrelationsfunktion $R(t)$ sei $(4n+7)$ -mal stetig differenzierbar, und es sei für $\tau = 1, 3, 5, \dots, 2n+3$

$$\det[(\mu - \nu) b_{\mu - \nu}] \neq 0. \quad (45)$$

Dann ist für jede (sicher existierende) symmetrische, $(4n+7)$ -mal stetig differenzierbare Minimallösung der Erwartungswert $E[\eta^2]$ ein $O(h^{4n+6})$, aber kein $O(h^{4n+7})$.

Beweis: Wir benutzen sinngemäss die Bezeichnungen (19), (20) und (21). Es genügt offenbar zu zeigen, dass für die Ableitungen von $E[\eta^2]$ nach h gilt:

$$E^{(\tau)}[\eta^2] \big|_{h=0} = 0 \quad \text{für} \quad \tau = 0, 1, 2, \dots, 4n+5 \quad (46)$$

und

$$E^{(4n+6)}[\eta^2] \big|_{h=0} \neq 0. \quad (47)$$

Setzt man in (7) eine symmetrische Minimallösung $a_i(h)$ – sie genügt (11) – ein, so erhält man

$$E[\eta^2] = 2 \int_0^{2n h} S(t) dt - 2 \sum_{i=-n}^{+n} a_i(h) S((n+i)h). \quad (48)$$

Daraus folgt

$$E[\eta^2] \big|_{h=0} = 0, \quad (49)$$

$$E^{(1)}[\eta^2] = 4n S(2nh) - 2 \sum_{i=-n}^{+n} \{a_i^{(1)}(h) S((n+i)h) + a_i(h) (n+i) R((n+i)h)\},$$

$$E^{(1)}[\eta^2] \big|_{h=0} = 0, \quad (50)$$

und allgemein für $\mu = 1, 2, \dots, 4n+5$:

$$E^{(\mu+1)}[\eta^2] = 2(2n)^{\mu+1} R^{(\mu-1)}(2nh)$$

$$- 2 \sum_{i=-n}^{+n} \sum_{v=0}^{\mu+1} \binom{\mu+1}{v} a_i^{(v)}(h) (n+i)^{\mu+1-v} S^{(\mu+1-v)}((n+i)h),$$

$$E^{(\mu+1)}[\eta^2] \big|_{h=0} = 2(2n)^{\mu+1} R^{(\mu-1)}(0)$$

$$- 2 \sum_{i=-n}^{+n} \sum_{v=0}^{\mu} \binom{\mu+1}{v} (n+i)^{\mu+1-v} a_i^{(v)}(0) R^{(\mu-v)}(0). \quad (51)$$

Für gerade μ ergibt sich

$$E^{(\mu+1)}[\eta^2] \big|_{h=0} = 0, \quad (52)$$

und für ungerade μ erhält man

$$E^{(\mu+1)}[\eta^2] \big|_{h=0} = 2(2n)^{\mu+1} (\mu-1)! b_{\mu-1}$$

$$+ 2 \sum_{\substack{v=1 \\ 2 \nmid v}}^{\mu} \binom{\mu+1}{v} (\mu-v)! b_{\mu-v} \sum_{i=-n}^{+n} (n+i)^{\mu-1-v} v! \alpha_{i,v}$$

$$- 4 \sum_{\substack{v=1 \\ 2 \nmid v}}^{\mu} \binom{\mu+1}{v} (\mu-1)! n^{\mu+1} b_{\mu-1}$$

$$- 2 \sum_{\substack{v=1 \\ 2 \nmid v}}^{\mu} \sum_{\substack{v=1 \\ 2 \nmid v}}^{\mu+1-v} \frac{(\mu+1)!}{\mu+1-v} \binom{\mu+1-v}{v} b_{\mu-v} n^v \sum_{i=-n}^{+n} i^{\mu+1-v-v} \alpha_{i,v}.$$

Wir setzen $\mu + 1 - \varrho = \sigma$ und erhalten durch elementare Umformung

$$\left. \begin{aligned} E^{(\mu+1)}[l^2] \Big|_{h=0} &= -2 \sum_{\substack{\sigma=1 \\ 2 \nmid \sigma}}^{\mu} \frac{(\mu+1)!}{\mu+1-\sigma} n^{\mu+1-\sigma} \\ &\left(\binom{\mu-1}{\mu-\sigma} b_{\mu-1} \left[\sum_{i=-n}^{+n} i^{\sigma-1} \alpha_{i,1} - \frac{2}{\sigma} n^{\sigma} \right] + \sum_{\substack{\nu=3 \\ 2 \nmid \nu}}^{\sigma} \binom{\mu-\nu}{\mu-\sigma} b_{\mu-\nu} \sum_{i=-n}^{+n} i^{\sigma-\nu} \alpha_{i,\nu} \right) \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

Nach (26) folgt

$$E^{(\mu+1)}[l^2] \Big|_{h=0} = 0 \quad \text{für} \quad \mu = 1, 3, 5, \dots, 4n+3. \quad (54)$$

Durch (49), (50), (52) und (54) ist (46) bewiesen.

Die Behauptung (47) beweisen wir indirekt, machen also die Annahme, dass

$$E^{(4n+6)}[l^2] \Big|_{h=0} = 0 \quad (55)$$

ist. Wir setzen

$$c_{\mu,\sigma} = \binom{\mu-1}{\mu-\sigma} b_{\mu-1} \left[\sum_{i=-n}^{+n} i^{\sigma-1} \alpha_{i,1} - \frac{2}{\sigma} n^{\sigma} \right] + \sum_{\substack{\nu=3 \\ 2 \nmid \nu}}^{\sigma} \binom{\mu-\nu}{\mu-\sigma} b_{\mu-\nu} \sum_{i=-n}^{+n} i^{\sigma-\nu} \alpha_{i,\nu}$$

und erhalten damit aus (55) und (53)

$$\sum_{\substack{\sigma=1 \\ 2 \nmid \sigma}}^{4n+5} \frac{n^{4n+6-\sigma}}{4n+6-\sigma} c_{4n+5,\sigma} = 0.$$

Wegen (24) und (25) ist $c_{4n+5,\sigma} = 0$ für $\sigma = 1, 3, 5, \dots, 2n+1$, und also ist

$$\sum_{\substack{\sigma=2n+3 \\ 2 \nmid \sigma}}^{4n+5} \frac{n^{4n+6-\sigma}}{4n+6-\sigma} c_{4n+5,\sigma} = 0. \quad (56)$$

Nach (30) ist – wieder unter Benutzung von (24) und (25) – ausserdem

$$\sum_{\substack{\sigma=2n+3 \\ 2 \nmid \sigma}}^{4n+5} j^{4n+5-\sigma} c_{4n+5,\sigma} = 0 \quad \text{für} \quad j = -n, \dots, 0, 1, \dots, n.$$

Also ist

$$P(t) = \sum_{\substack{\sigma=2n+3 \\ 2 \nmid \sigma}}^{4n+5} t^{4n+5-\sigma} c_{4n+5,\sigma}$$

ein Polynom in t vom Grad $\leq 2n+2$ mit den Nullstellen $|t| = 1, 2, 3, \dots, n$ und (wegen σ ungerade) der doppelten Nullstelle $t = 0$. $P(t)$ lässt sich daher

schreiben in der Form

$$P(t) = c \prod_{i=0}^n (t^2 - j^2) .$$

Nach (56) ist nun

$$\int_0^n P(t) dt = 0 ,$$

und wegen (14) folgt daraus $c = 0$, das heisst $P(t) \equiv 0$, und also $c_{4n+5, \sigma} = 0$ auch für $\sigma = 2n+3, 2n+5, \dots, 4n+5$. Zusammen mit (26) ergibt sich damit insbesondere

$$\left. \begin{aligned} \binom{\mu-1}{\mu-\sigma} b_{\mu-1} \left[\sum_{i=-n}^n i^{\sigma-1} \alpha_{i,1} - \frac{2}{\sigma} n^{\sigma} \right] + \sum_{\substack{r=3 \\ 2 \nmid r}}^{\sigma} \binom{\mu-r}{\mu-\sigma} b_{\mu-r} \left[\sum_{i=-n}^n i^{\sigma-r} \alpha_{i,r} \right] = 0 \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

für $\sigma = 2n+3$ und $\mu = 2n+3, 2n+5, \dots, 4n+5$.

Nach Voraussetzung (45) folgt daraus, dass alle eckigen Klammern in (57) verschwinden und insbesondere also, dass

$$\sum_{i=-n}^n i^{2n+2} \alpha_{i,1} - \frac{2}{2n+3} n^{2n+3} = 0 \quad (58)$$

ist. Nun sind nach Abschnitt 4 die $\alpha_{i,1}$ gleich den Koeffizienten α_i von NEWTON-COTES, und also steht (58) im Widerspruch zu (15). Wir haben also (55) zum Widerspruch geführt, was zu beweisen war.

Ganz analog beweist man:

Satz: Die Anzahl der Stützstellen $(-nh, \dots, -h, h, 3h, \dots, nh)$ sei gerade (also n ungerade). Die Korrelationsfunktion $R(t)$ sei $(2n+8)$ -mal stetig differenzierbar, und es sei für $\tau = 1, 3, 5, \dots, n+2$

$$\det \left[\binom{\mu-r}{\mu-\tau} b_{\mu-r} \right] \neq 0 .$$

Dann ist für jede (sicher existierende) symmetrische, $(2n+8)$ -mal stetig differenzierbare Minimallösung der Erwartungswert $E[\eta^2]$ ein $O(h^{2n+4})$, aber kein $O(h^{2n+5})$.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] BLANC, CH., *Etude stochastique de l'erreur dans un calcul numérique approché*, Comment. math. Helv. 26, 225-241 (1952).
- [2] BLANC, CH., und LINIGER, W., *Stochastische Fehlerauswertung bei numerischen Methoden*, Z. angew. Math. Mech. 35, 121-130 (1955).

- [3] DOOB, J. L., *Stochastic Processes* (Wiley & Sons, New York, und Chapman & Hall, London 1953).
- [4] GNEDENKO, B. W., *Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Übersetzung aus dem Russischen (Akademie-Verlag, Berlin 1957).
- [5] KHINTCHINE, A., *Korrelationstheorie der stationären stochastischen Prozesse*, Math. Ann. 109, 604–615 (1934).
- [6] KOPAL, Z., *Numerical Analysis* (Chapman & Hall, London 1955).
- [7] MORGENSTERN, D., *Statistische Begründung numerischer Quadratur*, Math. Nachr. 13, 161–164 (1955).
- [8] WILLERS, FR. A., *Methoden der praktischen Analysis* (W. de Gruyter & Co., Berlin 1950).

Summary

A definite integral is approximated by a linear combination of values of the integrand at equidistant points. As a measure for the goodness of fit we use the mean square deviation; for this we take a wide sense stationary stochastic process as basis. We prove that there exist always a best integration formula in this sense. The Taylor expansion of its coefficients begins with the coefficients of NEWTON-COTES. It is shown that the error of the best integration formula is of the same order of magnitude as in the well-known formula of NEWTON-COTES. Therefore we get a justification for the formulae of NEWTON-COTES also if the integrand is not differentiable. Besides we obtain estimates of the error, which use higher differences instead of higher differential quotients of the integrand.

(Eingegangen: 11. August 1958.)

Kurze Mitteilungen – Brief Reports – Communications brèves

Zeros and Poles of Output Voltage of 3-Terminal Potentiometer Networks

By MOHEB AZIZ ABDEL-MESSIH, Alexandria, Egypt ¹⁾

1. Introduction

In the past few years resistive networks containing fixed resistors and linear potentiometers²⁾ have been developed for the construction of analogue computing instruments. GREENWOOD, HOLDAM, and MACRAE [1]³⁾ have used potentiometer networks for the generation of some prescribed functions. The paper of SPEISER [2] contains methods of performing the elementary arithmetic operations and of

¹⁾ Faculty of Engineering, Alexandria University.

²⁾ Hereafter such networks will be referred to as potentiometer networks. A linear potentiometer is that in which the relationship between the shaft angle and the variation of resistance between the contact point and one end of the winding is linear.

³⁾ Numbers in brackets refer to References, page 215.

curve fitting for functions of one and of two variables. The work of ABDEL-MESSIH [3] comprises all possible networks containing one and two potentiometers for one and for two variables, and gives a design for a network to generate the ballistic functions in air.

Consider a 3-terminal network (Figure 1) containing fixed resistors and a finite number of linear potentiometers mounted on the same shaft. Let x represent the angular displacement of the shaft from one end of the potentiometer winding, expressed as a fraction of its full range; $0 \leq x \leq 1$.

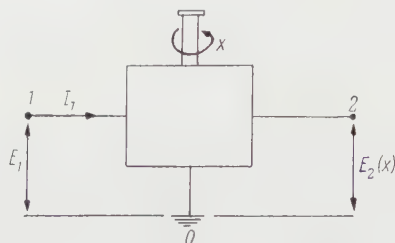


Figure 1
3-terminal potentiometer network.

If the network is supplied by a constant voltage E_1 , then the voltage at any point of the network, output voltage, is a function of x ; $E_2(x)$. SPEISER [2] has stated that $E_2(x)$ is a rational function of x , which has no poles in the interval $0 \leq x < 1$ and no zeros within $0 < x < 1$.

In this paper we give more precise properties of the zeros and poles of the function $E_2(x)$, stated in the following theorem, and prove these properties.

2. Theorem

The output voltage $E_2(x)$ of a 3-terminal potentiometer network is a rational function of x with the following properties:

- (i) The zeros of $E_2(x)$ are either real outside the interval $0 < x < 1$, or occur in conjugate complex pairs.
- (ii) The poles of $E_2(x)$ are simple real negative or > 1 .

3. Proof of Property (i) ⁴⁾

In a potentiometer network the resistance elements appear in the form r_1 , $x r_2$ and $(1 - x) r_3$, where $0 \leq x \leq 1$.

If three such resistances are connected in parallel as in Figure 2, then their total conductance is

$$g = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{x r_2} + \frac{1}{(1 - x) r_3}.$$

Putting

$$x = \frac{1}{1 + y},$$

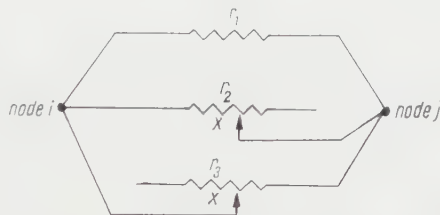
⁴⁾ The problem is treated in a method analogous to that used by FAILKOW and GERST [4] for the transfer function of RC networks.

then

where

$$a = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}, \quad b = \frac{1}{r_2}, \quad c = \frac{1}{r_3} \quad (a, b, c \geq 0).$$

The network of Figure 1 is considered on nodal system. The ground terminal is taken as node 0, the other input and output terminals as nodes 1 and 2 respec-



Parallel connection of resistance elements.

tively. The remaining nodes are identified so that each branch is an r_1 , an $x r_2$, an $(1-x) r_3$ in parallel as in Figure 2. The conductance g_{ij} ($i \neq j$) of the branch between nodes i and j is according to (1) of the form

$$g_{ij} = \frac{1}{\gamma} (c_{ij} + a_{ij} \gamma + b_{ij} \gamma^2) \quad (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \geq 0).$$

Denote

$$\left. \begin{aligned} \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq i}}^n g_{lij} = g_{i i} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

where $n + 1$ is the total number of nodes. (Of course $g_{ij} = g_{ji}$ and g_{ii} has the same form as g_{ii} .)

The only driving current source is I_1 impressed on node 1. Let E_i denote the voltage at node i measured with reference to the ground node 0.

Applying KIRCHHOFF's current law for the equilibrium of the nodal system, we get (see, for example, BODE [5], p. 12):

$$\begin{aligned} &g_{11} E_1 - g_{12} E_2 - \cdots - g_{1n} E_n = I_1, \\ &-g_{21} E_1 + g_{22} E_2 - \cdots - g_{2n} E_n = 0, \\ &\dots\dots\dots \\ &g_{n1} E_1 - g_{n2} E_2 - \cdots - g_{nn} E_n = 0. \end{aligned}$$

Using CRAMER's rule to solve this system of equations for E_1 and E_2 , we get

$$E_1 = I_1 \frac{\Delta_{11}}{D}, \quad E_2 = I_1 \frac{\Delta_{12}}{D},$$

where D is the system determinate, Δ_{11} and Δ_{12} are cofactors⁵⁾ of D . Hence

$$E_2 = E_1 \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11}},$$

where

$$\Delta_{12} = \begin{vmatrix} g_{21} & g_{23} & \cdots & g_{2n} \\ -g_{31} & g_{33} & \cdots & -g_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -g_{n1} & -g_{n3} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix} = \frac{H(y)}{y^t}.$$

Here $H(y)$ is a polynomial in y .

On account of (2) it can be proved that the coefficients of $H(y)$ are all real positive⁶⁾ (cf. [4], pp. 116, 124).

It follows that the zeros of Δ_{12} , and hence of E_2 , are either real non-positive y 's or occur in conjugate complex pairs⁷⁾.

Referring to our variable $x = 1/(1 + y)$, we find that the zeros of $E_2(x)$ are either real outside the interval $0 < x < 1$ or occur in conjugate complex pairs. This establishes property (i).

4. Proof of Property (ii)

We first examine the zeros and poles of the so-called driving-point and transfer resistances.

4.1 The Driving-Point Resistance

Consider a 2-terminal potentiometer network as shown in Figure 3.

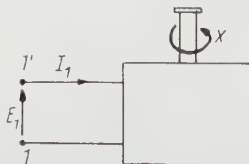


Figure 3
2-terminal potentiometer network.

The driving-point resistance is defined as the ratio

$$R_{11} = \frac{E_1}{I_1}.$$

R_{11} is a rational function of x . To discuss the zeros and poles of R_{11} we make use of energy considerations. If we consider the network upon loop system, then the

⁵⁾ The (ij) -cofactor $= (-1)^{i+j}(ij)$ -minor, where the (ij) -minor is the determinate formed by canceling the row i and the column j in D .

⁶⁾ Note that Δ_{12} and Δ_{11} may have common factors. When dividing Δ_{12} [or $H(y)$] by such a factor, some coefficients of the numerator of E_2 may become negative.

⁷⁾ Zeros at the origin or at infinity may occur according to the degree of y in the denominator of Δ_{12} and Δ_{11} .

energy loss or 'dissipation function' F is given by (see, for example, CAUER [6], p. 79, or GUILLEMIN [8], p. 5):

$$F = \sum_{i,j=1}^p r_{ij} I_i I_j, \quad (3)$$

where

p	number of loops in the system,
I_i	current circulating in loop i ,
r_{ij}	total resistance in loop j ,
$r_{ij}(i \neq j)$	resistance common to loops i and j .

Of course

$$r_{ij} = r_{ji}.$$

(If the loop currents are all assumed positive in the same path direction, clockwise for example, then all r_{jj} -terms are positive and all the r_{ij} -terms ($i \neq j$) are negative.)

On the other hand the energy dissipated in the network is known to be equal to

$$R_{11} I_1^2, \quad (4)$$

so we get

$$R_{11} I_1^2 = \sum_{i,j=1}^p r_{ij} I_i I_j. \quad (5)$$

In a loop system, the loop resistance is a series combination of our resistance elements r_1 , $x r_2$ and $(1-x) r_3$, so that we can write

$$r_{ij} = a_{ij} + x b_{ij} + (1-x) c_{ij} \quad (a, b, c \geq 0 \text{ and } 0 \leq x \leq 1). \quad (6)$$

Substituting in (3) we get

$$F = \sum_{i,j=1}^p a_{ij} I_i I_j + x \sum_{i,j=1}^p b_{ij} I_i I_j + (1-x) \sum_{i,j=1}^p c_{ij} I_i I_j. \quad (7)$$

The quadratic forms on the right side of (7) are positive definite⁸). Write

$$\sum_{i,j=1}^p a_{ij} I_i I_j = A, \quad \sum_{i,j=1}^p b_{ij} I_i I_j = B, \quad \sum_{i,j=1}^p c_{ij} I_i I_j = C. \quad (8)$$

Equating expression (7) to zero, we have

$$x = \frac{C+A}{C-B}, \quad (9)$$

which is not an explicit relation of x since A , B and C are implicit functions in x , but the positive definiteness of A , B and C nevertheless shows that all zeros of F implied by (9) must be real negative or > 1 ⁹). Since from (5)

$$R_{11} = (F)_{I_1=1}$$

it follows that the zeros of R_{11} are also real negative or > 1 .

⁸) This can be seen from their physical meaning since they represent energy (cf. [5], p. 128). Mathematically this can be proved by showing that the corresponding determinants and their principal minors are positive. For a criterion for positive definiteness see GUILLEMIN [9], p. 150.

⁹) This is analogous to the treatment of LC, RL, and RC networks by GUILLEMIN [8], pp. 51, 58 and 64.

$$I' = -\frac{E_1}{R_{11}^2} \left(\frac{dR_{11}}{dx} \right). \quad (16)$$

Equating (15) and (16) we get

$$\left(\frac{E_1}{R_{11}}\right)^2 \left(\frac{dR_{11}}{dx}\right) = \sum_{j=1}^p S_j I_j.$$

Substituting for S_j from (12) we obtain

$$\left(\frac{E_1}{R_{11}}\right)^2 \left(\frac{dR_{11}}{dx}\right) = \sum_{i,j=1}^p r'_{ij} I_i I_j. \quad (17)$$

Differentiating (6) with respect to x and substituting for r'_{ij} in (17) we get

$$\left(\frac{E_1}{R_{11}}\right)^2 \left(\frac{dR_{11}}{dx}\right) = B - C,$$

where B, C are represented by (8).

Since the zeros of R_{11} are implied by (9), we see that for the internal zeros¹⁰⁾ of R_{11} (where $C - B \neq 0$)

$$\left(\frac{dR_{11}}{dx}\right) \neq 0^{11)}.$$

It follows that the zeros of R_{11} are simple (since at a zero of higher multiplicity the function must have zero slope).

By the duality principle ([7], pp. 246–250) it follows that for the conductance function $G_{11} = 1/R_{11}$ the zeros are also simple. This establishes that the zeros and poles of R_{11} are simple.

The results of this part can thus be summarized in the property: the zeros and poles of the driving-point resistance R_{11} are simple, real negative or >1 .

4.2 The Transfer Resistance

The aim of the following treatment is to show that the poles of the transfer resistance R_{21} (defined in 4.3) are contained in the poles of the driving-point resistance R_{11} .

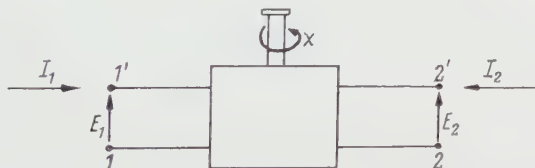


Figure 4

4-terminal potentiometer network.

If to any two nodes of the network of Figure 3 two terminals 2–2' are fastened we get a 4-terminal network as shown in Figure 4.

Consider this network upon a loop basis, where the voltages E_1 and E_2 are assumed as forming the closing loops to those meshes of the network which would

¹⁰⁾ Without considering the zeros at infinity.

¹¹⁾ For negative zeros ($C - B < 0$), dR_{11}/dx is positive; whereas for zeros >1 , the slope of the function R_{11} is negative.

Since our 3-terminal network (Figure 1) may be considered as a 4-terminal network with one input and one output terminal joined together, the above property of the poles of E_2 also applies to the 3-terminal networks.

This establishes property (ii).

REFERENCES

- [1] I. A. GREENWOOD, J. V. HOLDAM, and D. MACRAE, *Electronic Instruments* ([Radiation Laboratory Series, Vol. 21] McGraw-Hill, Inc., New-York 1948), pp. 95–104.
- [2] A. P. SPEISER, *Rechengengeräte mit linearen Potentiometern*, Z. angew. Math. Phys. 3, 449 (1952).
- [3] M. A. ABDEL-MESSIH, *Zur Theorie der Rechengengeräte mit linearen Potentiometern*, Dissertation ETH (Leemann AG, Zürich 1954).
- [4] A. FAILKOW and I. GERST, *The Transfer Function of General Two Terminal-Pair RC Networks*, Quart. appl. Math. 10 (1952).
- [5] H. W. BODE, *Network Analysis and Feedback Amplifier Design* (D. Van Nostrand, Inc., New-York 1945).
- [6] W. CAUER, *Theorie der linearen Wechselstromschaltungen* (Akademie-Verlag, Berlin 1954).
- [7] E. A. GUILLEMIN, *Communication Networks*, vol. II (John Wiley and Sons, Inc., New York 1935).
- [8] E. A. GUILLEMIN, *Synthesis of Passive Networks* (John Wiley and Sons, Inc., New York 1957).
- [9] E. A. GUILLEMIN, *The Mathematics of Circuit Analysis* (John Wiley and Sons, Inc., New York 1949).

Zusammenfassung

Betrachtet wird eine 3-Pol-Schaltung, die feste Widerstände und endlich viele lineare Potentiometer auf einer gemeinsamen Achse enthält. Wenn diese Schaltung von einer konstanten Spannung E_1 gespeist ist, dann ist die Ausgangsspannung E_2 an einem beliebigen Punkt der Schaltung eine rationale Funktion von x , wobei x den Drehwinkel der Achse bedeutet ($0 \leq x \leq 1$).

In dieser Arbeit wird folgender Satz bewiesen: «Die Nullstellen von E_2 sind entweder reell ausserhalb des Intervalls $0 < x < 1$, oder konjugiert-komplex. Die Pole von E_2 sind einfach, reell, negativ oder > 1 .»

(Received: August 11, 1958.)

Tagung für Elektronenmikroskopie in Freiburg i. Br. vom 18. bis 21. Oktober 1959

Die diesjährige Tagung der Deutschen Gesellschaft für Elektronenmikroskopie e. V. findet vom 18. bis 21. Oktober 1959 in Freiburg i. Br. statt. Anfragen sind zu richten an Dr. H. KEHLER, Farbwerke Hoechst AG, Frankfurt a. M.-Hoechst.

H. KEHLER

Advances in Space Science

Academic Press, Inc., Publishers, have completed plans for a new serial publication entitled *Advances in Space Science*, for which FREDERICK I. ORDWAY has assumed editorial responsibility. Mr. ORDWAY is associated with General Astronautics Corporation, Washington, D. C., and will be aided by an Editorial Advisory Board of international composition.

The following have agreed to serve on this Board: WERNHER VON BRAUN (US), FREDERICK C. DURANT (US), EUGEN SÄNGER (Germany), LESLIE R. SHEPHERD (Great Britain), GEORGE P. SUTTON (US), and ETIENNE VASSY (France).

Advances in Space Science will be devoted to critical reviews in the whole field of astronautics, with particular emphasis on the disciplines of mathematics, astronomy, geophysics, geology, geography, and biology.

L. HENLEIN

Buchbesprechungen – Book Reviews – Notices bibliographiques

Handbuch der Physik – Encyclopedia of Physics. Herausgegeben von S. FLÜGGE. Band 34: *Korpuskeln und Strahlung in Materie II* (Springer-Verlag, Berlin 1958). 316 S., 213 Fig.; DM 78.–.

Es kann kaum die Aufgabe des Rezensenten sein, den Inhalt dieses reichhaltigen Bandes eingehend zu würdigen.

Eröffnet wird die Folge der 6 Artikel durch den Beitrag von R. KOLLATH über den Durchgang langsamer Elektronen und Ionen durch Gase. Es handelt sich dabei zum grossen Teil um klassische experimentelle Ergebnisse, an deren Gewinnung KOLLATH und RAMSAUER sehr massgebend beteiligt waren.

Der zweite Artikel von 85 Seiten stammt von R. D. BIRKHOFF und behandelt den Durchgang schneller Elektronen durch Materie. Dieses Gebiet ist vor allem auch für den Strahlungsbiologen von Bedeutung. Neben der Diskussion der Elementarprozesse (Streuung von Elektronen oder Positronen an Elektronen, Übereinstimmung mit den Resultaten der Quantenelektrodynamik) und der klassischen Theorie der Bremsung von Elektronen wird auch der Stoss mit dem Plasma der Leitungselektronen behandelt. Nach einem Abschnitt über «straggling» folgt die Diskussion der Streuung am Kern und abschliessend der Durchgang von Elektronen durch dicke Schichten (mit Reichweite-Energie-Relation).

Darauf folgt der Artikel von L. SIMONS (27 Seiten) über Positronium. Die Theorie des Positroniums findet sich im Artikel von G. KÄLLÉN, Bd. 5, Teil 1. Hier werden die experimentellen Ergebnisse und Methoden dargestellt. Bekanntlich ist die Übereinstimmung der experimentellen Resultate mit der Theorie eine hervorragende Bestätigung der Quanten-Elektrodynamik.

Der vierte Artikel von E. MERZBACHER und H. W. LEWIS (27 Seiten) behandelt die theoretisch weit weniger durchsichtige Erzeugung von Röntgenstrahlen durch schwere geladene Teilchen. Er zerfällt naturgemäss in einen Abschnitt, der die Ionisation der inneren Schalen behandelt, und in einen zweiten, der das weisse Röntgenlicht diskutiert.

Der Artikel von W. WHALING (22 Seiten) gibt hauptsächlich in Form von Kurven und Tabellen das experimentelle Material über die Bremsung von Protonen und α -Teilchen für Energien unter 10 MeV.

Der Schlussartikel von R. D. EVANS (80 Seiten) gibt eine ausführliche Darstellung des Compton-Effekts. Dieser hat, wie bekannt, bei der Entstehung der neuen Quantentheorie eine hervorragende Rolle gespielt. Es ist deshalb sehr zu begrüßen, dass der vorliegende Artikel auch der historischen Seite des Gegenstandes gerecht wird. Eingehend werden daher die Fragen der Gleichzeitigkeit der Emission des Elektrons und die Folgerungen aus den Erhaltungssätzen behandelt, bevor die ausführliche Diskussion der Klein-Nishina-Formel stattfindet. Es folgt dann ein Abschnitt über Compton-Schwächung mit sorgfältigem Vergleich mit der Erfahrung und einer über den Compton-Effekt an gebundenen Elektronen. Den Abschluss bildet die in neuerer Zeit besonders wichtige Streuung an orientierten Elektronen.

Dieser Handbuchband wird zweifellos vielen Fachleuten zur zuverlässigen Orientierung dienen. Der Kreis der Interessenten erstreckt sich dabei über ein breites Spektrum, angefangen beim Theoretiker, der sich etwa über die experimentelle Verifikation der Quantenelektrodynamik orientieren will, über fast jegliche Art von Experimentalphysiker bis zum Strahlungsbiologen.

Die Ausstattung des Bandes ist ausgezeichnet.

R. JOST

Introduction to Multivariate Statistical Analysis. Von T. W. ANDERSON. (John Wiley and Sons, New York 1948). 374 S., 16 Fig.; \$12.50.

Der bekannte amerikanische Statistiker gibt in diesem Lehrbuch eine ausgezeichnete Darstellung der wichtigsten Methoden und Ergebnisse aus der Statistik mehrerer Variablen. Ohne Kenntnis der entsprechenden Resultate für eindimensionale Statistiken ist dieses Buch nicht verständlich. Der Verfasser benutzt den Matrizenkalkül, um formal möglichst Anschluss an eindimensionale Darstellungen zu gewinnen. Neben einer ausführlichen Besprechung der Korrelation, Likelihood-Methode im Falle mehrerer Variablen, Konfidenz-Bereiche, T^2 -Test, Unabhängigkeit, werden auch die zeitabhängigen Serien und stochastischen Gleichungen kurz besprochen.

W. SAXER

An Introduction to Probability Theory and Its Applications. Von W. FELLER. Band 1, 2. Aufl. (John Wiley and Sons, New York 1957). 461 S., 12 Fig.; \$10.75.

Sechs Jahre nach Erscheinen der 1. Auflage dieses ausgezeichneten Lehrbuches für Wahrscheinlichkeitsrechnung ist bereits die 2. Auflage erschienen. Nach teilweise Umarbeitung einzelner Kapitel gibt der Verfasser noch wesentlich mehr Anwendungen als in der 1. Auflage, vor allem aber solche aus der Physik. Wir erwähnen insbesondere Kettenreaktionen, rekurrente Ereignisse, stochastische Prozesse, Irrfahrten (Brownsche Bewegung), ergodische Sätze.

Das Buch kann sowohl Mathematikern als auch andern Wissenschaftlern zum Studium warm empfohlen werden.

W. SAXER

An Introduction to Combinatorial Analysis. Von J. RICORDAN (John Wiley & Sons, New York 1958). 244 S.; \$ 8.50.

Der Verfasser, Mitarbeiter der Bell Telephone Laboratories, gibt in diesem originellen Buch eine gute Übersicht über die Theorie der Kombinationen und ihrer Anwendungen. Neben den üblichen bekannten, elementaren algebraischen Resul-

taten wird vor allem der Zusammenhang mit den erzeugenden Funktionen, der Theorie der Gruppen und Netzwerke ausführlich dargestellt. Ganz besonders wird die bekannte Untersuchung von G. PÓLYA über kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen einlässlich besprochen und weitergeführt.

Neben den Mathematikern dürften sich vor allem Statistiker und Elektroingenieure für das Buch interessieren. Sehr viele Aufgaben erhöhen seinen Wert; es kann zum Studium warm empfohlen werden.

W. SAXER

Handbuch der Physik – Encyclopedia of Physics. Herausgegeben von S. FLÜGGE, Band 28: *Spektroskopie II* (Springer-Verlag, Berlin 1957). VI + 446 S., 222 Fig.; DM 98.–.

Der 28. Band des neuen *Handbuches der Physik* enthält Beiträge über Mikrowellenspektroskopie (W. GORDY, 78 S.), kontinuierliche Spektren (W. FINKENBURG und Th. PETERS, 117 S.), Kristallgitterspektren (E. FICK und G. JOOS, 89 S.), Zeeman-Effekt (VAN DEN BOSCH, 32 S.) und natürliche optische Aktivität (J. P. MATHIEU, 106 S.).

GORDY folgt dem Schema früherer Darstellungen: experimentelle Technik, Molekül-, Atom- und paramagnetische Elektronenresonanz-Spektren im Mikrowellengebiet sind im Sinne einer Übersicht beschrieben. Daher fehlt die Wiedergabe sowohl allgemein wichtiger Ergebnisse (wie zum Beispiel Tabellen der Spektren asymmetrischer Kreisel ohne und mit Quadrupolkernen, Kreisel mit interner Rotation usw.) wie auch vieler spezieller Untersuchungen, die für ein Handbuch dieses Ausmasses angemessen wären. Die Literatur ist bruchstückweise zitiert.

Der Beitrag über kontinuierliche Spektren zeichnet sich durch knappe Fassung und Übersichtlichkeit aus. Die im ersten Abschnitt zusammengestellte Theorie wird systematisch zur Beurteilung kontinuierlicher Emissions- und Absorptions-Elektronenspektren von Atomen und Ionen, zum Beispiel in Bogenentladungen und Schockwellen, sowie freier Elektronen herangezogen. Die umfangreichen empirischen Kenntnisse über Molekülkontinua, hauptsächlich zweiatomige, sind zum Teil nach den Potentialkurven, zum Teil nach Elementen und nach Erzeugungsmethoden geordnet. Das Literaturverzeichnis zu diesem Beitrag scheint bemerkenswert vollständig.

Das Kapitel über Kristallspektren ist beschränkt auf die Spektren einheitlicher und gemischter Ionenkristalle, homöopolarer Kristalle und Molekülkristalle. Der klassischen Theorie der Term aufspaltung im Kristallfeld von BETHE (mit tabellarisch wiedergegebenen Resultaten) geht eine kurze gruppentheoretische Einleitung voraus. Neben der Kramers-Entartung findet die Methode der Elektroneneigenfunktion des Kristalls (HELLWEGE) breite Behandlung, wobei einige Resultate für elektrische und magnetische Dipolübergänge tabelliert sind. Ferner ist der Übergang schwaches \rightarrow mittleres \rightarrow starkes Kristallfeld (BETHE folgend) im Zusammenhang mit den Racah-Koeffizienten, den Stevenschen Matrixelementen des Kristallfelds und dem Zeeman-Effekt näher diskutiert. Die neueren Untersuchungen über die Linienbreite im Kristall werden nur gestreift. Letzteres gilt auch für die Terme unipolarer Molekülkristalle, zum Beispiel die neueren Arbeiten über «site symmetry groups» und «libration» im «orientated gas»-Modell. Die Diskussion experimenteller Daten ist im wesentlichen beschränkt auf Ionenkristalle.

Der schöne Beitrag über den Zeeman-Effekt ist hauptsächlich eine Zusammenstellung der theoretischen Ergebnisse, umfassend schwaches Feld und die drei Kopplungsfälle, starkes Feld, Regeln für den g -Faktor, Intensität der Zeeman-

Linien, Hyperfeinstruktur und die Analyse beobachteter Zeeman-Spektren von Atomen. In diesem Sinne ist der Artikel als vollständig zu bezeichnen.

Im Sinne einer allgemeinen Übersicht hat MATHIEU die optische Aktivität behandelt: Ausschnitte über phänomenologische Beschreibung, experimentelle Methodik (unvollständig), Stereochemie (an Beispielen), klassische und quantenmechanische Theorien (ausführlich) leiten zur Diskussion empirischer Gesetzmässigkeiten des natürlichen Drehvermögens isotroper und anisotroper Körper über. Während man hier wenig bekannte Arbeiten über die Wirkung äusserer Fehler auf das Drehvermögen (KALLEMAN) findet, fehlt zum Beispiel die Besprechung moderner wichtiger Theorien der optischen Aktivität schraubenlinienförmiger Molekeln.

Der 28. Band des Handbuches hält sich in bezug auf Individualität und Stil der einzelnen Beiträge im Rahmen anderer Bände des Werkes.

Hs. H. GÜNTARD

Physik und Technik der Atomreaktoren. Von F. CAP (Springer-Verlag, Wien 1957). 487 S., 100 Abb.; sFr. 65.50.

Das Buch *Physik und Technik der Atomreaktoren* richtet sich an Studierende höherer Semester und an Reaktorfachleute. Es will nicht nur als Lehrbuch, sondern auch als Nachschlagewerk dienen. Das Werk ist in neun Kapitel eingeteilt, in welchen die kernphysikalischen Grundlagen, die Bremsung der Neutronen, die Diffusion der Neutronen, die Theorie des homogenen Reaktors, die Theorie des heterogenen Reaktors, der Bau von Reaktoren, der Betrieb von Reaktoren, die Beschreibung von verschiedenen Reaktortypen und die Verwendung von Reaktoren behandelt werden. Die theoretischen Kapitel des Buches sind klar geschrieben und bereiten einem beim Durcharbeiten Freude. Die beigelegten Übungsbeispiele ergänzen in schöner Weise den gebotenen Stoff. Leider sind die Resultate nicht angegeben. Bei einzelnen Aufgaben wäre ein kurzer Hinweis auf den Lösungsgang sehr wertvoll. Obwohl das Buch als Reaktorlehrbuch in deutscher Sprache empfohlen werden kann, möchten wir doch nicht auf die amerikanischen Lehrbücher wie etwa: GLASTONE und EDLUND, *The Elements of Nuclear Reactor Theory*; MURRAY, *Nuclear Reactor Physics* oder das neu erschienene Werk von WEINBERG und WIGNER, *The Physical Theory of Nuclear Chain Reactors* verzichten. W. WINKLER

Differential Equations: Geometric Theory. Von SOLOMON LEFSCHETZ (Interscience Publ., Inc., New York 1957). X+364 S., 73 Fig.; \$ 9.50.

Das in der wohlbekannten Reihe «Pure and Applied Mathematics» als Band VI erschienene Buch von S. LEFSCHETZ stellt eine wesentliche Erweiterung des früheren Werkes *Lectures on Differential Equations* (1946) dar. Die Darstellung macht weitgehenden Gebrauch von der Vektor- und Matrizen Schreibweise sowie von topologischen Begriffen, wobei das Wichtigste dazu in den einleitenden Abschnitten sowie in einem Anhang geboten wird. Einen breiten Raum nimmt die Behandlung der nichtlinearen Systeme von der Form $dx/dt = P x + q(x; t)$ ein, wo P eine konstante oder von t abhängige Matrix ist. Eingehend werden die so wichtigen Fragen der Stabilität der Lösungen und der Periodizität behandelt. Speziell werden hierauf die zweidimensionalen Systeme ausführlich im Hinblick auf ihre isolierte Singularitäten und ihr Verhalten im Unendlichen untersucht. Die beiden letzten Kapitel schliesslich bringen noch eine Reihe moderner Ergebnisse zu den Differentialgleichungen 2. Ordnung und den nichtlinearen Schwingungen. Die Darstellung der Materie ist klar und übersichtlich, und besonders Dank wird man dem Verfasser

wissen für die eingehende Berücksichtigung der wichtigen russischen Arbeiten aus der jüngsten Zeit, die ja häufig nur sehr schwer zugänglich sind. Das Buch wendet sich nicht allein an den Mathematiker, sondern vor allem auch an den Physiker und Ingenieur, für den die behandelten Probleme von grosser Bedeutung sind. Diesem empfehlenswerten Band ist eine weite Verbreitung sicher.

E. ROTH-DESMEULES

Versicherungsmathematik, 2. Teil. Von WALTER SAXER, mit einem Anhang von HEINRICH JECKLIN (Springer-Verlag, Berlin 1958). 283 Seiten; DM 45.—.

Den ersten Teil seiner *Versicherungsmathematik*, der bereits vor drei Jahren erschienen ist, hat der Verfasser auf die Bedürfnisse des Versicherungsmathematikers in seiner praktischen Tätigkeit ausgerichtet, indem er mit grosser Sorgfalt die für diesen Aufgabenbereich benötigten theoretischen Grundlagen in methodisch durchdachter und straff begründeter Form bereitstellte. Von Anfang an plante er, sein Werk zu vervollständigen durch einen zweiten Teil, der über den üblichen Rahmen der Lehrbücher für Versicherungsmathematik hinausreicht, mit Problemstellungen und Lösungen, die bisher nur in Spezialabhandlungen einschlägiger Zeitschriften behandelt worden sind. Dieser von den Fachvertretern mit Spannung erwartete zweite Teil des Saxerschen Lehrbuches ist soeben erschienen.

Das Buch geht aus von einer «Theorie der Versicherungsfunktionen». Die von STIELTJES und SCHÄRF ausgearbeiteten Integral-Begriffe ermöglichen eine einheitliche Darstellung der meist nur stufenweise beobachteten Entwicklungen und der mit Vorteil herangezogenen mathematischen Funktionen. Einer konzentriert durchgeführten Darstellung der «Mathematik der Lebensversicherung» folgt eine noch in keinem Lehrbuch dargelegte «Mathematik allgemeiner Risikoversicherungen», die sich nicht auf das Gebiet der Lebensversicherung beschränkt. Als mathematische Hilfsmittel zur Erfassung stochastischer Vorgänge werden die wichtigsten Verteilungsfunktionen beschrieben. Zur Einführung in die weitschichtigen Probleme, mit denen sich die Risikothorie befasst, werden die Bestimmung der Prämie bei verschiedener Abgrenzung der Leistungspflicht sowie die Auswirkung von Schwankungsreserven und die Ermittlung der Risikogewinne behandelt.

Ein weiteres, in sich abgeschlossenes Kapitel ist der «Erneuerungstheorie» offener Gesamtheiten gewidmet, deren Elemente nach bestimmten Gesetzen auscheiden und durch neue ersetzt werden. Während die Gewinnung von Sterbetafeln aus statistischen Erhebungen schon im ersten Teil des Lehrbuches behandelt wird, befasst sich der zweite Teil mit der «Ausgleichung von Sterbetafeln», indem er praktisch bewährte Verfahren und Tests zu deren Beurteilung schildert.

Zum zweiten Teil des Lehrbuches von SAXER fügt JECKLIN einen Anhang hinzu, der sich der technischen Behandlung erhöhter Risiken in der Lebensversicherung widmet und die Gewinnung der statistischen Grundlagen sowie die Berücksichtigung des erhöhten Risikos bei der Bemessung der Prämie oder bei der Beschränkung der Versicherungsleistung darstellt.

Die einzelnen Kapitel des zweiten Teiles der *Versicherungsmathematik* von SAXER lassen sich auch unabhängig voneinander lesen. Insgesamt bringen sie eine Vertiefung der im ersten Buch dargelegten Kenntnisse. Von besonderer Bedeutung scheint uns die Ausweitung des Blickes auf die Fülle der Probleme, vor die sich heutzutage der Versicherungsmathematiker gestellt sieht. Daher dürfte dieses zweite Buch nicht nur dem Nachwuchs, sondern auch den in der Praxis stehenden bewährten Versicherungsmathematikern reiche Anregung und wertvolle Stütze bieten.

H. WYSS

The Effect of Boundary Conditions and Mesh Size on the Accuracy of Finite Difference Solutions of Two-Point Boundary Problems

By DAVID BORWEIN and ANDREW R. MITCHELL, St. Andrews, Scotland¹⁾

1. Introduction

In a recent communication, FOX and MITCHELL [1]²⁾ showed that in certain problems, provided the finite difference interval is chosen with sufficient care, boundary value methods give good results when step-by-step solutions are unstable. The purpose of the present paper is to examine critically the accuracy of boundary value techniques based on finite difference methods as applied to the numerical solution of ordinary differential equations with two-point boundary conditions.

FOX [2], using the method of matrix inversion, examined this problem in some detail. In the present paper, matrix methods are not used. Instead, exact solutions of the finite difference replacement of the chosen differential equation are obtained and compared with corresponding exact solutions of the differential equation for a variety of mesh lengths and two-point boundary conditions.

In addition, the accuracy of approximate numerical solutions of the difference equation is examined. The latter solutions can be obtained either by an iterative process such as relaxation or by direct methods of solution of the associated set of simultaneous equations.

2. Conditions for Which the Difference Equation Has No Solution

Consider the differential equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + j \frac{dy}{dx} + k y = g(x) \quad (1)$$

¹⁾ Mathematics Dept., University of St. Andrews. A. R. MITCHELL is now at the California Institute of Technology, Pasadena, California.

²⁾ Numbers in brackets refer to References, page 232.

over the range $0 \leq x \leq L$, with j and k constants and $g(x)$ an arbitrary function of x . If the range is divided by N internal nodes, distance h apart, a simple finite difference replacement of (1) is

$$a y_{r+2} + b y_{r+1} + c y_r = f_r \quad [r = 0, 1, 2, \dots, (N-1)], \quad (2)$$

where $a = 1 + j h/2$, $b = k h^2 - 2$, $c = 1 - j h/2$, $f_r = h^2 g\{(r+1)h\}$ and y_r , y_{r+1} , y_{r+2} are the values of y at $x = r h$, $(r+1)h$, $(r+2)h$ respectively. Throughout the paper, the values $h = \pm 2/j$, for which (2) becomes a first order equation, are excluded. A solution of (2) is

$$y_0 = A + B, \quad (3)$$

$$y_{n+1} = A \lambda^{n+1} + B \mu^{n+1} + \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\lambda - \mu} \sum_{r=0}^n (\lambda^r - \mu^r) f_{n-r} \quad (0 \leq n \leq N),$$

where λ , μ are distinct roots of the auxiliary equation $a x^2 + b x + c = 0$, and A , B are constants to be determined by the boundary conditions.

It is convenient at this stage to derive certain relationships involving λ and μ , which are used throughout the paper. We select

$$\lambda = \frac{-b + (b^2 - 4ac)^{1/2}}{2a}, \quad \mu = \frac{-b - (b^2 - 4ac)^{1/2}}{2a},$$

where $\lambda + \mu = -b/a$ and $\lambda \mu = c/a$. Three cases are considered:

(1) λ, μ complex: Put $\lambda = (c/a)^{1/2} e^{i\theta}$, $\mu = (c/a)^{1/2} e^{-i\theta}$, to obtain the result

$$\lambda^s - \mu^s = 2i \left(\frac{c}{a}\right)^{s/2} \sin s \theta, \quad (4)$$

where s is a variable.

(2) λ, μ real ($\lambda \mu > 0$): Put $\lambda/\mu = e^{2\theta}$, to get

$$\lambda^s - \mu^s = \begin{cases} 2 \left(\frac{c}{a}\right)^{s/2} \sinh s \theta & (\lambda > 0, \mu > 0), \\ (-1)^s 2 \left(\frac{c}{a}\right)^{s/2} \sinh s \theta & (\lambda < 0, \mu < 0). \end{cases} \quad (5a)$$

(3) λ, μ real ($\lambda \mu < 0$): Put $-\lambda/\mu = e^{2\theta}$, to obtain

$$\lambda^s - \mu^s = \begin{cases} 2 \left(-\frac{c}{a}\right)^{s/2} \sinh s \theta & (s \text{ even}), \\ 2 \left(-\frac{c}{a}\right)^{s/2} \cosh s \theta & (s \text{ odd}). \end{cases} \quad (5b)$$

Two different types of two-point boundary conditions are considered:

(I) $y = 0$, Y at $x = 0, L$. In this case, the solution given by (3) becomes

$$y_{n+1} = \frac{y - \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\lambda - \mu} \sum_{r=0}^N (\lambda^r - \mu^r) f_{N-r}}{\lambda^{N+1} - \mu^{N+1}} (\lambda^{n+1} - \mu^{n+1}) + \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\lambda - \mu} \sum_{r=0}^n (\lambda^r - \mu^r) f_{n-r}, \quad (6)$$

where $0 \leq n \leq N$. No solution of (6) exists in general if

$$\lambda^{N+1} - \mu^{N+1} = 0. \quad (7)$$

Using (4) and (5) with $s = N + 1$, it is seen after some manipulation that (7) is satisfied only if λ and μ are imaginary and

$$k h^2 = 2 \left[1 - \left(1 - \frac{1}{4} j^2 h^2 \right)^{1/2} \cos \frac{K \Pi}{N+1} \right] \quad (K = 1, 2, \dots, N). \quad (8)$$

Mesh lengths for which the difference equation has, in general, no solution are said to be critical.

(II) $y = 0$ at $x = 0$, and $dy/dx + \alpha y = \beta$ at $x = L$. The derivative $dy/dx + \alpha y = \beta$ at $x = L$ is replaced by the finite difference expression

$$2 y_N + (b - 2 a \alpha h) y_{N+1} = h^2 g \{ (N+1) h \} - 2 a \beta h.$$

The solution given by (3) then becomes

$$y_{n+1} = A (\lambda^{n+1} - \mu^{n+1}) + \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\lambda - \mu} \sum_{r=0}^n (\lambda^r - \mu^r) f_{n-r}, \quad (9)$$

where

$$A = \frac{f_N - 2 a \beta h - \frac{1}{\lambda - \mu} \left[\left(\frac{b}{a} - 2 \alpha h \right) \sum_{r=0}^N (\lambda^r - \mu^r) f_{N-r} + \left(1 + \frac{c}{a} \right) \sum_{r=0}^{N-1} (\lambda^r - \mu^r) f_{N-1-r} \right]}{(b - 2 a \alpha h) (\lambda^{N+1} - \mu^{N+1}) + (a + c) (\lambda^N - \mu^N)}$$

and $0 \leq n \leq N$. Solution (9) does not in general exist if

$$(b - 2 a \alpha h) (\lambda^{N+1} - \mu^{N+1}) + (a + c) (\lambda^N - \mu^N) = 0. \quad (10)$$

If λ and μ are imaginary, (10) is satisfied if the mesh length h satisfies the relationship

$$k h^2 = 2 \left[1 - \left(1 - \frac{1}{4} j^2 h^2 \right)^{1/2} \cos \frac{K \Pi - \varphi}{N+1} \right] \quad (K = 1, 2, \dots, N), \quad (11)$$

where

$$\tan \varphi = \frac{\{k(4 - kh^2) - j^2\}^{1/2}}{2\left(1 - \frac{1}{4}j^2h^2\right)\alpha + \frac{1}{2}(kh^2 - 1)}.$$

If λ and μ are real, then (10) takes the form

$$\left[\frac{b - (b^2 - 4ac)^{1/2}}{b + (b^2 - 4ac)^{1/2}}\right]^{N-1} = \frac{2ac\alpha h + b(1-c) - (b^2 - 4ac)^{1/2}}{2ac\alpha h + b(1-c) + (b^2 - 4ac)^{1/2}}, \quad (12)$$

where $b^2 > 4ac$. In order to illustrate the existence of mesh lengths satisfying (12), consider the case $j = 0$. If $kh^2 > 4$, (12) can be solved to give

$$\delta = \frac{2 \sinh \nu}{\tanh 2(N+1)\nu}, \quad (13)$$

where

$$\delta = \frac{2\alpha}{k^{1/2}} \quad \text{and} \quad \nu = \cosh^{-1} \frac{k^{1/2}h}{2},$$

and where for a prescribed value of N , there is a value of $\delta > 1/(N+1)$ corresponding to any value of $k^{1/2}h > 2$. If $k < 0$, (12) can be solved to give

$$\delta = -\frac{2 \cosh \nu}{\tanh 2(N+1)\nu}, \quad (14)$$

where

$$\delta = \frac{2a}{(-k)^{1/2}} \quad \text{and} \quad \nu = \sinh^{-1} \frac{(-k)^{1/2}h}{2},$$

and where for any value of N , there is a negative value of δ corresponding to any value of $(-k)^{1/2}h > 0$.

3. Correspondence Between Exact Solutions of the Differential and Difference Equations

In the previous section, critical values of the mesh length are given for which the difference equation has in general no solution. These critical lengths depend on the coefficients of the difference equation and the boundary conditions of the problem. Now the range of the problem is given by

$$L = (N+1)h \quad (15)$$

and so corresponding to each critical mesh length there is a critical range of problem given by (15), for which the difference equation, applied at N internal nodes, has in general no solution. In the present section, the differential equation is examined for critical ranges, and the latter compared with the values obtained in the previous section for the difference equation.

The differential equation (1) has solution

$$y = e^{-jx/2} [A e^{(j^2/4 - k)^{1/2}x} + B e^{-(j^2/4 - k)^{1/2}x}] + p(x), \quad (16)$$

if $j^2/4 > k$, and

$$y = e^{-j x/2} \left[A \sin \left(k - \frac{1}{4} j^2 \right)^{1/2} x + B \cos \left(k - \frac{1}{4} j^2 \right)^{1/2} x \right] + p(x), \tag{17}$$

if $j^2/4 < k$, where in each case $p(x)$ is a particular integral of (1) and A, B are constants to be determined by the boundary conditions.

(I) If $y = 0, Y$ at $x = 0, L$, the differential equation has no solution in general, if $j^2/4 < k$, when

$$k^{1/2} L = \frac{K \Pi}{\left(1 - \frac{1}{4} j^2/k \right)^{1/2}} \quad (K = 1, 2, \dots). \tag{18}$$

Now returning to the difference equation, if (15) is used to eliminate h , (8) can be solved to give

$$\frac{4 k}{j^2} \left(1 - \frac{j^2 L^2}{4 (N + 1)^2} \right)^{1/2} = \cos \frac{K \Pi}{N + 1} \pm \left\{ \cos^2 \frac{K \Pi}{N + 1} + \frac{8 k}{j^2} \left(\frac{2 k}{j^2} - 1 \right) \right\}^{1/2} \tag{19}$$

$$= \cos \frac{K \Pi}{N + 1} \pm \left\{ \left(\frac{4 k}{j^2} - 1 \right)^2 - \sin^2 \frac{K \Pi}{N + 1} \right\}^{1/2}. \tag{20}$$

If $k > j^2/2$, a unique solution exists for L for each pair of values of K and N . This is obtained from (19) with the positive sign. For fixed K , as N tends to infinity, each value of L tends to the corresponding critical length of the differential equation given by (18). If $k < j^2/2$, it follows that $0 < (4 k/j^2 - 1) < 1$ and so from (20), for prescribed K and N , the number of values of L is 0, 1, or 2 depending on K and N . Provided N is sufficiently large, however, there are two values of L for each K . The value given by (20) with the positive sign again tends to the corresponding critical length of the differential equation, and the other value tends to infinity, as N tends to infinity.

The following table illustrates the manner in which a critical range of the difference equation approaches the corresponding critical range of the differential equation as N tends to infinity. For convenience, the values $j = 0, k = 9$ are chosen.

Values of Critical Range

$K \backslash N$	3	7	15	31	$\frac{1}{3} K \Pi$
1	1.0204	1.0408	1.0458	1.0464	1.0472
2	1.8856	2.0408	2.0810	2.0915	2.0944
3	2.4636	2.9632	3.0963	3.1302	3.1416

(II) If $y = 0$ at $x = 0$ and $dy/dx + \alpha y = \beta$ at $x = L$, the differential equation has no solution in general when

$$k^{1/2} L = \frac{K \Pi - \varphi}{\left(1 - \frac{1}{4} j^2/k\right)^{1/2}} \quad (K = 1, 2, \dots), \quad (21)$$

where

$$\tan \varphi = \frac{\left(k - \frac{1}{4} j^2\right)^{1/2}}{\alpha - \frac{1}{2} j},$$

if $j^2/4 < k$, and no solution in general when

$$e^{(j^2 - 4k)^{1/2} L} = \frac{2\alpha - j - (j^2 - 4k)^{1/2}}{2\alpha - j + (j^2 - 4k)^{1/2}} \quad (22)$$

if $j^2/4 > k$. By comparison with (I), it seems probable that a critical range of the difference equation computed from (11) approaches the corresponding critical range of the differential equation given by (21) or tends to infinity as N tends to infinity. Consider now critical ranges of the difference equation obtained from (12). Suppose first $j^2/4 < k$, then there are values of α for which (12) yields no critical ranges for any N . For any other value of α , it seems likely that there is a corresponding critical range L_N for all sufficiently large N . It then follows that

$$L_N = \frac{2(N+1)}{k} \left(k - \frac{1}{4} j^2\right)^{1/2},$$

and hence L_N tends to infinity as N tends to infinity. If $j^2/4 > k$, however, the position is more complicated. Again there are values of α for which (12) fails to yield a critical range. For any other value of α it seems that for each sufficiently large N , there are two possible critical ranges, one of which tends to the corresponding critical range of the differential equation given by (22), and the other tends to infinity as N tends to infinity.

4. Behaviour of Solutions Near Critical Points

Three examples are now given of corresponding solutions worked out with ranges which are nearly critical for either the difference or the differential equation. In all examples, the coefficients of the difference equation are exact, and the value $N = 3$ is chosen in order to reduce the computation. The differential equation in all examples is

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k y = k x \quad (k > 0), \quad (23)$$

which, although simple, is adequate to illustrate some of the results of the previous section.

(1) In the first example the boundary conditions are $y = 0$, Y at $x = 0$, L . The solution of the difference equation is given by (6) with $a = 1$, where

$$\lambda, \mu = 1 - \frac{1}{2} k h^2 \pm i k^{1/2} h \left(1 - \frac{1}{4} k h^2\right)^{1/2},$$

and

$$f_s = (s + 1) k h^3 \quad (s = 0, 1, \dots, N).$$

Choose $k^{1/2} h = 0.765$, a value close to the critical value $2 \sin \pi/8$ for the case of three internal nodes, and the solution becomes

$$y_1 = -444.77 L + 445.02 Y,$$

$$y_2 = -629.10 L + 629.60 Y,$$

$$y_3 = -444.97 L + 445.72 Y,$$

where y_1, y_2, y_3 are the values of y at the three internal nodes. The solution of the differential equation is given by

$$y = \frac{Y - L}{\sin k^{1/2} L} \sin k^{1/2} x + x,$$

with $k^{1/2} L = 3.06$, and so at corresponding points,

$$y_1 = -8.2477 L + 8.4977 Y,$$

$$y_2 = -11.7598 L + 12.2598 Y,$$

$$y_3 = -8.4409 L + 9.1909 Y.$$

(2) The boundary conditions of the previous example are retained, but this time a range is chosen which is close to a critical range of the differential equation. Choose $k^{1/2} L = 3.14$, which is close to the critical value π , and the solution of the differential equation yields

$$y_1 = -443.16 L + 443.41 Y,$$

$$y_2 = -626.85 L + 627.35 Y,$$

$$y_3 = -443.38 L + 444.13 Y.$$

The solution of the difference equation with $k^{1/2} h = 0.785$ gives at corresponding points

$$y_1 = 8.7352 L - 8.4852 Y,$$

$$y_2 = 12.2416 L - 11.7416 Y,$$

$$y_3 = 8.5126 L - 7.7626 Y.$$

In the above two examples, it should be noted that although the solutions disagree violently for general Y , there is exact correspondence if $Y = L$. The reason for this becomes evident when the solutions of the difference and differential equations are rearranged for general N to give

$$y_{n+1} = \frac{Y - L}{\lambda^{N+1} - \mu^{N+1}} (\lambda^{n+1} - \mu^{n+1}) + (n+1) h$$

and

$$y_{n+1} = \frac{Y - L}{\sin k^{1/2} L} \sin(n+1) k^{1/2} h + (n+1) h$$

respectively. Thus in examples (1) and (2), although the range of the problem may be nearly critical for either the difference or the differential equation, a fortunate boundary value Y may still enable reasonable agreement to be obtained between the exact solutions.

(3) In the final example, the boundary conditions are $y = 0$ at $x = 0$ and $dy/dx + \alpha y = \beta$ at $x = L$. The solution of the difference equation is given by (9) with $a = 1$, $b = k h^2 - 2$,

$$\lambda, \mu = 1 - \frac{1}{2} k h^2 \pm k^{1/2} h \left(\frac{1}{4} k h^2 - 1 \right)^{1/2},$$

and

$$f_s = (s+1) k h^3 \quad (s = 0, 1, \dots, N).$$

Choose $k^{1/2} h = 2.5$ and $\delta = 1.5$, values which almost satisfy (13) and so this example is worked out near critical conditions of the difference equation. The solution of the difference equation for $N = 3$ is

$$Y_1 = -2175 + 256 \beta,$$

$$Y_2 = 9250 - 1088 \beta,$$

$$Y_3 = -37125 + 4368 \beta,$$

$$Y_4 = 148550 - 17476 \beta,$$

where $Y_r = 4 y_r/L$ ($r = 1, \dots, 4$). The solution of the differential equation (23) is

$$y = \frac{\beta - (1 + \alpha L)}{\alpha \sin k^{1/2} L + k^{1/2} \cos k^{1/2} L} \sin k^{1/2} x + x,$$

and so the corresponding values are

$$Y_1 = 2.63023 - 0.19179 \beta,$$

$$Y_2 = -0.61205 + 0.3073 \beta,$$

$$Y_3 = 5.55507 - 0.3006 \beta,$$

$$Y_4 = 2.51808 + 0.17434 \beta.$$

In general, the lack of agreement between the two solutions is even more marked than in the previous examples. However, the solutions correspond exactly if $\beta = 8.5$, and so even although the values of $k^{1/2}h$ and δ are near critical values for the difference equation, a fortuitous value of β may still enable reasonable agreement to be obtained between the exact solutions of the difference and differential equations.

5. Errors in Approximate Solutions of Finite Difference Equations

So far, numerical solutions of the difference equation (2) have been obtained directly from the exact solution (3). In practice, however, an exact solution of the difference equation is rarely available, and approximate numerical solutions are obtained either by an iterative process such as relaxation or by direct methods of solution of the associated set of simultaneous equations. The accuracy of such numerical solutions of (2) is now investigated.

The error equation corresponding to (2) is

$$a \varepsilon_{r+2} + b \varepsilon_{r+1} + c \varepsilon_r = R_r \quad [r = 0, 1, 2, \dots, (N-1)], \quad (24)$$

where ε_r , ε_{r+1} , ε_{r+2} are the errors in y_r , y_{r+1} , y_{r+2} respectively and R_r is the residual at the $(r+1)$ -th node. Residuals exist for any approximate numerical solution of (2), whether it is obtained by an iterative process such as relaxation or by a direct method. A solution of (24) is

$$\varepsilon_0 = A + B, \quad (25)$$

$$\varepsilon_{n-1} = A \lambda^{n+1} + B \mu^{n+1} + \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\lambda - \mu} \sum_{r=0}^n (\lambda^r - \mu^r) R_{n-r} \quad (0 \leq n \leq N),$$

where A , B are constants to be determined by the boundary conditions.

Consider first the case where the value of the function y is given at both ends of the range. If the boundary values require no rounding off, then

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_{N-1} = 0,$$

and so (25) yields

$$a (\lambda - \mu) \varepsilon_{n+1} = \sum_{r=0}^n (\lambda^r - \mu^r) R_{n-r} - \frac{\sum_{r=0}^N (\lambda^r - \mu^r) R_{N-r}}{\lambda^{N+1} - \mu^{N+1}} (\lambda^{n+1} - \mu^{n+1}) \quad \left. \vphantom{\sum_{r=0}^N} \right\} \quad (26)$$

$$(0 \leq n \leq N-1).$$

If λ , μ are imaginary, it follows from (4) that the coefficients of the residuals may be large in modulus when either θ approximately satisfies (7) or h is near

the value $2/j$. In the following two examples, the errors given by (25) are evaluated for $j = 0$ and $N = 3$.

(1) In the first example, $k^{1/2} h = 0.765$, and the errors at the internal nodes are respectively

$$\varepsilon_1 = -[445.73 R_0 + 629.61 R_1 + 445.02 R_2],$$

$$\varepsilon_2 = -[629.61 R_0 + 890.75 R_1 + 629.61 R_2],$$

$$\varepsilon_3 = -[44.502 R_0 + 629.61 R_1 + 445.73 R_2].$$

The errors are now examined in relation to the corresponding values of y obtained from the exact solutions of the difference and differential equations in the previous section, and two distinct cases arise. If Y is approximately equal to L , the exact solutions are in good agreement, but approximate numerical solutions of the difference equation are likely to involve substantial errors. On the other hand, if Y is not nearly equal to L , the exact solutions are in poor agreement, but the ratio ε/y in an approximate numerical solution is likely to be considerably reduced.

(2) In the second example, $k^{1/2} h = 0.785$, and the errors are respectively

$$\varepsilon_1 = -[7.7623 R_0 + 11.7418 R_1 + 8.4852 R_2],$$

$$\varepsilon_2 = -[11.7418 R_0 + 16.2475 R_1 + 11.7418 R_2],$$

$$\varepsilon_3 = -[8.4852 R_0 + 11.7418 R_1 + 7.7623 R_2].$$

These errors are comparatively small, and so the approximate numerical and exact solutions of the difference equation are likely to be in good agreement for any boundary value Y .

If λ, μ are real, it follows from (5) that the errors given by (26) are unlikely to be large, provided h is not near the value $2/j$.

Consider next the case where the values of the function and its derivative are given, one at either end of the range. The appropriate error equation, from (25), is

$$a(\lambda - \mu) \varepsilon_{n+1} = \sum_{r=0}^n (\lambda^r - \mu^r) R_{n-r} + C(\lambda^{n+1} - \mu^{n+1}), \quad (27)$$

where

$$C = \frac{2a(\lambda - \mu) R_N - \left[(b - 2a\alpha h) \sum_{r=0}^N (\lambda^r - \mu^r) R_{N-r} + (a + c) \sum_{r=0}^{N-1} (\lambda^r - \mu^r) R_{N-1-r} \right]}{(b - 2a\alpha h)(\lambda^{N+1} - \mu^{N+1}) + (a + c)(\lambda^N - \mu^N)},$$

and R_r ($0 \leq r \leq N$) is the residual at the $(r+1)$ -th node. The magnitudes of the coefficients in (27) are obtained using (4) if λ, μ are complex and (5) if λ, μ are real. The coefficients are in general considerably greater in modulus when

λ, μ are real, and may differ widely in magnitude, particularly when the range of the problem is near a critical range of the difference equation, or h is near one or other of the values $\pm 2/j$. As an illustration of this unequal 'weighting' of the residuals, consider an example where $N = 3$, $j = 0$, $k^{1/2} h = 2.5$, $\delta = 1.5$, and the boundary conditions are $y = 0$ at $x = 0$ and $y' + \alpha y = \beta$ at $x = L$. The values of λ, μ are $-1/4$ and 4 respectively and the errors, using (27), are given by

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= 4 R_0 - 16 R_1 + 64 R_2 - 256 R_3, \\ \varepsilon_2 &= -16 R_0 + 68 R_1 - 272 R_2 + 1088 R_3, \\ \varepsilon_3 &= 64 R_0 - 272 R_1 + 1092 R_2 - 4368 R_3, \\ \varepsilon_4 &= -256 R_0 + 1088 R_1 - 4368 R_2 + 17476 R_3,\end{aligned}$$

where the coefficients are exact. It is clear that the value of R_3 has a much greater influence on the errors than the value of R_0 , and consequently in any approximate numerical method of solution of the difference equation, the emphasis must be placed on reducing R_3 as much as possible. Unequal 'weighting' of the residuals in the expressions for the errors, as illustrated in this example, may complicate matters considerably as far as direct numerical methods of solution of the difference equation are concerned, since in such methods it is difficult to attempt to eliminate residuals in a prescribed order. In iterative methods such as relaxation, however, a prescribed order of procedure for eliminating residuals is an advantage. In this particular example, in which $j = 0$, the residuals which must be eliminated occur at the nodes near the end where the derivative is specified. This is likely to be so for general j provided the mesh length is not near the value $-2/j$.

6. Concluding Remarks

In the present paper, it is shown that there are several major difficulties which may confront the computer who is attempting to solve an ordinary differential equation with two-point boundary conditions by difference methods. Although the differential equation examined here is of a particular type, nevertheless, the difficulties described are certain to exist for many other general types of equation.

In the expressions obtained for the errors in the numerical solution in terms of the residuals, some of the coefficients are large in modulus while others are relatively small, when the range of the problem is near a critical range of the difference equation. This unequal 'weighting' makes it essential that the residuals with large coefficients should be reduced as much as possible, a task which is more easily accomplished by an iterative rather than a direct process.

Finally, in the solution of initial value problems by difference methods, it is known that the chance of serious errors arising in numerical solutions is increased considerably if the differential equation is replaced by a higher order difference equation (TODD [3], RUTISHAUSER [4], MITCHELL and CRAGGS [5]). It seems likely that the use of higher order difference replacements will also produce additional complications in the numerical solution of two-point boundary problems.

Acknowledgement

The summary in German was prepared by Professor C. T. CARR.

REFERENCES

- [1] L. FOX and A. R. MITCHELL, *Quart. J. Mech. appl. Math.* 10, 232 (1957).
- [2] L. FOX, *Numerical Solution of Two-Point Boundary Problems* (Oxford, 1957).
- [3] J. TODD, *Math. Tab., Wash.* 4, 39 (1950).
- [4] H. RUTISHAUSER, *Z. angew. Math. Phys.* 3, 65 (1952).
- [5] A. R. MITCHELL and J. W. CRAGGS, *Math. Tab., Wash.* 7, 127 (1953).

Zusammenfassung

Es werden inhomogene Randwertaufgaben bei einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten untersucht. Es gibt dann bekanntlich Ausnahmefälle, wo die Länge des Grundintervalls kritisch ist, das heisst die Randwertaufgabe im allgemeinen keine Lösung besitzt. Auch wenn die Differentialgleichung durch eine Differenzengleichung approximiert wird, hat letztere kritische Intervalle, und es zeigt sich, dass in der Nähe eines kritischen Falles die Lösungen der Differential- und der Differenzengleichung erheblich voneinander abweichen können. Es wird ferner bewiesen, dass bei Verfeinerung der Maschenlänge die kritischen Intervalle der Differenzengleichung gegen diejenigen der Differentialgleichung streben oder über alle Grenzen wachsen.

(Received: September 2, 1958.)

Zur Lösung spezieller Wärmeleitungsprobleme

VON RUDOLF HOFMANN, Berlin, Deutschland¹⁾

1. Einleitung

Die Lösung instationärer Erwärmungsprobleme unter Berücksichtigung von Wärmequellen mit sehr allgemeinen Anfangs- und Grenzbedingungen bereitet grundsätzlich keine Schwierigkeiten. Die Durchrechnung führt wegen der allgemeinen Auffassung des Problems jedoch auf komplizierte und unhandliche Ausdrücke, die sich für die Auswertung konkreter Beispiele kaum eignen. Die Behandlung spezieller Erwärmungsprobleme erscheint daher zweckmässig. Die vorliegende Arbeit bringt als Ergebnis die Erwärmung von Zylinder, Kugel und Quader, wobei die Anfangs- und Grenzbedingungen auf Fälle der technischen Praxis abgestimmt sind. Eingehendere Rechnungen sollen dem Praktiker die Anwendung der Ergebnisse erleichtern²⁾. Zur Lösung der Aufgaben wird bezüglich der Zeitkoordinate die Laplace-Transformation verwendet.

2. Das zylindrische Erwärmungsproblem

Auf die Mantelfläche eines zylindrischen Körpers vom Radius R , der vorher im Temperaturgleichgewicht mit seiner Umgebung gestanden hat, wirke vom Zeitpunkt $t = 0$ an eine Wärmequelle, die mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω rotiert. Ihr Vorhandensein sei die Ursache einer vorgegebenen Temperaturverteilung auf dieser Mantelfläche. Der Wärmefluss auf der gesamten Oberfläche sei in jedem Augenblick proportional der dort herrschenden Übertemperatur (Newtonsches Abkühlungsgesetz). Dieser Annahme entspricht etwa ein auf einer Ebene rollender Zylinder (zum Beispiel Autoreifen), dem an der Berührungsfläche Wärme (heisse Strasse, Walkarbeit, Reibung) zugeführt wird. Aber auch zylindrische Werkstücke, die in Lagern laufen, werden durch diese Bedingungen erfasst. Die Temperaturverteilung im Zylinder und ihre zeitliche Änderung ist zu berechnen.

¹⁾ OSRAM Studiengesellschaft.

²⁾ Alle auftretenden höheren Funktionen und deren Relationen finden sich ausführlich behandelt bei A. SOMMERFELD, *Vorlesungen über theoretische Physik*, Band VI, 2. Aufl. (Leipzig 1948), und JAHNKE-EMDE, *Tafeln höherer Funktionen*, 4. Aufl. (Leipzig 1948).

Die gesuchte Temperatur $\Theta(r, \varphi, z, y)$ muss die Differentialgleichung der Wärmeleitung in Zylinderkoordinaten

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} = \frac{\partial \Theta}{\partial y} \quad (1)$$

befriedigen. Die Variable y enthält die Zeit t in der Form $y = at$, wobei a die Temperaturleitzahl bedeutet. Die gesuchte Temperatur Θ muss ausserdem der vorgegebenen Anfangsbedingung

$$\Theta = 0 \quad \text{für} \quad y = 0 \quad (2)$$

genügen. Es wurde für die Anfangstemperatur $\Theta(r, \varphi, z, 0) = 0$ gesetzt, um die Rechnung mit unschwer zu berechnenden Zusatzgliedern nicht unnötig zu belasten. Die Grenzbedingungen sind:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial \Theta}{\partial z} \pm h \Theta = 0 \quad \text{für} \quad z = \pm z_0 \\ & \frac{\partial \Theta}{\partial r} + h \Theta = F(\varphi, z, y) \quad \text{für} \quad r = R, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

mit

$$F(\varphi, z, y) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{für} \quad 0 < \varphi < \varphi_1(y), \quad \varphi_1 = \Omega y, \quad \omega = a \Omega, \\ h T(y) & \text{für} \quad \varphi_1 < \varphi < \varphi_2(y), \quad \varphi_2 = \Omega y + D, \\ 0 & \text{für} \quad \varphi_2 < \varphi < 2\pi. \end{array} \right\} \quad (4)$$

Für $\Theta(r, \varphi, z, y)$ und $F(\varphi, z, y)$ wird die Existenz der entsprechenden Laplace-Transformierten $\vartheta(r, \varphi, z, s)$ und $f(\varphi, z, s)$ und die Entwickelbarkeit in Fourierreihen vorausgesetzt. Mittels Laplace-Transformation gehen (1), (2) und (3) in die Bedingungen im Bildbereich

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} - s \vartheta = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial z} \pm h \vartheta = 0 \quad (z = \pm z_0) \quad (6)$$

und

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial r} + h \vartheta = f \quad (r = R) \quad (7)$$

über. Wie sich leicht nachrechnen lässt, ist ein partikuläres Integral $\vartheta_{in}(r, \varphi, z, s)$ von (5) durch den Ansatz

$$\vartheta_{in}(s) = [a_{in}(s) \sin \alpha_i z + b_{in}(s) \cos \alpha_i z] I_n(i \sqrt{s + \alpha_i^2} r) e^{i n \varphi} \quad (8)$$

gegeben, wobei $I_n(i|s + \alpha_l^2 r)$ die Besselsche Funktion n -ter Ordnung bedeutet. Die Grössen $a_{ln}(s)$, $b_{ln}(s)$ und α_l sind durch die Grenzbedingungen (6) und (7) festgelegt. Das allgemeine Integral ergibt sich dann als Summe über die ϑ_{ln} :

$$\vartheta(r, \varphi, z, s) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \vartheta_{ln}(r, \varphi, z, s).$$

Die Bedingung (6) liefert die Gleichungen

$$a_{ln} [\alpha_l \cos \alpha_l z_0 + h \sin \alpha_l z_0] - b_{ln} [\alpha_l \sin \alpha_l z_0 - h \cos \alpha_l z_0] = 0,$$

$$a_{ln} [\alpha_l \cos \alpha_l z_0 + h \sin \alpha_l z_0] + b_{ln} [\alpha_l \sin \alpha_l z_0 - h \cos \alpha_l z_0] = 0.$$

Daraus folgt:

$$a_{ln} = b_{ln} \frac{\alpha_l \sin \alpha_l z_0 - h \cos \alpha_l z_0}{\alpha_l \cos \alpha_l z_0 + h \sin \alpha_l z_0} \quad (9)$$

und

$$(h^2 - \alpha_l^2) \sin 2 \alpha_l z_0 + 2 \alpha_l h \cos 2 \alpha_l z_0 = 0. \quad (10)$$

Die Werte α_l sind demnach die positiven Wurzeln von (10). Damit geht (8) in

$$\vartheta = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_{ln}(s) I_n(i \sqrt{s + \alpha_l^2} r) H_l(z) e^{in\varphi} \quad (11)$$

über mit

$$H_l(z) = \frac{\alpha_l \cos \alpha_l (z_0 - z) + h \sin \alpha_l (z_0 - z)}{\alpha_l \cos \alpha_l z_0 + h \sin \alpha_l z_0}.$$

Es gelten die Orthogonalitätsrelationen

$$\left. \begin{aligned} \int_{-z_0}^{+z_0} H_l(z) H_j(z) dz &= 0 \quad \text{für } l \neq j \quad (l, j = 1, 2, 3, \dots), \\ N_l &= \int_{-z_0}^{+z_0} H_l(z) H_l(z) dz \\ &= \frac{2 \alpha_l z_0 (\alpha_l^2 + h^2) + (\alpha_l^2 - h^2) \sin 2 \alpha_l z_0 \cos 2 \alpha_l z_0 + 2 h \alpha_l \sin^2 2 \alpha_l z_0}{2 \alpha_l (\alpha_l \cos \alpha_l z_0 + h \sin \alpha_l z_0)^2}, \\ K_l &= \int_{-z_0}^{+z_0} H_l(z) dz = \frac{2 \sin \alpha_l z_0}{\alpha_l}, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

die für die folgende Entwicklung notwendig sind. Mit

$$t = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{ln}(s) H_l(z) e^{i n \varphi}, \quad c_{ln}(s) = \frac{\int_{z_0}^{2\pi - z_0} f(\varphi, z, s) H_l(z) e^{-i n \varphi} dz d\varphi}{2\pi N_l} \quad (13)$$

folgt für den Koeffizienten $b_{nl}(s)$ aus (7) der Ausdruck

$$b_{ln}(s) = \frac{R c_{ln}(s)}{(n + h R) I_n(i \sqrt{s + \alpha_l^2} R) - i \sqrt{s + \alpha_l^2} R I_{n+1}(i \sqrt{s + \alpha_l^2} R)}.$$

Die vollständige Lösung des Erwärmungsvorganges lautet daher im Bildbereich

$$\vartheta = R \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_{ln}(s) I_n(i \sqrt{s + \alpha_l^2} r) H_l(z) e^{i n \varphi}}{(n + h R) I_n(i \sqrt{s + \alpha_l^2} R) - i \sqrt{s + \alpha_l^2} R I_{n+1}(i \sqrt{s + \alpha_l^2} R)}. \quad (14)$$

Bevor ϑ in den Originalbereich rücktransformiert wird, ist es zweckmässig, für ϑ eine Entwicklung nach Besselschen Funktionen hinsichtlich r und eine Entwicklung in eine Partialbruchreihe hinsichtlich der Wurzeln des Nenners vorzunehmen. Nullsetzen des Nenners liefert mit

$$i \sqrt{s_{lnk} + \alpha_l^2} = \beta_{lnk} \quad \text{und} \quad s_{lnk} = -(\alpha_l^2 + \beta_{lnk}^2) = -\sigma_{lnk}^2$$

die Gleichung

$$(n + h R) I_n(\beta_{lnk} R) - \beta_{lnk} R I_{n+1}(\beta_{lnk} R) = 0. \quad (15)$$

Die Werte β_{lnk} sind demnach die positiven Wurzeln von (15). Es gelten auch hier Orthogonalitätsrelationen, nämlich

$$\left. \begin{aligned} \int_0^R I_n(\beta_{lnk} r) I_n(\beta_{lnj} r) r dr &= 0 \quad \text{für} \quad k \neq j \quad (k, j = 1, 2, 3, \dots), \\ M_{lnk} &= \int_0^R I_n(\beta_{lnk} r) I_n(\beta_{lnk} r) r dr \\ &= \frac{R}{2 \beta_{lnk}} \{ \beta_{lnk} R [I_n^2(\beta_{lnk} R) + I_{n+1}^2(\beta_{lnk} R)] - 2 n I_n(\beta_{lnk} R) I_{n+1}(\beta_{lnk} R) \}, \\ \bar{M}_{l0k} &= \int_0^R I_0(\beta_{l0k} r) r dr = \frac{R}{\beta_{l0k}} I_1(\beta_{l0k} R). \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Wegen (16) gilt die Entwicklung

$$\left. \begin{aligned} & \frac{R I_n (i \sqrt{s + \alpha_l^2} r)}{(n + h R) I_n (i \sqrt{s + \alpha_l^2} R) - i \sqrt{s + \alpha_l^2} R I_{n+1} (i \sqrt{s + \alpha_l^2} R)} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{R^2 \beta_{lnk} I_{n+1} (\beta_{lnk} R)}{(s + \sigma_{lnk}^2) (n + h R) M_{lnk}} I_n (\beta_{lnk} r), \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

und (14) geht in

$$\vartheta = R^2 \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{ln}(s) \beta_{lnk} I_{n+1} (\beta_{lnk} R)}{(s + \sigma_{lnk}^2) (n + h R) M_{lnk}} I_n (\beta_{lnk} r) H_l(z) e^{in\varphi} \quad (18)$$

über. Die Anwendung des Dämpfung- und Faltungssatzes der Laplace-Transformation liefert das gesuchte Ergebnis im Originalbereich:

$$\left. \begin{aligned} \Theta &= R^2 \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_{lnk} I_{n+1} (\beta_{lnk} R) I_n (\beta_{lnk} r) H_l(z) e^{in\varphi}}{(n + h R) M_{lnk}} \\ &\quad \times e^{-\sigma_{lnk}^2 y} \int_0^y c_{ln}^{(\tau)}(r) e^{\sigma_{lnk}^2 \tau} d\tau, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

wobei in (19) wegen (4) und (13) für

$$c_{ln}(y) = \frac{i h K_l (e^{-inD} - 1)}{2 \pi N_l n} T(y) e^{-in\Omega y}$$

zu setzen ist. In der technischen Praxis interessiert meistens nur der stationäre Endzustand des Erwärmungsvorganges, wobei in vielen Fällen die zeitliche Unveränderlichkeit von $T(y)$ angenommen werden kann. Mit $T(y) = T_0$ folgt dann aus (19) unter Berücksichtigung von (17)

$$\left. \begin{aligned} \Theta_{stat} &= \frac{i R h T_0}{2 \pi} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \\ &\times \frac{I_n (i \sqrt{\alpha_l^2 - i n \Omega} r)}{(n + h R) I_n (i \sqrt{\alpha_l^2 - i n \Omega} R) - i \sqrt{\alpha_l^2 - i n \Omega} R I_{n+1} (i \sqrt{\alpha_l^2 - i n \Omega} R)} \\ &\times \frac{K_l (e^{-inD} - 1)}{N_l n} H_l(z) e^{in(\varphi - \Omega y)}. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Der Wellencharakter von Θ_{stat} ist leicht zu erkennen.

3. Das Erwärmungsproblem bei der Kugel

Auf der Oberfläche einer Kugel vom Radius R , die vorher im Temperaturgleichgewicht mit der Umgebung gestanden hat, sei vom Zeitpunkt $t = 0$ an

eine Temperaturverteilung

$$G(\vartheta, \varphi, y) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{für } 0 < \varphi < \varphi_1(y), \quad \varphi_1(y) = \Omega y, \\ h T(\vartheta) & \text{für } \varphi_1 < \varphi < \varphi_2, \quad \varphi_2 = \Omega y + D, \\ 0 & \text{für } \varphi_2 < \varphi < 2\pi \end{array} \right\} \quad (21)$$

vorgegeben. G entstehe auf dieselbe Weise wie beim zylindrischen Problem. Ferner gelte auch hier das Newtonsche Abkühlungsgesetz. Diese Annahmen erlauben zum Beispiel die angenäherte Berechnung des Erwärmungsvorganges bei einem rotierenden Satelliten im Strahlungsfeld der Sonne. Aber auch Erwärmungsprobleme bei Kugellagern sowie die Bestimmung der Temperatur im Erdinnern können durch diese Annahmen behandelt werden. Die Berechnung der gefragten Temperaturverteilung geschieht auf dieselbe Weise wie im 2. Abschnitt.

Die gesuchte Temperatur $\Theta(r, \vartheta, \varphi, y)$ muss die Differentialgleichung der Wärmeleitung in Kugelkoordinaten

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2(r \Theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \Theta}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \cdot \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial \Theta}{\partial y} \quad (22)$$

befriedigen und die Anfangs- und Grenzbedingungen

$$\Theta = 0 \quad \text{für } y = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial r} + h \Theta = G \quad \text{für } r = R \quad (23)$$

erfüllen. Auch hier wird die Existenz der Laplace-Transformierten

$$\mathfrak{L}\{\Theta(r, \vartheta, \varphi, y)\} = \bar{\vartheta}(r, \vartheta, \varphi, s)$$

und

$$\mathfrak{L}\{G(\vartheta, \varphi, y)\} = g(\vartheta, \varphi, s)$$

sowie ihre Entwickelbarkeit in Fouriersche Reihen vorausgesetzt. Die Bedingungen (22) und (23) lauten im Bildbereich

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2(r \bar{\vartheta})}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \cdot \frac{\partial^2 \bar{\vartheta}}{\partial \varphi^2} - s \bar{\vartheta} = 0 \quad (24)$$

und

$$-\frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial r} + h \bar{\vartheta} = g \quad \text{für } r = R. \quad (25)$$

Eine lineare Kombination partikulärer Integrale von (24) liefert den Lösungsansatz:

$$\bar{\vartheta} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_{nm}(s) \psi_n(i \sqrt{s} r) P_n^{h_i}(\cos \vartheta) e^{im \varphi}.$$

Die $P_n^m(\cos \vartheta)$ sind die sogenannten zugeordneten Kugelfunktionen m -ter Ordnung, sie erfüllen die Differentialgleichung

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{dP_n^m}{d\vartheta} \right) + \left\{ n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} \right\} P_n^m = 0.$$

Es gelten die Relationen

$$\left. \begin{aligned} \int_{-1}^1 P_l^m(x) P_n^m(x) dx &= 0 \quad \text{für } l \neq n \quad (l, n = 1, 2, 3, \dots), \\ L_{nm} &= \int_{-1}^1 P_n^m(x) P_n^m(x) dx = \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{(n+m)!}{(n-m)!}, \\ P_n^{-m} &= (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m, \quad P_n^0 = P_n, \quad P_n^m = 0 \quad \text{für } m > n. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Die $\psi_n(\sigma r)$ erfüllen die Differentialgleichung

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 (r \psi_n)}{\partial r^2} + \left\{ \sigma^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} \right\} \psi_n = 0.$$

Ferner gilt

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \psi_n(\varrho) &= I_{n+1/2}(\varrho) \quad (\text{halbzahlige Bessel-Funktion}), \\ \psi_0 &= \frac{\sin \varrho}{\varrho}, \quad \psi_1 = \frac{\sin \varrho - \varrho \cos \varrho}{\varrho^2}, \quad \psi_n = (-\varrho)^n \left(\frac{d}{\varrho d\varrho} \right)^n \psi_0, \\ \frac{d\psi_n}{d\varrho} &= \frac{n}{\varrho} \psi_n - \psi_{n+1}. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Die Integrationskonstante $d_{nm}(s)$ ist durch (25) festgelegt. Aus (25) folgt, wenn für g die Entwicklung

$$\left. \begin{aligned} g &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} g_{nm}(s) P_n^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi} \\ \text{mit} \quad g_{nm}(s) &= \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi g(\vartheta, \varphi, s) e^{-im\varphi} P_n^m(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi}{2\pi L_{nm}} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

angesetzt wird,

$$d_{nm}(s) = R \frac{g_{nm}(s)}{(n+h)R} \psi_n(i\sqrt{s}R) - i\sqrt{s}R \psi_{n+m}(i\sqrt{s}R).$$

Die Lösung des Erwärmungsvorganges lautet daher im Bildbereich

$$\bar{\vartheta} = R \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{g_{nm}(s)}{(n+hR) \psi_n(i\sqrt{s}R) - i\sqrt{s}R \psi_{n+1}(i\sqrt{s}R)} \times \psi_n(i\sqrt{s}r) P_n^m e^{im\varphi}. \quad (29)$$

Für die Rücktransformation wird hier ϑ nach den ψ_n hinsichtlich r und in eine Partialbruchreihe hinsichtlich der Wurzeln des Nenners entwickelt. Nullsetzen des Nenners liefert mit

$$i\sqrt{s_{ln}} - \sigma_{ln} \quad \text{und} \quad s_{ln} = \sigma_{ln}^2$$

die Gleichung

$$(n+hR) \psi_n(\sigma_{ln}R) - \sigma_{ln}R \psi_{n+1}(\sigma_{ln}R) = 0, \quad (30)$$

woraus die σ_{ln} als die positiven Wurzeln berechnet werden können. Es gelten die folgenden Orthogonalitätsrelationen:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^R r^2 \psi_n(\sigma_{ln}r) \psi_n(\sigma_{jn}r) dr &= 0 \quad \text{für} \quad l \neq j \quad (l, j = 1, 2, 3, \dots), \\ \bar{K}_{ln} &= \int_0^R r^2 \psi_n(\sigma_{ln}r) \psi_n(\sigma_{ln}r) dr = \frac{R^2}{2\sigma_{ln}}, \\ &\times \{ \sigma_{ln}R [\psi_n^2(\sigma_{ln}R) + \psi_{n+1}^2(\sigma_{ln}R)] - (2n+1) \psi_n(\sigma_{ln}R) \psi_{n+1}(\sigma_{ln}R) \}, \\ \bar{N}_l &= \int_0^R r^2 \psi_0(\sigma_{lo}r) dr = \frac{R^2}{\sigma_{lo}} \psi_1(\sigma_{lo}R). \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Daraus folgt

$$\left. \begin{aligned} &\frac{R \psi_n(i\sqrt{s}r)}{(n+hR) \psi_n(i\sqrt{s}R) - i\sqrt{s}R \psi_{n+1}(i\sqrt{s}R)} \\ &= R^3 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sigma_{ln} \psi_{n+1}(\sigma_{ln}R)}{(s + \sigma_{ln}^2)(n+hR) \bar{K}_{ln}} \psi_n(\sigma_{ln}r), \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

und für $\bar{\vartheta}$:

$$\bar{\vartheta} = R^3 \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{g_{nm}(s) \sigma_{ln} \psi_{n+1}(\sigma_{ln}R)}{(s + \sigma_{ln}^2)(n+hR) \bar{K}_{ln}} \psi_n(\sigma_{ln}r) P_n^m e^{im\varphi}. \quad (33)$$

Die Rücktransformation von (33) liefert das gesuchte Ergebnis im Originalbereich:

$$\Theta = R^3 \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_{ln} \psi_{n+1}(\sigma_{ln} R)}{(n+hR) \bar{K}_{ln}} \left. \begin{aligned} & \times \psi_n(\sigma_{ln} r) P_n^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi} e^{-\sigma_{ln} y} \int_0^y G_{nm}(\tau) e^{\sigma_{ln}^2 \tau} d\tau, \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

wobei in (34) wegen (21) für

$$G_{nm}(y) = S_{nm} e^{-im\Omega y} \quad \text{mit} \quad S_{nm} = \frac{h i [e^{-imD} - 1]}{2 \pi L_{nm} m} \int_0^{\pi} T(\vartheta) P_n^m(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta$$

zu setzen ist. Für den stationären Endzustand Θ_{stat} ergibt sich aus (34) mit Berücksichtigung von (32)

$$\Theta_{stat} = R \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} S_{nm} P_n^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi} \left. \begin{aligned} & \psi_n(i \sqrt{-im\Omega} r) e^{-im\Omega y} \\ & (n+hR) \psi_n(t | -im\Omega R) - (-im\Omega R) \psi_{n+1}(t | -im\Omega R) \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Der Wellencharakter von Θ_{stat} ist auch hier leicht zu erkennen.

4. Ein spezielles Erwärmungsproblem der Elektrotechnik

Es werde eine Metallplatte betrachtet, die vorher im Temperaturgleichgewicht mit der Umgebung gestanden hat und vom Zeitpunkt $t = 0$ an von dem konstanten Gleichstrom I durchflossen wird. Im Innern der Platte wird dann pro Volumen- und Zeiteinheit die Wärmemenge W_0 und an den Stirnflächen ($x = x_0$) durch den als gleichmässig verteilt angenommenen Übergangswiderstand pro Flächen- und Zeiteinheit die Wärmemenge Q_0 erzeugt. Auf den restlichen Teilen der Oberfläche gelte das Newtonsche Abkühlungsgesetz. Für die Anfangstemperatur sei auch hier $\Theta(x, y, z, 0) = 0$ gesetzt. Die Temperaturverteilung in der Metallplatte und ihre zeitliche Änderung ist zu berechnen.

Die gesuchte Temperatur $\Theta(x, y, z, \tau)$ muss die Differentialgleichung der Wärmeleitung mit inneren Wärmequellen

$$\Delta \Theta = \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + w_0 \left. \begin{aligned} & (1 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \tau = at, \quad w_0 = \frac{W_0}{\lambda}, \quad \lambda = \text{Wärmeleitfähigkeit}) \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

erfüllen mit der Anfangsbedingung

$$\Theta = 0 \quad \text{für} \quad \tau = 0. \quad (37)$$

Als Grenzbedingungen ergeben sich

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} = \pm q_0 \quad \text{für} \quad x = \pm x_0 \left(q_0 = \frac{Q_0}{\lambda} \right) \quad (38)$$

(da auf den Stirnflächen die Wärmeströmung durch die erzeugte Wärmemenge Q_0 gegeben ist) und

$$\frac{\partial \Theta}{\partial y} \pm h \Theta = 0 \quad \text{für} \quad y = \pm y_0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial z} \pm h \Theta = 0 \quad \text{für} \quad z = \pm z_0. \quad (39)$$

Mit $\mathfrak{L}\{\Theta(x, y, z, \tau)\} = \vartheta(x, y, z, s)$ und den bekannten Regeln der Laplace-Transformation gehen (36), (37), (38) und (39) in die Bildbereich-Bedingungen

$$1\vartheta - s\vartheta = \frac{w_0}{s}, \quad (40)$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \pm \frac{q_0}{s} \quad \text{für} \quad x = \pm x_0, \quad (41)$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial y} \pm h \vartheta = 0 \quad \text{für} \quad y = \pm y_0, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \pm h \vartheta = 0 \quad \text{für} \quad z = \pm z_0 \quad (42)$$

über. Eine lineare Kombination partikulärer Integrale der homogenen und inhomogenen Differentialgleichung (40) liefert den Lösungsansatz:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk}(s) K_n(y) P_k(z) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} [c_{nk}(s) \sin i \sqrt{s - \varepsilon_{nk}^2} x + d_{nk}(s) \cos i \sqrt{s - \varepsilon_{nk}^2} x] K_n(y) P_k(z) \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

mit

$$K_n(y) = \frac{\beta_n \cos \beta_n (y_0 - y) + h \sin \beta_n (y_0 - y)}{\beta_n \cos \beta_n y_0 + h \sin \beta_n y_0}$$

und

$$P_k(z) = \frac{\gamma_k \cos \gamma_k (z_0 - z) + h \sin \gamma_k (z_0 - z)}{\gamma_k \cos \gamma_k z_0 + h \sin \gamma_k z_0}.$$

Um (42) zu genügen, müssen β_n und γ_k als positive Wurzeln aus den Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} (h^2 - \beta_n^2) \sin 2 \beta_n y_0 + 2 h \beta_n \cos 2 \beta_n y_0 &= 0, \\ (h^2 - \gamma_k^2) \sin 2 \gamma_k z_0 + 2 h \gamma_k \cos 2 \gamma_k z_0 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

bestimmt werden. Es gelten die Orthogonalitätsrelationen

$$\begin{aligned}
 & \int_{-y_0}^{+y_0} K_n(y) K_j(y) dy = 0 \quad \text{für } n \neq j \quad (n, j = 1, 2, 3, \dots), \\
 & V_n = \int_{-y_0}^{+y_0} K_n(y) dy = \frac{2 \sin \beta_n y_0}{\beta_n}, \\
 & R_n = \int_{-y_0}^{+y_0} K_n(y) K_n(y) dy \\
 & \quad = \frac{2 \beta_n y_0 [\beta_n^2 + h^2] + [\beta_n^2 - h^2] \sin 2 \beta_n y_0 \cos 2 \beta_n y_0 + 2 h \beta_n \sin^2 2 \beta_n y_0}{2 \beta_n (\beta_n \cos \beta_n y_0 + h \sin \beta_n y_0)^2}, \\
 & \int_{-z_0}^{+z_0} P_k(z) P_j(z) dz = 0 \quad \text{für } k \neq j \quad (k, j = 1, 2, 3, \dots), \\
 & V_k = \int_{-z_0}^{+z_0} P_k(z) dz = \frac{2 \sin \gamma_k z_0}{\gamma_k}, \\
 & R_k = \int_{-z_0}^{+z_0} P_k(z) P_k(z) dz \\
 & \quad = \frac{2 \gamma_k z_0 [\gamma_k^2 + h^2] + [\gamma_k^2 - h^2] \sin 2 \gamma_k z_0 \cos 2 \gamma_k z_0 + 2 h \gamma_k \sin^2 2 \gamma_k z_0}{2 \gamma_k (\gamma_k \cos \gamma_k z_0 + h \sin \gamma_k z_0)^2}.
 \end{aligned} \tag{45}$$

(40) liefert, wenn für

$$\frac{V_n V_k}{R_n R_k} = A_{nk}$$

und für

$$\varepsilon_{nk}^2 = \beta_n^2 + \gamma_k^2$$

gesetzt wird,

$$b_{nk}(s) = A_{nk} \frac{w_0}{s (s + \varepsilon_{nk}^2)}.$$

Schliesslich folgt aus (41)

$$c_{nk} = 0 \quad \text{und} \quad d_{nk} = -A_{nk} \frac{q_0}{i} \cdot \frac{1}{s \sqrt{s + \varepsilon_{nk}^2} \sin i \sqrt{s + \varepsilon_{nk}^2} x_0}.$$

Die vollständige Lösung lautet daher im Bildbereich:

$$\vartheta = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} K_n(y) P_k(z) \left\{ \frac{w_0}{s (s + \varepsilon_{nk}^2)} - \frac{q_0}{i} \cdot \frac{\cos i \sqrt{s + \varepsilon_{nk}^2} x}{s \sqrt{s + \varepsilon_{nk}^2} \sin i \sqrt{s + \varepsilon_{nk}^2} x_0} \right\}. \tag{46}$$

Zur Rücktransformation in den Originalbereich ist eine Umformung von (46) zweckmässig. Auf Grund der Entwicklung

$$\left. \begin{aligned} i \frac{\cos i \sqrt{s + \varepsilon_{nk}^2} x}{\sqrt{s + \varepsilon_{nk}^2} \sin i \sqrt{s + \varepsilon_{nk}^2} x_0} &= -\frac{2}{x_0} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{\cos l \pi (x/x_0)}{(s + \sigma_{lnk}^2)}, \\ \left[\sigma_{lnk}^2 &= \left(\frac{l \pi}{x_0} \right)^2 + \beta_n^2 + \gamma_k^2 \right], \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

geht (46) in

$$\left. \begin{aligned} \vartheta &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} K_n(y) P_k(z) \\ &\times \left\{ \frac{w_0}{s(s + \varepsilon_{nk}^2)} + \frac{2 q_0}{x_0} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{\cos l \pi (x/x_0)}{s(s + \sigma_{lnk}^2)} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

über. Wegen

$$\mathfrak{L} \left\{ \frac{1}{\delta} (1 - e^{-\delta \tau}) \right\} = \frac{1}{s(s + \delta)}$$

und bei Beachtung von (47) bekommt man das gesuchte Ergebnis im Originalbereich:

$$\left. \begin{aligned} \Theta &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} K_n(y) P_k(z) \\ &\left\{ \frac{q_0 \cosh \varepsilon_{nk} x}{\varepsilon_{nk} \sinh \varepsilon_{nk} x_0} + \frac{w_0}{\varepsilon_{nk}^2} (1 - e^{-\varepsilon_{nk} l}) + \frac{2 q_0}{x_0} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{\cos l \pi (x/x_0)}{\sigma_{lnk}^2} e^{-\sigma_{lnk} \tau} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Für die Temperatur Θ_{stat} im stationären Endzustand ($\tau \rightarrow \infty$) folgt aus (49)

$$\Theta_{stat} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{nk}}{\varepsilon_{nk}^2} \left\{ w_0 + \frac{q_0 \varepsilon_{nk}}{\sinh \varepsilon_{nk} x_0} \cosh \varepsilon_{nk} x \right\} K_n(y) P_k(z). \quad (50)$$

An speziellen Fällen der technischen Praxis wurde gezeigt, dass auch bei schwierigen Erwärmungsproblemen der Durchrechnung mit klassischen Methoden keine wesentlichen Hindernisse im Wege stehen. Die Lösung instationärer Erwärmungsprobleme unter Berücksichtigung von Wärmequellen und sehr allgemeinen Anfangs- und Grenzbedingungen kann immer additiv aus einer Anzahl von Teillösungen aufgebaut werden, die alle grundsätzlich auf die gleiche Weise gefunden werden, wie die in dieser Arbeit abgeleiteten Ergebnisse.

Summary

The heating of cylinder, sphere and cube is computed, the starting and boundary conditions being specified for cases of technical importance. The solution of non-stationary heating problems (considering heat sources, and starting and boundary conditions of very general nature) can always be synthesized by superposition of a finite number of partial solutions, which can, in principle, be found in the same manner as those worked out in this paper.

(Eingegangen: 21. Oktober 1958.)

Iterative Lösung und Fehlerabschätzung in der Ausgleichsrechnung

Von PETER LÄUCHLI, Zürich¹⁾

INHALTSVERZEICHNIS

Einleitung.	245
1. <i>Formulierung der Ausgleichsrechnung in Matrizenschreibweise</i>	247
1.1 Allgemeine Erklärungen	247
1.2 Vermittelnde Ausgleichung	249
1.3 Bedingte Ausgleichung	250
1.4 Beziehung zwischen den beiden Arten von Ausgleichung	252
1.5 Die mittleren Fehler der ausgeglichenen Unbekannten.	252
2. <i>Numerische Behandlung der Ausgleichungsaufgabe</i>	254
2.1 Übersicht über verschiedene Relaxationsverfahren	254
2.2 Die Methode der konjugierten Gradienten	256
2.3 Vermittelnde Ausgleichung nach der Methode der konjugierten Gradienten	258
2.4 Bedingte Ausgleichung nach der Methode der konjugierten Gradienten	260
2.5 Berechnung der Gewichtskoeffizienten	261
3. <i>Abschätzungen für die Quadratsumme der Verbesserungen</i>	262
3.1 Allgemeine Bemerkungen	262
3.2 Grobe Abschätzung	263
3.3 Feinere Abschätzung	265
3.4 Zusammenfassung der Abschätzungen	268
3.5 Anwendung auf das Verfahren der konjugierten Gradienten	269
4. <i>Beispiele</i>	273
4.1 Nivellementsausgleichung (vermittelnd)	273
4.2 Triangulierungsnetz (bedingt)	275
4.3 Approximation durch Polynom (vermittelnd und bedingt)	277

EINLEITUNG

Die Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate gehört heute zu den klassischen Stücken der numerischen Mathematik und ist längst so selbstverständlich geworden, dass wir deren Entdeckung durch den siebenzehnjährigen GAUSS kaum mehr richtig zu würdigen wissen.

¹⁾ Institut für angewandte Mathematik der ETH.

Wenn man allerdings die Praktiken verfolgt, nach denen vorher zum Beispiel im Vermessungswesen Widersprüche enthaltende Beobachtungen in mühsamer und undurchsichtiger Weise notdürftig zum Stimmen gebracht wurden, und wenn man sieht, welche zähen Widerstände bei der Einführung der Gaussschen Methode zu überwinden waren, dann wird doch klar, dass damit ein beträchtlicher Schritt getan wurde.

Die Theorie, 1794 von GAUSS ersonnen, beinahe gleichzeitig von LEGENDRE ebenfalls gefunden und von diesem als erstem 1806 publiziert, feierte ihren ersten Triumph bei der Berechnung der Bahn des neuentdeckten Planeten Ceres durch GAUSS im Jahre 1801. In der folgenden, mehr als 150jährigen Entwicklung wurden Theorie und Art der praktischen Durchführung auf einen hohen Stand gebracht.

Die Methode der kleinsten Quadrate kann durch wahrscheinlichkeitstheoretische Überlegungen sauber begründet werden, und sie ist von den überhaupt sinnvollen Möglichkeiten der Ausgleichung die mathematisch zugänglichste. Die gesuchten Grössen treten als Unbekannte eines linearen Gleichungssystems, der sogenannten Normalgleichungen, auf. Zu deren Auflösung gibt es viele Methoden; wohl die bekannteste ist diejenige der sukzessiven Elimination der Unbekannten nach dem Gaußschen Algorithmus bzw. einer moderneren Variante desselben Verfahrens.

Allein schon von GAUSS wurde ein ganz anderer Weg vorgeschlagen und auch praktisch erprobt: die iterative Auflösung von Gleichungssystemen durch Näherungsverfahren, welche in jedem Zwischenschritt eine bessere Approximation der Unbekannten liefern. Da nun auch die exakten Lösungen der Normalgleichungen doch nur einen Kompromiss zur Ausgleichung der widerspruchsvollen Messungen darstellen können, liegt gewiss die Frage nahe, ob nicht schon die angenäherte Lösung des Gleichungssystems annehmbare Resultate liefern könnte.

Die Entwicklung der iterativen Lösungsmethoden wurde besonders in den letzten fünfzig Jahren auf breiter Basis betrieben; unter dem Stichwort «Relaxationsrechnung» hat sich bereits eine beträchtliche Literatur angesammelt. Mit der Anwendung dieser Methoden auf die Ausgleichsrechnung erhebt sich weiter der Wunsch nach Verfahren, welche die Aufstellung der Normalgleichungen umgehen [1]²⁾. Ein Ziel unserer Arbeit ist die Diskussion der Anwendung gewisser Relaxationsmethoden auf die Ausgleichsrechnung (2. Teil).

Mit dem früheren Abbrechen eines Näherungsverfahrens stellt sich von selbst das Problem, gewisse Abschätzungen für die erreichte Genauigkeit zu erhalten, und zwar möchte man im Falle der Ausgleichsrechnung insbesondere Schranken für die Quadratsumme der Verbesserungen, welche zu einem Minimum gemacht werden soll. Bekanntlich unterscheidet man zwischen *vermit-*

²⁾ Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 280.

telnder und *bedingter* Ausgleichung; die beiden Arten verhalten sich bei einer geometrischen Interpretation dual zueinander. Nun liefert im Falle der vermittelnden Ausgleichung jede Näherungslösung für die Unbekannten eine triviale obere Schranke für die erwähnte Quadratsumme, während bei der bedingten Ausgleichung im allgemeinen überhaupt keine Schranken bei vorzeitigem Abbrechen entstehen und nur bei speziellen Iterationsverfahren während des Verlaufs der Rechnung untere Schranken angegeben werden können. Um beidseitige Schranken zu gewinnen, müsste man die beiden Ausgleichungsarten kombinieren. Es wird sich zeigen, dass dies unter Umständen nicht schon beim Beginn der Rechnung, sondern erst vor dem Abbrechen getan werden muss.

Das zweite Ziel der vorliegenden Arbeit besteht in der Übertragung einer von SYNGE [2], und anderen besonders im Zusammenhang mit partiellen Differentialgleichungen der Physik entwickelten Idee auf die Ausgleichsrechnung zwecks Gewinnung solcher Schranken (3. Teil). Dies geschieht zunächst in allgemeiner Form, das heisst ohne Bezug auf eine bestimmte Iterationsmethode, sodann aber speziell im Hinblick auf das in der zitierten Publikation [1] besprochene Verfahren.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, an dieser Stelle Herrn Professor STIEFEL dafür zu danken, dass er zu dieser Arbeit den Anstoss gab und mir auch in der Folge immer wieder mit Anregungen beistand. Ebenfalls zu Dank verpflichtet bin ich Herrn Professor KOBOLD, der mir im Gespräch den Standpunkt des Geodäten etwas näherbrachte.

1. Formulierung der Ausgleichsrechnung in Matrizenschreibweise

1.1 Allgemeine Erklärungen

In der Ausgleichsrechnung geht man von einem Satz von n Werten aus, welche den Charakter von Messresultaten haben. Wenn nun diese Anzahl n grösser ist, als zur eindeutigen Bestimmung des fraglichen Systems notwendig wäre, so werden sich infolge der Messungenauigkeit gewisse Widersprüche einstellen. Zu deren Beseitigung hat man an den gemessenen Grössen Verbesserungen derart anzubringen, dass alle Nebenbedingungen erfüllt werden. Gleichzeitig soll man möglichst «in der Nähe» der Messungen bleiben. Diese letztere Forderung kann auf verschiedene Arten interpretiert werden; in der bekannten Gaußschen Methode der kleinsten Quadrate sucht man ihr dadurch gerecht zu werden, dass man die Quadratsumme der Verbesserungen zu einem Minimum macht.

Die erwähnten Nebenbedingungen treten bei der *vermittelnden Ausgleichung* dadurch in Erscheinung, dass sich die n Messungen als lineare (bzw. linearisierte) Funktionen der eigentlichen Unbekannten von geringerer Anzahl γ ausdrücken lassen müssen («vermittelnde Beobachtungen»). Bei der *bedingten Ausgleichung* hingegen sind die ausgeglichenen Grössen selber die Unbekannten,

welche einen Satz von β linearen (bzw. linearisierten) Bedingungsgleichungen zu erfüllen haben ($\beta < n$). Die gemischte Variante der vermittelnden Ausgleichung mit Bedingungsgleichungen zwischen den Unbekannten werden wir in dieser Arbeit nicht berücksichtigen. Ferner wird durchwegs mit Messungen vom Gewicht 1 gerechnet, um eine Überlastung des Textes zu vermeiden. Der Fall ungleicher Gewichte lässt sich leicht auf diesen Spezialfall zurückführen.

Wir führen unsere Betrachtungen im n -dimensionalen euklidischen Raum R_n durch und verstehen unter einem Punkt oder einem Vektor einen Satz von n reellen Zahlen; die Verwendung der beiden Begriffe geschieht durchaus im üblichen, geometrisch anschaulichen Sinne. Die «Ebene» definieren wir dann etwa als Punktmenge, die mit zwei verschiedenen Punkten auch deren Verbindungsgerade enthält.

Für die algebraische Beschreibung werden wir von der Matrizenschreibweise Gebrauch machen, welche sehr bequem und der Komponentendarstellung entschieden vorzuziehen ist (vgl. [3]; dieses Buch enthält ein Kapitel über Ausgleichsrechnung).

Vektoren und Punkte sollen im folgenden mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet werden. Durch das Skalarprodukt

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

wird eine Metrik eingeführt. Der Absolutbetrag eines Vektors (bzw. Abstand eines Punktes vom Nullpunkt) wäre dann

$$|x| = \sqrt{(x, x)}.$$

Die lineare Transformation schreiben wir in der Form der Multiplikation mit einer Matrix, das heisst $y = Ax$ als Abkürzung für

$$y_i = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \cdots + a_{i\mu} x_\mu \quad (i = 1, 2, \dots, \mu),$$

wobei im allgemeinen $\mu \neq \nu$, das heisst die Matrix A nicht von quadratischer Gestalt ist. Die transponierte (durch Vertauschung der Zeilen mit den Spalten entstandene) Matrix bezeichnen wir mit A^T . Wenn man einen Vektor als Matrix mit nur einer Spalte auffasst, kann man das Skalarprodukt auch in der Form

$$(x, y) = x^T y$$

schreiben. Hingegen ergibt die Multiplikation

$$x y^T = D$$

eine Matrix D mit den Elementen $d_{ik} = x_i y_k$ als sogenanntes dyadisches Produkt der beiden Vektoren x und y .

Wir werden im allgemeinen Matrizen mit grossen lateinischen, skalare Grössen mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnen. Indizes sollen im folgenden, soweit nichts Besonderes vermerkt ist, verschiedene Vektoren, und nicht deren Komponenten unterscheiden.

1.2 Vermittelnde Ausgleichung

Die Variablen x (Vektor mit n Komponenten), welche gemessen werden, seien lineare Funktionen der Unbekannten y (γ Komponenten):

$$x = C y + f. \quad (1)$$

Dabei sind die y in einfacheren Fällen die ersten γ Komponenten des Vektors x , das heisst so viele, als frei verfügbar sind. Das bedeutet, dass der obere Teil von C die γ -reihige Einheitsmatrix ist.

Liegt für x eine Messung l vor, so sind die Unbekannten y so zu bestimmen, dass der Betrag von $v = x - l$ minimal wird. Man nennt

$$v = C y + f - l$$

die Fehlergleichungen (n Gleichungen, γ Unbekannte, wobei $\gamma \leq n$; sonst läge gar kein Ausgleichungsproblem vor).

Bei der vermittelnden Ausgleichung können wir f immer als Null annehmen bzw. durch eine Koordinatenverschiebung zu Null machen und somit die Fehlergleichungen in der üblichen Form schreiben:

$$v = C y - l. \quad (2)$$

Die gesuchten Werte erhält man durch Auflösen der Gaußschen Normalgleichungen

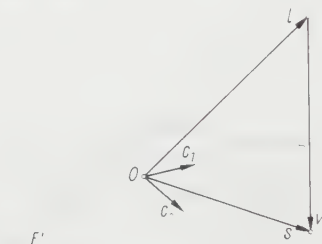
$$C^T C y = C^T l \quad (3)$$

(γ Gleichungen, γ Unbekannte). Sehr oft interessiert auch das ausgeglichene x , das wir mit s bezeichnen. v hat die Bedeutung einer Verbesserung, welche zur Messung l zu addieren ist.

Geometrische Interpretation im R_n : l soll «möglichst gut» als Linearkombination der γ Spaltenvektoren von C dargestellt werden, das heisst, der Abstand $|v|$ des Lösungspunktes s von l soll minimal sein. Das bedeutet, dass s die Projektion von l auf F' ist, wobei F' die von den Spaltenvektoren c_i von C aufgespannte Ebene ist, oder $v = s - l \perp F'$. Daraus folgen unmittelbar die Normalgleichungen

$$C^T v = 0 \quad \text{oder eben} \quad C^T C y = C^T l.$$

In Figur 1 ist der Fall $n = 3$, $\gamma = 2$ dargestellt, wo F' eine gewöhnliche zweidimensionale Ebene wird.



Figur 1

Beispiel zur vermittelnden Ausgleichung.

1.3 Bedingte Ausgleichung

Für den Vektor der Unbekannten x liege die Messung l vor. x ist so zu bestimmen, dass $(v, v) = \text{Min}$ mit $v = x - l$, wobei x die Bedingungsgleichungen

$$B x + b = 0 \quad (4)$$

(β Gleichungen, n Variable, $\beta < n$) zu erfüllen hat. Es liegt somit eine Extremalaufgabe mit Nebenbedingungen vor, welche man in bekannter Weise mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatoren löst. Wenn wir diese mit $-2t_i$ ($i = 1, 2, \dots, \beta$) bezeichnen und die t_i zum sogenannten Korrelatenvektor t zusammenfassen, ergeben sich ausser (4) als weitere Bedingungen für die Unbekannten t und x die Korrelatengleichungen

$$x = B^T t + l. \quad (5)$$

Durch Einsetzen von (5) in (4) erhält man die Normalgleichungen

$$B B^T t = -(B l + b) \quad (6)$$

(β Gleichungen, β Unbekannte). Deren Lösung t , in (5) eingesetzt, gibt endlich die eigentlichen Unbekannten x .

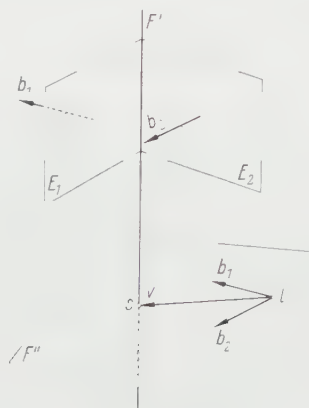
Geometrische Interpretation im R_n : Die Bedingungsgleichungen (4) definieren eine $(n - \beta)$ -dimensionale Ebene F' , und zwar jetzt als Schnittgebilde von Hyperebenen, welche durch ihre Normalvektoren gegeben sind. l soll «möglichst gut» durch einen Punkt aus F' approximiert werden, das heisst, gesucht ist der Punkt in F' mit dem kleinsten Abstand $|v|$ von l . Das ist natürlich wieder der Fusspunkt des Lotes von l auf F' ; er wird aber diesmal bestimmt als Schnitt-

punkt von F' mit einer Ebene F'' , deren Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} x &= B^T t + l \\ &= l + [\text{Linearkombination der Zeilenvektoren von } B] \end{aligned}$$

lautet. F'' ist total senkrecht zu F' , was man einsieht, wenn man (4) in der Form $B(x - f) = 0$ schreibt, wobei f ein beliebiger Punkt aus F' ist, also $Bf + b = 0$. (Wir nennen zwei Ebenen im R_n «total senkrecht», wenn jede Gerade in der einen senkrecht auf jeder Geraden der anderen Ebene steht und die Summe ihrer Dimensionen gleich n ist.)

Figur 2 zeigt das Beispiel $n = 3$, $\beta = 2$; F' ist die durch die Ebenen E_1 und E_2 bestimmte Gerade. F'' wird durch die in l abgetragenen Zeilenvektoren b_1 und b_2 von B aufgespannt.



Figur 2
Beispiel zur bedingten Ausgleichung.

Diese Formulierung der bedingten Ausgleichung ist der in der Geodäsie eher gebräuchlichen mathematisch vollkommen äquivalent. Man betrachtet dort die Verbesserungen v als Unbekannte und schreibt die Bedingungsgleichungen in der Form $Bv + w = 0$, wobei $w = B l + b$ die sogenannten Widersprüche sind. Korrelaten- und Normalgleichungen lauten dann:

$$v = B^T t \quad \text{und} \quad B B^T t = -w.$$

Bei unserer Form werden offenbar die Beziehungen des nächsten Abschnittes etwas durchsichtiger.

Man beachte, dass die Unbekannten bei 1.2 Koeffizienten einer Linearkombination von n -dimensionalen Vektoren sind, bei 1.3 hingegen Koordinaten im R_n .

1.4 Beziehung zwischen den beiden Arten von Ausgleichung

Da die beiden betrachteten Fälle dem gleichen geometrischen Problem äquivalent sind, den Punkt s in einer Ebene F' zu finden, der den kleinsten Abstand von einem bekannten Punkte l ausserhalb F' hat, liegt der Versuch nahe, das eine Problem auch algebraisch auf das andere zurückzuführen.

Liegt zum Beispiel eine Aufgabe der bedingten Ausgleichung vor, so handelt es sich darum, $\gamma = n - \beta$ Vektoren zu suchen, welche zu den Zeilenvektoren von B orthogonal sind, und mit ihnen als Spaltenvektoren die Matrix C zu bilden. Ist f ein Punkt aus F' , so lautet die Transformation

$$x = C y + f. \quad (7)$$

Durch Einsetzen von (7) in (4) sieht man, dass die Bedingungsgleichungen in der Tat für beliebige y identisch erfüllt sind ($B C = 0$, $B f + b = 0$).

Praktisch hat dieser Übergang allerdings nur dann einen Sinn, wenn man $(n - \beta)$ der Unbekannten als neue Unbekannte y nimmt und dann für die Konstruktion von C die Bedingungsgleichungen auf einfache Art nach den übrigen β Unbekannten auflösen kann; oder es sei, dass man durch zusätzliche Überlegungen das Problem von vornherein auf beide Arten formulieren kann.

Bei einer iterativen Behandlung der Normalgleichungen bedeutet nun:

Vermittelnde Ausgleichung: sukzessive Verbesserung der Unbekannten y . Der Punkt x bewegt sich in F' , bis er auf den Schnittpunkt mit F'' fällt.

Bedingte Ausgleichung: sukzessive Verbesserung der Unbekannten t . Der Punkt x bewegt sich in F'' , bis er auf den Schnittpunkt mit F' fällt.

1.5 Die mittleren Fehler der ausgeglichenen Unbekannten

In diesem Abschnitt sollen einige Formeln über mittlere Fehler zusammengestellt werden.

Der mittlere Fehler der Messung l ist bekanntlich bei vermittelnder Ausgleichung

$$m = \sqrt{\frac{(v, v)}{n - \gamma}},$$

bei bedingter Ausgleichung

$$m = \sqrt{\frac{(\overline{v}, v)}{\beta}}.$$

(Handelt es sich um ein und dasselbe Problem, so stimmen die beiden Ausdrücke wegen $n - \gamma = \beta$ tatsächlich überein.)

Für den mittleren Fehler M einer Funktion $\varphi(l)$ gilt das Fehlerfortpflanzungsgesetz (l_i = Komponente von l):

$$M^2 = m^2 \sum_i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial l_i} \right)^2.$$

Bei den ausgeglichenen Unbekannten handelt es sich nun um eine lineare Vektorfunktion der Messungen l :

$$a(l) = A l + \text{const}$$

mit konstanter Matrix A . Eine einfache Rechnung ergibt für den mittleren Fehler M_i der i -ten Komponente von a :

$$M_i^2 = q_{ii} m^2,$$

wo q_{ii} das i -te Diagonalelement der Gewichtsmatrix

$$Q = A A^T$$

ist. Die ausserdiagonalen Elemente von Q , die gemischten Gewichtskoeffizienten, braucht man ebenfalls, sobald für Funktionen der Unbekannten mittlere Fehler angegeben werden sollen.

Wir wollen nun für die beiden Fälle der Ausgleichsrechnung die Gewichtsmatrizen aufstellen. Das jeweilige A findet man durch Auflösen der Normalgleichungen nach den Unbekannten. Um anzudeuten, ob es sich bei den ausgeglichenen Variablen um die Unbekannten der Normalgleichungen oder um Koordinaten im x -Raum handelt, werden wir die Bezeichnungen Q und P verwenden.

Vermittelnde Ausgleichung:

$$\begin{aligned} C^T C y &= C^T l, \\ y &= \underbrace{(C^T C)^{-1} C^T l}_A, \\ Q &= A A^T = (C^T C)^{-1}. \end{aligned} \quad (8)$$

Für die mittleren Fehler der ausgeglichenen Messungen s brauchen wir

$$\begin{aligned} x &= C y = \underbrace{C(C^T C)^{-1} C^T l}_A, \\ P &= A A^T = C(C^T C)^{-1} C^T. \end{aligned} \quad (9)$$

Bedingte Ausgleichung:

$$\begin{aligned} B B^T t &= -(B l + b), \\ t &= -(B B^T)^{-1} (B l + b), \\ x &= B^T t + l = \underbrace{[E - B^T (B B^T)^{-1} B]}_A l + \text{const}, \\ P &= A A^T = E - B^T (B B^T)^{-1} B \quad (E = \text{Einheitsmatrix}). \end{aligned} \quad (10)$$

2. Numerische Behandlung der Ausgleichungsaufgabe

2.1 Übersicht über verschiedene Relaxationsverfahren

Nachdem im 1. Teil die theoretischen Grundlagen der Ausgleichsrechnung zusammengestellt worden sind, soll nun die numerische Auflösung der Normalgleichungen behandelt werden. Wir beschränken uns dabei auf die Diskussion einiger iterativer Methoden, welche unter den Begriff der Relaxationsrechnung fallen. Diese Methoden erlauben ein Abbrechen der Rechnung vor dem Erreichen der theoretisch exakten Lösung (welche man infolge der Rundungsfehler im allgemeinen ohnehin nicht erhält). In diesem Falle kann aber der Rechenaufwand erheblich vermindert werden, wenn man die explizite Aufstellung des Normalgleichungssystems vermeidet, was durchaus möglich ist.

Im weiteren sollen folgende Bezeichnungen verwendet werden: Es liege das symmetrische Gleichungssystem

$$A z = k$$

für die Unbekannten z vor mit der Lösung $h = A^{-1} k$. Dann ist $r = k - A z$ der zum Versuchsvektor z gehörige Residuenvektor, und wir nennen

$$f(z) = [h - z, A(h - z)]$$

die Fehlerfunktion.

Die primitivste Methode zur Auflösung von linearen Gleichungssystemen, welche in unseren Kreis passt, das *Einzelschrittverfahren* [4], bei welchem in jedem Relaxationsschritt nur eine Unbekannte verbessert wird, konvergiert ziemlich langsam, so dass sich die im Falle der Ausgleichsrechnung nicht so grossen Vereinfachungen gegenüber den besseren Verfahren kaum lohnen.

Die Verfahren bester Taktik in der Terminologie von STIEFEL [5], das heisst solche Verfahren, bei denen ohne Rücksicht auf die Vorgeschichte der Fehler in jedem Iterationsschritt möglichst klein gemacht wird, werden durch Gradientenmethoden, besonders die bekannte *Methode des steilsten Abstieges*, geliefert [4]. Die Korrektur der Unbekannten wird hier proportional zum Residuenvektor angesetzt:

$$\Delta z = \lambda r,$$

da man leicht zeigen kann, dass r bis auf das Vorzeichen gleich dem Gradienten einer gewissen quadratischen Funktion $F(z)$ ist, welche im Lösungspunkt ihr Minimum hat. Der Faktor λ wird in jedem Schritt so berechnet, dass F (als Funktion von λ), und damit übrigens auch die oben definierte Fehlerfunktion $f(z)$, minimal wird. Auch bei diesem Verfahren ist die Konvergenz oft sehr schlecht.

Weniger Rechenaufwand erfordert das etwas gröbere *Gesamtschrittverfahren* [4]. Bei diesem wird der Parameter λ im Gegensatz zur vorhergehenden Methode über den ganzen Auflösungsprozess weg konstant gehalten. Für die Wahl dieses Wertes braucht man aber Schranken für die Eigenwerte von A , und diese stehen hier im allgemeinen nicht zur Verfügung, da die Matrix A gar nicht aufgestellt werden soll.

Wenn man nach dem Gradientenverfahren bester Strategie frägt, das heisst nach dem Verfahren, das nach einer vorgegebenen Anzahl n von Schritten den Fehler am kleinsten macht, so kommt man, wie in [5] bewiesen wird, unter Zugrundelegung von $f(z) = [h - z, A(h - z)]$ als Fehlermass auf die *Methode der konjugierten Gradienten* (cg-Verfahren, siehe [4], dort als n -Schritt-Verfahren bezeichnet; erschöpfend diskutiert in [6]). Die Methode des steilsten Abstiegs und das Gesamtschrittverfahren sind vereinfachte Varianten davon; der Mehraufwand beim cg-Verfahren ist jedoch im Falle der Ausgleichsrechnung relativ gering, da dort die beiden hauptsächlich ins Gewicht fallenden Multiplikationen Matrix \cdot Vektor pro Schritt auch bei den einfacheren Verfahren erforderlich sind.

Wir werden daher im folgenden die Anwendung des cg-Verfahrens in der Ausgleichsrechnung etwas genauer diskutieren. Vorher soll aber noch gezeigt werden, dass die erwähnten Strategieüberlegungen auch bei Fehlermassen, die sich bei der Ausgleichung natürlicherweise aufdrängen, ebenfalls zum cg-Verfahren führen.

Im Falle der vermittelnden Ausgleichung liegt es zum Beispiel nahe, nach demjenigen Verfahren zu fragen, bei welchem (v, v) nicht nur monoton, sondern möglichst rasch im Sinne der besten Strategie abnimmt. Die Normalgleichungen sind

$$C^T C y = C^T l,$$

so dass nach den obigen Bezeichnungen $A = C^T C$, $h = C^T l$, $z = y$ zu setzen ist.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} (v, v) &= (C y - l, C y - l) \\ &= (y, C^T C y) - 2(y, C^T l) + (l, l) \\ &= (z, A z) - 2(z, A h) + (l, l) \\ &= [h - z, A(h - z)] - (h, A h) + (l, l) \\ &= f(z) + \text{const.} \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass (v, v) bis auf eine Konstante gleich der Fehlerfunktion des Normalgleichungssystems ist und somit das cg-Verfahren die Methode bester Strategie darstellt.

Dieselbe Überlegung hat bei der bedingten Ausgleichung mit Korrelaten keinen Sinn, da wir uns dann während der Relaxation nicht in der Ebene F' der

zulässigen Punkte bewegen, sondern in der Orthogonalebene F'' , und zwar im allgemeinen ausgehend von $x = l$, $v = 0$, so dass (v, v) gelegentlich wachsen muss (beim cg sogar monoton). Die Korrelaten- und Normalgleichungen lauten:

$$x = B^T t + l, \quad B B^T t = -(B l + b),$$

wobei diesmal $A = B B^T$, $k = -(B l + b)$, $z = t$ ist. Der Lösungspunkt wäre $s = B^T h + l$.

Nimmt man nun das Quadrat des Fehlervektors $s - x$ (im x -Raum, nicht im Raume der Unbekannten der Normalgleichungen) als Fehlermass, so ergibt sich aus

$$\begin{aligned} (s - x, s - x) &= [B^T (h - t), B^T (h - t)] = [h - t, B B^T (h - t)] \\ &= [h - z, A (h - z)] = f(z) \end{aligned}$$

wieder das cg-Verfahren. Zu beachten ist, dass dieses Fehlermass, im Gegensatz zu (v, v) , während der Rechnung nicht herauskommen kann, da ja die Lösung s nicht bekannt ist.

Zum selben Resultat käme man auch bei der vermittelnden Ausgleichung mit $s - x = C (h - y)$.

2.2 Die Methode der konjugierten Gradienten

Es sei wieder das Gleichungssystem

$$A z = k$$

mit der n -reihigen symmetrischen und positiv definiten Koeffizientenmatrix A gegeben. (Diese Bedingungen sind für unsere Normalgleichungen sicher erfüllt, sofern die Spalten von C bzw. die Zeilen von B linear unabhängig sind, was man überhaupt voraussetzen muss, falls A nicht singulär werden soll. Dieser Fall würde bedeuten, dass man mehr Unbekannte, als das Problem Freiheitsgrade hat, bzw. überflüssige Bedingungsgleichungen eingeführt hätte.)

Wir gehen aus von einem beliebigen Anfangsvektor z_0 . Der i -te allgemeine Iterationsschritt besteht darin, dass man in Richtung eines Gewichtsvektors p_i fortschreitet und damit die neue Näherung

$$z_{i+1} = z_i + \lambda_i p_i$$

gewinnt, wobei p_i aus dem i -ten Residuenvektor und dem Gewichtsvektor des vorhergehenden Schrittes linear kombiniert wird. Dieser zweite Summand fällt im ersten Schritt weg.

Die genaue Rechenvorschrift lautet (vgl. [6]):

1. Schritt:

$$r_0 = p_0 = k - A z_0,$$

$$\lambda_0 = \frac{(r_0, r_0)}{(p_0, A p_0)},$$

$$z_1 = z_0 + \lambda_0 p_0.$$

i-ter allgemeiner Schritt (*i* = 1, 2, ...):

$$r_i = r_{i-1} - \lambda_{i-1} A p_{i-1},$$

$$\varepsilon_{i-1} = \frac{(r_i, r_i)}{(r_{i-1}, r_{i-1})},$$

$$p_i = r_i + \varepsilon_{i-1} p_{i-1},$$

$$\lambda_i = \frac{(r_i, r_i)}{(p_i, A p_i)},$$

$$z_{i+1} = z_i + \lambda_i p_i.$$

(11)

Die Gewichtsvektoren sind paarweise konjugiert (Name!), das heisst, es gilt:

$$(p_i, A p_j) = 0 \quad \text{für} \quad i \neq j.$$

Die Residuenvektoren bilden ein Orthogonalsystem (Beweise siehe [6]). Aus der letzteren Tatsache folgt aber, dass nach spätestens *n* Schritten theoretisch die exakte Lösung erreicht wird.

Gleichzeitig mit den Unbekannten kann die inverse Matrix A^{-1} erhalten werden, wenn in jedem Schritt (*i* = 0, 1, 2, ..., *n* - 1) folgende Zusatzrechnung mitgeführt wird:

$$A_{i+1}^{-1} = A_i^{-1} + \frac{p_i p_i^T}{(p_i, A p_i)}, \quad \text{Start: } A_0^{-1} = 0 \quad (12)$$

($p p^T$ ist das eingangs definierte dyadische Vektorprodukt).

Nach genau *n* Schritten sollte theoretisch die exakte Lösung $A_n^{-1} = A^{-1}$ erreicht werden.

Der Betrag des Fehlervektors $h - z$ sowie die Fehlerfunktion $f(z) = [h - z, A(h - z)]$ nehmen bei jedem Schritt monoton ab. Dies gilt aber nicht für den Betrag des Residuenvektors *r*. Mit (r, r) als Fehlermass für die Strategiebetrachtung kommt man auf eine Variante des *cg*-Verfahrens, welche hier jedoch ausscheidet, da sie bei der Ausgleichsrechnung pro Schritt eine Matrixmultiplikation mehr erfordert.

2.3 Vermittelnde Ausgleichung nach der Methode der konjugierten Gradienten

Das eben beschriebene Rechenverfahren soll nun auf die Normalgleichungen der vermittelnden Ausgleichung übertragen werden (siehe [1]; der Algorithmus ist dort komponentenweise geschrieben).

Durch Substitution von

$$A = C^T C, \quad k = C^T l, \quad z_i = y_i, \quad p_i = e_i$$

in der Rechenvorschrift (11) erhält man direkt die Formeln (13), wobei nur folgende zwei Punkte zu beachten sind:

1. Wie bisher in der vermittelnden Ausgleichung setzen wir $C y = l = v$, und speziell beim Start mit einer Versuchslösung $y_0: C y_0 = l = v_0$. Im ersten Schritt wird damit

$$k = A z_0 = C^T l = C^T C y_0 = C^T v_0 = r_0.$$

In allen Schritten gilt ferner $C \Delta y_i = \Delta v_i$; oder, wenn $\lambda_i e_i = \Delta y_i$, dann $\lambda_i q_i = \Delta v_i = \Delta x_i$.

Es hängt vom speziellen Problem ab, ob man die eigentlichen Unbekannten y oder die ausgeglichenen Messungen x oder beides verlangt. Für die Abwicklung des Iterationsprozesses genügt es, v_i mitzuführen; die x_i und y_i können auch erst nachträglich berechnet werden.

2. Die Matrix des Normalgleichungssystems, $A = C^T C$, tritt im allgemeinen Schritt zweimal auf, und zwar einerseits bei der Berechnung von λ_i im Nenner:

$$(p_i, A p_i) = (e_i, C^T C e_i) = (C e_i, C e_i) = (q_i, q_i) = \sigma_i,$$

andererseits bei der Berechnung des Residuenvektors. Aus der Gleichung $r_i = r_{i-1} - \lambda_{i-1} A p_{i-1}$ ergäbe sich $r_i = r_{i-1} - C^T \Delta v_{i-1}$. Ebensogut kann aber die ursprüngliche Definitionsgleichung $r_i = k - A z_i$ verwendet werden. Diese liefert: $r_i = -C^T v_i$.

Es zeigt sich, dass man an den beiden erwähnten Stellen so umformen kann, dass in der Ausgleichsrechnung die Matrix des Gleichungssystems dank ihrer speziellen Struktur gar nicht mehr explizit auftritt und sich daher ihre vorgängige Berechnung erübrigt.

So erhalten wir die folgenden Formeln:

1. Schritt:

$$\begin{aligned} r_0 &= e_0 = -C^T v_0, & \varrho_0 &= (r_0, r_0), \\ q_0 &= C e_0, & \sigma_0 &= (q_0, q_0), \\ \lambda_0 &= \frac{\varrho_0}{\sigma_0}, \\ \Delta y_0 &= \lambda_0 e_0, & y_1 &= y_0 + \Delta y_0, \\ \Delta x_0 &= \lambda_0 q_0, & x_1 &= x_0 + \Delta x_0, \\ \Delta v_0 &= \lambda_0 q_0, & v_1 &= v_0 + \Delta v_0. \end{aligned}$$

i-ter allgemeiner Schritt ($i = 1, 2, \dots$):

$$\left. \begin{aligned} r_i &= -C^T v_i, & \varrho_i &= (r_i, r_i), \\ \varepsilon_{i-1} &= \frac{\varrho_i}{\varrho_{i-1}}, \\ e_i &= r_i - \varepsilon_{i-1} e_{i-1}, \\ q_i &= C e_i, & \sigma_i &= (q_i, q_i), \\ \lambda_i &= \frac{\varrho_i}{\sigma_i}, \\ \Delta y_i &= \lambda_i e_i, & y_{i+1} &= y_i + \Delta y_i, \\ \Delta x_i &= \lambda_i q_i, & x_{i+1} &= x_i + \Delta x_i, \\ \Delta v_i &= \lambda_i q_i, & v_{i+1} &= v_i + \Delta v_i. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Man könnte, um die Stabilität des Prozesses zu erhöhen, die v_i (und damit indirekt die r_i) nicht rekursiv berechnen:

$$v_{i+1} = v_i + \Delta v_i,$$

sondern in jedem Schritt neu. Die letzten zwei Zeilen von (13) werden dann ersetzt durch:

$$x_{i+1} = C y_{i+1}, \quad v_{i+1} = x_{i+1} - l.$$

Die y_i müssen jetzt mitgeführt werden.

Diese Variante erfordert eine zusätzliche Matrixmultiplikation pro Schritt, und es fragt sich, ob der Mehraufwand durch die Verbesserung der Resultate aufgewogen wird.

2.4 Bedingte Ausgleichung nach der Methode der konjugierten Gradienten

Genau gleich wie im vorherigen Abschnitt wird die Rechenvorschrift für die bedingte Ausgleichung hergeleitet. Diesmal lauten die Substitutionen, mit welchen in (11) zu gehen ist:

$$A = B B^T, \quad k = -(B l + b), \quad z_i = t_i, \quad \phi_i = e_i.$$

Da für die Korrelaten t im allgemeinen keine Ausgangsnäherung vorliegen wird, starten wir den Algorithmus mit $t_0 = 0$ und damit $x_0 = l, v_0 = 0$.

So wird im ersten Schritt das Ausgangsresiduum

$$r_0 = k = -(B l + b).$$

Wie oben wird das Skalarprodukt im Nenner von λ_i umgeformt:

$$(\phi_i, A \phi_i) = (e_i, B B^T e_i) = (B^T e_i, B^T e_i) = (q_i, q_i) = \sigma_i.$$

Die Residuenberechnung geschieht im i -ten allgemeinen Schritt wie folgt:

$$\begin{aligned} r_i &= k - A z_i = -(B l + b) - B B^T t_i = -[B (B^T t_i + l) + b] \\ &= -(B x_i + b). \end{aligned}$$

Die t_i , welche zwar die Unbekannten des Normalgleichungssystems sind, aber nur die Rolle von Hilfsgrößen spielen, werden kaum interessieren, ebenso sind die v_i für die Abwicklung des Iterationsprozesses nicht notwendig.

So erhält man folgenden Algorithmus:

1. Schritt:

$$\left. \begin{aligned} r_0 &= e_0 = -(B l + b), & q_0 &= (r_0, r_0), \\ q_0 &= B^T e_0, & \sigma_0 &= (q_0, q_0), \\ \lambda_0 &= \frac{e_0}{\sigma_0} \\ (t_1 &= \Delta t_0 = \lambda_0 e_0), \\ \Delta x_0 &= \lambda_0 q_0, & x_1 &= x_0 + \Delta x_0 \\ (v_1 &= \Delta v_0 = \lambda_0 q_0). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

i-ter allgemeiner Schritt ($i = 1, 2, \dots$):

$$\left. \begin{aligned} r_i &= -(B x_i + b), & \varrho_i &= (r_i, r_i), \\ \varepsilon_{i-1} &= \frac{\varrho_i}{\varrho_{i-1}}, \\ e_i &= r_i + \varepsilon_{i-1} e_{i-1}, \\ q_i &= B^T e_i, & \sigma_i &= (q_i, q_i), \\ \lambda_i &= \frac{\varrho_i}{\sigma_i} \\ (\Delta t_i &= \lambda_i e_i, & t_{i+1} &= t_i + \Delta t_i), \\ \Delta x_i &= \lambda_i q_i, & x_{i+1} &= x_i + \Delta x_i, \\ (\Delta v_i &= \lambda_i q_i, & v_{i+1} &= v_i + \Delta v_i). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Die Neuberechnung von v_i (und damit indirekt der Residuen) in jedem Schritt würde bei der bedingten Ausgleichung darin bestehen, dass die letzten beiden Zeilen von (14) ersetzt würden durch:

$$v_{i+1} = B^T t_{i+1}, \quad x_{i+1} = v_{i+1} + l.$$

Auch hier hätte man eine Matrixmultiplikation mehr, und die t_i müssten bei der Rechnung mitgeführt werden.

2.5 Berechnung der Gewichtskoeffizienten

Für die Berechnung der in Abschnitt 1.5 mit Q und P bezeichneten Gewichtsmatrizen legen wir Gleichung (12) zugrunde, nach welcher zum Aufbau der Inversen von A in jedem cg -Schritt der Anteil

$$\Delta A_i^{-1} = \frac{p_i p_i^T}{(p_i, A p_i)}$$

zu bestimmen ist. So erhält man unter Beachtung der in (13) und (14) eingeführten Bezeichnungen folgende Ausdrücke für die ΔQ und ΔP :

Vermittelnde Ausgleichung:

$$\begin{aligned} Q &= (C^T C)^{-1} = A^{-1}, \\ \Delta Q_i &= \Delta A_i^{-1}, \\ \Delta Q_i &= -\frac{e_i e_i^T}{\sigma_i}, & \text{Start: } Q_0 &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
 P &= C(C^T C)^{-1} C^T = C A^{-1} C^T, \\
 \Delta P_i &= \Delta[C A^{-1} C^T]_i = C \Delta A_i^{-1} C^T, \\
 \Delta P_i &= \begin{pmatrix} q_i & q_i^T \\ \sigma_i \end{pmatrix}, \quad \text{Start: } P_0 = 0.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Bedingte Ausgleichung:

$$\begin{aligned}
 P &= E - B^T (B B^T)^{-1} B = E - B^T A^{-1} B, \\
 \Delta P_i &= \Delta[E - B^T A^{-1} B]_i = -B^T \Delta A_i^{-1} B, \\
 \Delta P_i &= \begin{pmatrix} q_i & q_i^T \\ \sigma_i \end{pmatrix}, \quad \text{Start: } P_0 = E.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Da man bei der Berechnung von A^{-1} keine gute Konvergenz erwarten darf, ist die Bedeutung von so erhaltenen Näherungswerten bei einem früheren Abbrechen der Iteration sehr zweifelhaft. Man beachte allerdings, dass die Näherungen für die Diagonalelemente von P bei der bedingten Ausgleichung, von 1 ausgehend, monoton abnehmen (die σ_i sind Vektorquadrate) und dass somit wenigstens obere Schranken geliefert werden, die besonders interessieren. Wird überdies beim selben Problem gleichzeitig auch vermittelnd ausgeglichen, so nähert man sich denselben Werten von unten; denn die beiden P , welche man nach vollständiger Durchführung der beiden Iterationsprozesse erhalten würde, stimmen natürlich theoretisch exakt überein.

Die obere Schranke 1 fällt beim Q der vermittelnden Ausgleichung dahin, was verständlich ist, da diese Werte, im Gegensatz zu den Koeffizienten von P , mit einer physikalischen Dimension behaftet sind.

3. Abschätzungen für die Quadratsumme der Verbesserungen

3.1 Allgemeine Bemerkungen

Wenn zur Auflösung der Normalgleichungen ein Näherungsverfahren angewendet wird, so ist es von Interesse, während der Rechnung Abschätzungen für die Quadratsumme (v, v) der Verbesserungen zu gewinnen. Denn damit hat man einen gewissen Anhaltspunkt für die Genauigkeit der erreichten Näherung. Das (v, v) geht überdies in die Ausdrücke für die mittleren Fehler ein, für welche besonders eine obere Schranke erwünscht ist.

Für unsere Abschätzungen brauchen wir gleichzeitig Näherungspunkte aus F' wie auch aus F'' . Wir müssen somit entweder in einem der beiden Räume ausgleichen und vom letzten Näherungspunkt aus einen möglichst nahen Punkt im anderen Raume aufsuchen, oder aber die beiden dualen Arten von Ausgleichung von Anfang an parallel nebeneinanderführen.

Zur praktischen Durchführung des erwähnten Überganges wäre im einzelnen zu bemerken: Bei der vermittelnden Ausgleichung bewegen wir uns ständig im Raume F' und haben somit die Aufgabe, von einem Punkte x' einen Punkt x'' in F' aufzusuchen, das heisst einen Punkt, dessen v -Vektor orthogonal ist zu den Spaltenvektoren der Matrix C des Fehlergleichungssystems, also $Cv'' - C(x'' - l) = 0$ («duale Bedingungsgleichungen»). Bei einer Aufgabe mit n Messungen und γ Unbekannten darf somit über $(n - \gamma)$ Komponenten von x'' frei verfügt werden; das Naheliegendste ist natürlich, die entsprechenden Komponenten von x' zu übernehmen. Für die restlichen γ Komponenten liefert die obige Bedingung ein Gleichungssystem. Nun wird man allerdings im allgemeinen kaum, nur um Abschätzungen für (v, v) zu erhalten, nochmals ein Gleichungssystem vom gleichen Umfang wie dasjenige der Normalgleichungen auflösen wollen. Jedoch ist in manchen praktischen Fällen die Matrix C sehr speziell gebaut und hat viele verschwindende Koeffizienten. Wenn zum Beispiel die Unbekannten y einfach die γ ersten Messvariablen sind, dann ist der obere Teil von C gerade die Einheitsmatrix, und die Bestimmung der fehlenden Komponenten von x'' wird trivial. Im 4. Teil wird ein einfaches Beispiel dieser Art ausgeführt.

Bei der bedingten Ausgleichung ist der umgekehrte Übergang ganz entsprechend auszuführen: vom letzten Punkt x'' aus F'' ist ein Punkt x' aufzusuchen, der in F' liegt und somit die Bedingungsgleichungen erfüllt: $Bx' + b = 0$. Auch hier gilt das oben Gesagte, das heisst, die Berechnung von x' lohnt sich nur, wenn dies dank der speziellen Struktur von B ohne grosse Mühe geht. Im 4. Teil ist ein Beispiel aus der Vermessungskunde gegeben, bei welchem die Bestimmung der restlichen β Komponenten ($\beta = \text{Anzahl der Bedingungsgleichungen}$) eben noch ohne Auflösung von Gleichungssystemen möglich ist.

Hierbei ist zu beachten, dass man beim verfrühten Abbrechen einer bedingten Ausgleichung in einem Punkt aufhört, der die Bedingungsgleichungen nicht erfüllt. Falls man dies nicht in Kauf nehmen will, wäre auch aus diesem Grund der Übergang zu einem x' erwünscht.

Die im folgenden beschriebenen Methoden beruhen auf der Übertragung eines Gedankenkreises, der im Zusammenhang mit der Behandlung von partiellen Differentialgleichungen der Physik entstanden ist, auf das Gebiet der linearen Algebra. Es handelt sich um die von SYNGE und anderen entwickelte «Method of the Hypercircle». Wir werden die Theorie so wenden, dass sie für unsere Zwecke brauchbar wird. (Für eine knappe Einführung siehe [7], ausführlich in [2].)

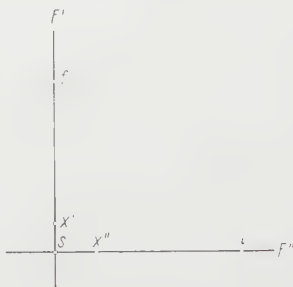
3.2 Grobe Abschätzung

Es mögen die beiden folgenden dualen Probleme vorliegen:

I: Gesucht der Punkt in F' mit dem kleinsten Abstand vom festen Punkt l aus F'' .

II: Gesucht der Punkt in F'' mit dem kleinsten Abstand vom festen Punkt f aus F' .

F' und F'' sind dabei zwei total senkrechte Ebenen im oben definierten Sinne. Die gemeinsame Lösung von I und II ist dann der einzige Schnittpunkt s von F' und F'' (Figur 3).



Figur 3

Schematische Darstellung der beiden total senkrechten Ebenen F' und F'' .

Sind nun x' und x'' zwei beliebige Punkte aus F' und F'' , so ist $(x' - s, x'' - s) = 0$, das heisst, s liegt nach dem Satze von THALES auf einer Hyperkugel über $x' - x''$ als Durchmesser. Daraus können zwei Nutzenanwendungen gezogen werden:

1. Nimmt man den Mittelpunkt $c = (x' + x'')/2$ der Hyperkugel als Näherungslösung für unser Problem, dann weiss man, dass der Betrag des Fehlers genau gleich dem Radius $\varrho = |x' - x''|/2$ ist.

2. Betrachtet man die Hyperkugel über $f - l$, so liefert nach dem Satz von PYTHAGORAS

$$(f - s, f - s) + (l - s, l - s) = (f - l, f - l)$$

jede untere Schranke für den zu minimalisierenden Abstand in Problem I eine obere Schranke für Problem II, und umgekehrt.

Wir wollen diesen zweiten Punkt etwas näher ausführen und zugleich versuchen, eine brauchbare Formel zu finden. Vorerst soll x' die Rolle von f spielen, x' und x'' seien zwei Näherungslösungen für s . x'' gibt sofort eine obere Schranke für II:

$$(x' - s, x' - s) \leq (x' - x'', x' - x'') .$$

Ferner ist

$$(l - s, l - s) + (x' - s, x' - s) = (l - x', l - x') ,$$

und Subtraktion der beiden Zeilen ergibt

$$(l - s, l - s) \geq (l - x', l - x') - (x' - x'', x' - x'') . \quad (18)$$

Damit ist $(l - s, l - s)$ von unten eingeschränkt (Problem I!). Es ist vielleicht nicht überflüssig zu bemerken, dass die rechte Seite dieser Ungleichung im allgemeinen nicht durch den naheliegenden Ausdruck $(l - x'', l - x'')$ ersetzt werden darf. Die obere Schranke liefert x' :

$$(l - s, l - s) \leq (l - x', l - x') . \quad (19)$$

Denken wir nun wieder an die Ausgleichsrechnung, so erhalten wir für das (v, v) des ausgeglichenen Punktes, indem wir (18) und (19) zusammenfassen,

$$(v', v') - (x' - x'', x' - x'') \leq (v, v) \leq (v', v') , \quad (20)$$

mit den Bezeichnungen $s - l = v, x' - l = v'$.

Entsprechende Ungleichungen könnten für das äquivalente Problem II angegeben werden; diese interessieren jedoch hier nicht, da es sich bei beiden Ausgleichsaufgaben lediglich um verschiedene Formulierungen von Problem I handelt.

3.3 Feinere Abschätzung

Mit entsprechendem Mehraufwand lassen sich noch bessere Schranken angeben:

Es sei ein Satz von v' linear unabhängigen Vektoren z'_i , parallel zu F' , gegeben. Die z'_i spannen, von f aus abgetragen, eine v' -dimensionale Teilebene G' von F' auf ($v' < \text{Dimension von } F'$). Genau dasselbe mit den zweifach gestrichenen Bezeichnungen gibt eine Ebene G'' durch l . Es gilt somit

$$(z'_i, z'_j) = 0 \quad (21)$$

für alle i und j . G' und G'' werden im allgemeinen keinen Punkt gemeinsam haben.

Wir suchen nun die beiden Punkte u' in G' und u'' in G'' mit dem kleinsten Abstand $|u' - u''|$.

Mit dem Ansatz

$$u' = f + \sum_i \alpha'_i z'_i , \quad (22)$$

$$u'' = l + \sum_i \alpha''_i z''_i \quad (23)$$

lautet die Minimumbedingung:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha'_i} (u' - u'', u' - u'') = 2 (u' - u'', z'_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, v') , \quad (24)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha''_i} (u' - u'', u' - u'') = -2 (u' - u'', z''_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, v'') . \quad (25)$$

Durch Einsetzen von (22) und (23) in (24) und (25) erhält man

$$\sum_j \alpha'_j (z'_j, z'_i) = (l - f, z'_i) \quad (i = 1, 2, \dots, r'),$$

$$\sum_j \alpha''_j (z''_j, z''_i) = -(l - f, z''_i) \quad (i = 1, 2, \dots, r''),$$

ein Gleichungssystem für die α'_j und α''_j . Setzen wir noch voraus, dass die z'_i und z''_i je ein Orthogonalsystem bilden:

$$\left. \begin{aligned} (z'_i, z'_j) &= 0 \\ (z''_i, z''_j) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{für } i \neq j,$$

so wird die Auflösung trivial, und wir erhalten:

$$u' = f + \sum_i \frac{(l - f, z'_i)}{(z'_i, z'_i)} z'_i, \quad (26)$$

$$u'' = l - \sum_i \frac{(l - f, z''_i)}{(z''_i, z''_i)} z''_i. \quad (27)$$

Bemerkung: Für einen beliebigen Punkt x' aus F' gilt:

$$\left. \begin{aligned} (u' - x', z''_i) &= 0, \\ \text{ferner } (u'' - u', z''_i) &= 0, \\ \text{also } (u'' - x', z''_i) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, r'').$$

Das heisst aber, dass u'' die Projektion von F' auf G'' ist. Ebenso ist u' die Projektion von F'' auf G' .

Wie schon festgestellt, liegt s auf der Hyperkugel

$$(f - x, l - x) = 0 \quad (28)$$

über $f - l$ als Durchmesser.

Der Punkt s liegt aber auch auf sämtlichen Hyperebenen (Hyperebene = $(n - 1)$ -dimensionale Ebene):

$$(u' - x, z''_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r''), \quad (29)$$

$$(u'' - x, z'_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r'). \quad (30)$$

Deren Schnittgebilde ist eine $(n - r' - r'')$ -dimensionale Ebene H , welche sowohl auf G' als auch auf G'' senkrecht steht.

Also liegt s auf dem Hyperkreis, den die Ebene H aus der Hyperkugel (28) herausschneidet. (Wir halten uns hier an die Syngesche Terminologie, wonach die Hyperkugel der geometrische Ort der Punkte mit konstantem Abstand von einem festen Zentrum, der Hyperkreis das Schnittgebilde Hyperkugel-Ebene ist.)

Es lässt sich leicht einsehen, dass für einen beliebigen Punkt x des Hyperkreises $(u' - x, u'' - x) = 0$ gilt; das heisst, $u' - u''$ ist ein Durchmesser: Wegen der Orthogonalität von G', G'' und H

folgt aus $(u' - f, u'' - l) = 0$

und $(x - u', u'' - l) = 0$
 $(x - f, u'' - l) = 0 .$

Zusammen mit $(x - f, l - x) = 0$

ergibt sich $(x - f, u'' - x) = 0 .$

Mit $(f - u', u'' - x) = 0$

schliesslich $(x - u', u'' - x) = 0 .$

Ähnlich wie früher ziehen wir zwei Folgerungen :

1. Nimmt man den Mittelpunkt $c = (u' + u'')/2$ des Hyperkreises als Näherungslösung für unser Problem, so ist der Betrag des Fehlers genau gleich dem Radius $\varrho = |u' - u''|/2$.

2. Für $(s - l, s - l)$ – oder, wenn wir wieder die Bezeichnungen der Ausgleichsrechnung einführen, für (v, v) – gilt folgende Abschätzung:

$$|(u'' - l, u'' - l) \leq (v, v) \leq (u' - l, u' - l) .|$$

(31)

Die Richtigkeit der ersten Ungleichung folgt daraus, dass $s - u''$ in H liegt und damit auf $u'' - l$ senkrecht steht; die zweite ist trivial. Die dualen Beziehungen gelten natürlich für $(s - f, s - f)$.

Die einfachste Anwendung von (31) ergibt sich, wenn wie im Falle der «groben Abschätzung» in jedem der Räume F' und F'' nur je ein Näherungspunkt x' bzw. x'' als bekannt vorausgesetzt wird. Die Ebene G' degeneriert dann zum Punkt $x' = u'$, G'' ist die Gerade durch x'' und l . Mit $v' = x' - l$, $v'' = x'' - l$ ergibt sich aus (27) sofort:

$$u'' - l = \frac{(v', v'')}{(v'', v'')} v'' ,$$

und damit

$$\frac{(v', v'')^2}{(v'', v'')} \leq (v, v) \leq (v', v') .$$

(32)

Wir sind insofern berechtigt, (31) und speziell (32) eine «feinere Abschätzung» zu nennen, als wir hier unter Voraussetzung der durch die Vektorsysteme z'_i und z''_i aufgespannten Ebenen G' und G'' die beiden optimalen Punkte x' und x'' – nämlich eben u' und u'' – angeben, mit denen eine Abschätzung nach (20) gemacht werden kann: u' liefert als Projektion von l auf G' tatsächlich die kleinste obere Schranke von allen Punkten aus G' . Gehen wir anderseits von einem beliebigen Punkt x' in G' aus, so ist u'' dessen Projektion auf G'' und somit $(x' - u', x' - u')$ der kleinste Betrag, den wir von $(x' - l, x' - l)$ abziehen können, das heisst, u'' gibt die grösste untere Schranke von allen Punkten aus G'' . Wegen der Orthogonalität von $x' - u''$ auf G'' ist aber $(x' - l, x' - l) - (x' - u'', x' - u'')$ gerade gleich $(u'' - l, u'' - l)$.

Man kann ferner zeigen, dass bei Hinzunahme eines neuen z'_i bzw. z''_i die obere bzw. untere Schranke tatsächlich verbessert wird: Sei u'' der alte, u''_+ der neue Punkt. Da die Glieder der Summe (27) voneinander unabhängig sind und zudem orthogonal vorausgesetzt wurden, ist $u''_+ - u''$ proportional zu dem zuzusätzlichen z''_i und steht senkrecht auf $u'' - l$, also

$$(u''_+ - l, u''_+ - l) > (u'' - l, u'' - l).$$

Entsprechend gilt

$$(u'_+ - f, u'_+ - f) > (u' - f, u' - f).$$

Da aber

$$(u' - l, u' - l) + (u' - f, u' - f) = (l - f, l - f) = \text{const}$$

ist, gilt für die obere Schranke

$$(u'_+ - l, u'_+ - l) < (u' - l, u' - l).$$

Damit sind die letzten zwei Behauptungen erwiesen.

3.4 Zusammenfassung der Abschätzungen

Es liege eine Ausgleichungsaufgabe vor (vermittelnd oder bedingt), welche, in die Sprache der Geometrie des R_n übersetzt, folgendem Problem äquivalent ist: Gesucht ist der Punkt s in der Ebene F' mit dem kleinsten Abstand von einem festen Punkt l ausserhalb F' . Mit F'' werde die zu F' total senkrechte Ebene durch l bezeichnet. Man möchte nun, ohne den exakten Lösungspunkt s zu kennen, Schranken für das Quadrat seines Abstandes von l , (v, v) haben (in der Ausgleichsrechnung: Quadratsumme der Verbesserungen).

a) Grobe Abschätzung: Aus F' und F'' liege je ein Näherungspunkt x' und x'' vor; x' ergäbe sich als Näherungslösung bei einem iterativen Verfahren der vermittelnden Ausgleichung, x'' bei einem solchen der bedingten Ausgleichung. Bezeichnet man die Abweichungen von l mit $v = s - l$, $v' = x' - l$, so gilt für

das (v, v) des Lösungspunktes die Abschätzung

$$(v', v') - (x' - x'', x' - x'') \leq (v, v) \leq (v', v'). \quad (20)$$

b) Feinere Abschätzung: Liegt aus F' und F'' je ein Vektorsystem vor, wodurch die beiden Teilebenen G' und G'' bestimmt werden, dann erhält man die engsten Schranken (20), indem man für x' und x'' die beiden Fusspunkte u' und u'' der kürzesten Verbindung von G' und G'' setzt. (20) wird in diesem Falle zu

$$(u'' - l, u'' - l) \leq (v, v) \leq (u' - l, u' - l) \quad (31)$$

und speziell, falls wie unter a), nur je ein Punkt x' und x'' vorliegt, als Verbesserung der unteren Schranke von (20)

$$\frac{(x', v'')^2}{(x'', v'')^2} \leq (v, v) \leq (v', v') \quad (32)$$

mit

$$v' = x' - l, \quad v'' = x'' - l.$$

Die Berechnung der Punkte u' und u'' , welche im allgemeinen die Auflösung von linearen Gleichungssystemen erfordert, reduziert sich bei orthogonalen Vektorsystemen auf die Auswertung der einfachen Formeln (26) und (27).

3.5 Anwendung auf das Verfahren der konjugierten Gradienten

In diesem Abschnitt kommen wir nochmals auf das Verfahren der konjugierten Gradienten zurück und untersuchen, welche Folgerungen sich im Anschluss an die bisherigen Ausführungen für dieses spezielle Verfahren ergeben.

Es wurde bereits darauf hingewiesen, dass die Gewichtsvektoren des cg-Verfahrens ein konjugiertes System bilden: $(p_i, A p_j) = 0$ für $i \neq j$.⁷ In der Ausgleichsrechnung führt dies auf:

$$\left. \begin{aligned} (e_i, C^T C e_j) \\ (e_i, B B^T e_j) \end{aligned} \right\} = (q_i, q_j) = 0. \quad (33)$$

Diese Beziehung sowie die Orthogonalität der Residuen

$$(r_i, r_j) = 0 \quad \text{für } i \neq j \quad (34)$$

können als Rechenkontrollen verwendet werden, indem man zum Beispiel in jedem Schritt (q_i, q_{i-1}) und (r_i, r_{i-1}) bildet.

Wegen $\Delta x_i = \lambda_i q_i$ bedeutet aber (33), dass auch die Korrekturvektoren im x -Raume ein Orthogonalsystem bilden:

$$(\Delta x_i, \Delta x_j) = 0 \quad \text{für } i \neq j. \quad (35)$$

Die Tatsache, dass die Gewichtsvektoren beim allgemeinen *cg*-Verfahren ein konjugiertes System bilden und dass daraus bei der Anwendung auf die Ausgleichsrechnung eine Orthogonalität im höherdimensionalen Raume der Messvariablen wird, zeitigt immerhin einige Konsequenzen:

Zunächst ergibt sich daraus unmittelbar der folgende

Satz: Bei der bedingten Ausgleichung nach der Methode der konjugierten Gradienten wächst (v, v) monoton.

Dabei ist natürlich vorausgesetzt, dass mit $x_0 = l$ gestartet wird.

Es seien im folgenden x', x'' beliebige Punkte aus F', F'' ; x'_i, x''_i hingegen Näherungspunkte in der vermittelnden bzw. bedingten Ausgleichung nach *cg*. Dann gilt wegen (35):

$$(x''_i - s, x'_i - l) = 0,$$

aber auch

$$(s - x', x''_i - l) = 0$$

und damit

$$(x''_i - x', x''_i - l) = 0 \quad (36)$$

und speziell

$$(x''_i - f, x''_i - l) = 0. \quad (37)$$

(f ist, wie rememberlich, der feste Punkt aus F' , der zum ersten Male bei der Einführung des linearen Zusammenhanges zwischen Unbekannten und Messvariablen bei der vermittelnden Ausgleichung auftrat und der bei der bedingten Ausgleichung Anlass zum konstanten Vektor b in den Bedingungsgleichungen gibt. Es wird im folgenden vorausgesetzt, dass die vermittelnde Ausgleichung in f , das heisst mit $y_0 = 0$ beginnt.)

Entsprechend gilt natürlich

$$(x'_i - x'', x'_i - f) = 0$$

und speziell

$$(x'_i - l, x'_i - f) = 0. \quad (38)$$

(37) und (38) reduzieren sich auf

$$(x_i - f, v_i) = 0 \quad (39)$$

und können wiederum in jedem Schritt als Rechenkontrolle verwendet werden.

Die geometrische Interpretation der beiden Gleichungen fassen wir wieder zusammen als

Satz: Bei der vermittelnden und bedingten Ausgleichung nach der Methode der konjugierten Gradienten bewegt sich der Punkt x ständig auf der Hyperkugel über $f - l$ als Durchmesser.

(Bei homogenen Bedingungsgleichungen ist $f = 0$.)

Zwei Bemerkungen zur vermittelnden Ausgleichung wären noch anzufügen:

1. Im üblichen Falle $f = 0$ führt (39) wegen

$$(v'_i, v'_i) + (l, v'_i) = (v'_i + l, v'_i) = (x'_i, v'_i) = 0$$

auf die bekannte Schlussprobe

$$(v, v) = -(l, v), \quad (40)$$

welche aber hier schon im Verlaufe der Rechnung ständig erfüllt sein muss.

2. Nach dem Satz von PYTHAGORAS folgt aus (38):

$$(v'_i, v'_i) = (f - l, f - l) - (x'_i - f, x'_i - f).$$

Der letzte Term dieser Gleichung wächst aber infolge der Orthogonalität der Jx'_i monoton. Somit wäre nochmals verifiziert, dass (v'_i, v'_i) monoton abnimmt.

Des weiteren soll untersucht werden, was bei der Anwendung des *cg*-Verfahrens aus den beiden Abschätzungen für (v, v) wird:

a) *Grobe Abschätzung:* Wird vermittelnd ausgeglichen und von der letzten Näherung x'_i der Übergang zu einem x'' gemacht, so gilt mit $v = s \cdot l$ nach Gleichung (20):

$$(v'_i, v'_i) - (x'' - x'_i, x'' - x'_i) \leq (v, v) \leq (v'_i, v'_i).$$

Die untere Schranke kann nicht durch $(x'' - l, x'' - l)$ ersetzt werden, da dieser Wert ohne weiteres grösser als (v, v) sein kann (siehe erstes Beispiel im 4. Teil).

Im Falle der bedingten Ausgleichung bis x''_i mit Übergang zu einem x' wird aus Gleichung (20):

$$(v', v') - (x''_i - x', x''_i - x') \leq (v, v) \leq (v', v').$$

Die linke Seite der ersten Ungleichung ist aber wegen (36) gleich

$$(x''_i - l, x''_i - l) = (v''_i, v''_i),$$

also darf man hier ersetzen.

Zusammenfassend gilt somit folgender

Satz: Es werde nach dem Verfahren der konjugierten Gradienten ausgeglichen und vom letzten Näherungspunkt (x'_i bzw. x''_i) aus der Übergang zum Orthogonalraume (x'' bzw. x') gemacht. Im Falle der vermittelnden Ausgleichung liefert x'_i die obere Schranke für (v, v) , die untere ergibt sich aus der groben Abschätzungs-

formel mit x'_i und x'' . Bei der bedingten Ausgleichung gibt x''_i die untere Schranke, x' die obere; die Abschätzungsformel liefert keine weitere Verbesserung.

b) *Feinere Abschätzung*: Für die feinere Abschätzung mit dem Hyperkreis hatten wir in Abschnitt 3.3 orthogonale Vektoren z'_i und z''_i vorausgesetzt. Solche Orthogonalsysteme liefert nun zwar das cg-Verfahren in der Gestalt der $\perp x'_i$ bzw. $\perp x''_i$, jedoch stellen wir leider fest, dass gerade infolge der Orthogonalität der Korrekturvektoren die u'_i mit den x'_i bzw. die u''_i mit den x''_i zusammenfallen und damit Gleichung (31) keine engeren Schranken als die schon bekannten (v'_i, v'_i) und (v''_i, v''_i) ergibt. Das Verfahren bester Strategie liefert in diesem Sinne nicht gratis noch zusätzliche Information:

Satz: Es werde gleichzeitig vermittelnd und bedingt nach dem Verfahren der konjugierten Gradienten ausgeglichen. Die Korrekturvektoren $\perp x'_i$ bzw. $\perp x''_i$ spannen Teilebenen G' bzw. G'' von F' bzw. F'' auf. Die Fusspunkte u' bzw. u'' der kürzesten Verbindung zwischen G' und G'' fallen dann mit den letzten Näherungspunkten x'_i und x''_i zusammen.

So gibt zwar im Falle der vermittelnden Ausgleichung mit Übergang von x'_i zu einem x'' (32) die beste untere Schranke, hingegen ist bei der bedingten Ausgleichung mit (32) nichts zu gewinnen.

Der Beweis für das Zusammenfallen von u'_i und u''_i mit x'_i und x''_i folgt leicht aus den bisherigen Ausführungen. Mit ganz entsprechender Begründung wie für (36) gilt auch:

$$(x''_i - x', \perp x''_{j-1}) = 0 \quad \text{für } j = 1, 2, \dots, i, \quad (41)$$

wobei $\perp x''_{j-1} = x''_j - x''_{j-1}$. Da aber die Teilebene G'' von F'' (siehe Abschnitt 3.3) durch die $\perp x''_{j-1}$ aufgespannt werden soll, ist x''_i nach (41) die Projektion von x' auf G'' und damit $x''_i = u''_i$. Ebenso gilt dual $x'_i = u'_i$.

Diese Koinzidenzen können immerhin für eine zusätzliche Rechenkontrolle ausgenützt werden: Nach (26) gilt in jedem Schritt (unter Weglassung der Indizes):

$$\Delta u' = \frac{(l - f, z')}{(z', z')} z'.$$

Da aber $z' = \Delta x' = \Delta u'$, wird bei Benützung von (13):

$$1 = \frac{(l - f, z')}{(z', z')} = \frac{(l - f, \lambda' q')}{(\lambda' q', \lambda' q')} = \frac{(l - f, q')}{\lambda' (q', q')} = \frac{(l - f, q')}{(r', r')}$$

oder

$$(l - f, q') = (r', r'), \quad (42)$$

und entsprechend bei der bedingten Ausgleichung:

$$-(l - f, q'') = (r'', r''). \quad (43)$$

Falls schliesslich beim vermittelnden Ausgleichen die y mitgeführt werden, dürfte noch folgende Rechenprobe willkommen sein:

$$\underline{(r'_0, y)} = (C^T l, y) = (l, C y) = \underline{(l, x')} . \tag{44}$$

Entsprechend gilt in der bedingten Ausgleichung für die Korrelaten t :

$$\underline{-(b, t)} = (B f, t) = (f, B^T t) = (f, v'') = \underline{(x'', v'')} . \tag{45}$$

Führen wir die Widersprüche $w = B l \div b$ ein, so folgt aus (45) durch Subtraktion von $(B l, t) = (l, v'')$ wieder eine bekannte Schlussprobe:

$$\underline{-(w, t)} = \underline{(v'', v'')} , \tag{46}$$

welche infolge der Orthogonalität der Korrekturvektoren beim cg ebenfalls schon in jedem Schritt erfüllt sein muss.

Zusammenstellung der Rechenproben

Vermittelnde Ausgleichung		Bedingte Ausgleichung	
(q_i, q_j)	$= 0$	$(i \neq j)$	(33)
(r_i, r_j)	$= 0$	$(i \neq j)$	(34)
$(x_i - f, v_i)$	$= 0$		(39)
$(l - f, q'_i) = (r'_i, r'_i)$	(42)	$-(l - f, q''_i) = (r''_i, r''_i)$	(43)
$(r'_0, y_i) = (l, x'_i)$	(44)	$-(b, t_i) = (x''_i, v''_i)$	(45)
		$-(w, t_i) = (v''_i, v''_i)$	(46)

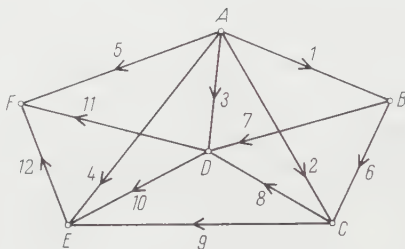
4. Beispiele

4.1 Nivellementsausgleichung (vermittelnd)

Alle drei Beispiele wurden vom Verfasser auf der elektronischen Rechenmaschine der ETH (ERMETH) nach dem im 2. Teil beschriebenen Verfahren der konjugierten Gradienten durchgerechnet. Dabei wurde von allen im Abschnitt 3.5 angegebenen Rechenkontrollen Gebrauch gemacht.

Im ersten Beispiel werden Nivellementsmessungen vermittelnd ausgeglichen. Es seien sechs Punkte A bis F so im Gelände verteilt, dass infolge der Sichtverhältnisse nur 12 Höhendifferenzen zwischen je zwei Punkten direkt gemessen werden können (Fig. 4). (Wenn alle möglichen 15 Differenzen in die Rechnung eingehen, wird die Sache zu «regelmässig», das heisst, die Eigen-

werte der Matrix $C^T C$ fallen bis auf einen zusammen, und der cg -Algorithmus führt schon in zwei Schritten zur exakten Lösung, was bei unserem Beispiel nicht erwünscht ist.)



Figur 4

Beispiel einer Nivellementsausgleichung.

Als Unbekannte wählen wir die Höhen 1 bis 5 der übrigen fünf Punkte über A, welches der Anschlusspunkt zu einem anderen Netz sei.

Die Beziehung $x - C y$ zwischen den 12 Messgrößen x und den 5 Unbekannten y wird hier sehr einfach. Die Matrix C heisst, unter Berücksichtigung der in Figur 4 durch Pfeile angedeuteten Orientierung der Differenzen:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(Praktisch würde man nicht mit den Höhen selbst, sondern mit Korrekturen rechnen, ferner wären die Fehlergleichungen mit verschiedenen Gewichten zu versehen.)

Für unser Zahlenbeispiel nehmen wir:

$$l = \{7,1 \quad -2,5 \quad -3,4 \quad 0,7 \quad -4,6 \quad 5,2 \quad 6,8 \quad 3,3 \quad -0,9 \quad -4,1 \quad 2,7 \quad -8,2\}.$$

Die exakte Lösung

$$y = h = \{-1,3 \quad 0,1 \quad 0,9 \quad 0,5 \quad -2,9\}$$

$$x = s = \{-1,3 \quad 0,1 \quad 0,9 \quad 0,5 \quad -2,9 \quad 1,4 \quad 2,2 \quad 0,8 \quad 0,4 \quad -0,4 \quad -3,8 \quad -3,4\}$$

wurde nach 5 cg -Schritten erreicht.

Für $\eta_i = \langle v_i, v_i \rangle$ ergaben sich folgende Werte (gerundet):

Schritt i	η_i
0 (Start)	266,190 = $\langle l, l \rangle$
1	224,277
2	221,874
3	221,390
4	221,285
5	221,260 (exakt)

Diese Zahlen liefern obere Schranken für $\langle v, v \rangle = \eta_5$. Für den Übergang zu Punkten x'' aus F'' hat man zu beachten, dass diese die Gleichung

$$C^T (x'' - l) = C^T v'' = 0 \tag{47}$$

befriedigen müssen. Die Berechnung von x'' wird dank dem speziellen Bau der Matrix C hier trivial: Wenn die letzten sieben Komponenten von x'_i (cg-Näherungspunkt) übernommen werden, ergeben sich die ersten fünf Komponenten von x'' direkt aus (47), ohne dass ein Gleichungssystem aufzulösen ist. Im dritten und vierten Schritt erhält man so:

$$\langle x'_3 - x'', x'_3 - x'' \rangle = 0,282, \quad \langle x'_4 - x'', x'_4 - x'' \rangle = 0,087$$

und damit nach (20) die folgenden Schranken:

3. Schritt:

$221,108 \leq \langle v, v \rangle \leq 221,390$

4. Schritt:

$221,198 \leq \langle v, v \rangle \leq 221,285$

\downarrow

$221,260$

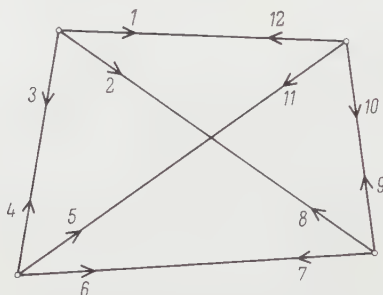
Der selbe Punkt x'' gibt im 4. Schritt mit der feineren Abschätzungsformel (32) die bessere untere Schranke 221,228.

An diesem Beispiel ist ersichtlich, dass der durch den Übergang gewonnene Punkt x'' allein keine untere Schranke liefert, denn im vierten Schritt wäre zum Beispiel $\langle x'' - l, x'' - l \rangle \approx 226$, also viel zu gross.

4.2 Triangulierungsnetz (bedingt)

Das zweite Beispiel stammt aus dem bekannten Handbuch von JORDAN-EGGERT [8] (Beispiel aus der Badischen Triangulation). Es handelt sich um bedingte Richtungsausgleichung in einem Triangulierungsnetz, und zwar wurden alle 12 Richtungen in einem Viereck gemessen (Figur 5).

Man überlegt sich leicht, dass das Problem acht Freiheitsgrade besitzt: in jedem Punkt legt eine Richtung die Orientierung des betreffenden Satzes fest, und durch vier weitere Richtungen ist die ganze Konfiguration eindeutig bestimmt. Die 12 Variablen haben somit vier Bedingungsgleichungen zu erfüllen. Da die Bedingungen für die Winkelsummen nur drei unabhängige



Figur 5

Beispiel einer Richtungsausgleichung.

Gleichungen liefern, hat man noch eine Seitengleichung heranzuziehen (das heisst eine Gleichung, welche trigonometrische Beziehungen benützt und erst linearisiert werden muss). Die Koeffizienten der Bedingungsgleichungen sind unten angegeben. Wir müssen, da die Aufgabe schon so formuliert ist, dass nur noch die Verbesserungen als Unbekannte auftreten, nach unserer Bezeichnungsweise $x = v, l = 0$ setzen.

$$B = \begin{vmatrix} -3,02 & 8,00 & -4,98 & -0,22 & 2,56 & -2,34 & 0 & 0 & 0 & -4,97 & 4,49 & 0,48 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$b = \begin{vmatrix} -2,90 \\ 1,00 \\ 1,02 \\ 1,25 \end{vmatrix}$$

Die Lösungen sind (auf drei Stellen nach dem Komma gerundet):

$$t = h = \{0,044 \quad 0,076 \quad -0,229 \quad -0,430\},$$

$$x = v = s$$

$$= \{0,222 \quad 0,148 \quad -0,370 \quad 0,143 \quad 0,188 \quad -0,331 \quad 0,229 \quad 0,201 \quad -0,430 \quad 0,213 \quad 0,120 \quad -0,333\}.$$

Die (praktisch bedeutungslosen) Abweichungen von höchstens 5 Einheiten der letzten Stelle gegenüber den bei JORDAN-EGGERT [8] angegebenen Resultaten rühren davon her, dass unser Rechenautomat 11stellig rechnet.

Tabelle der $\eta_i = (v_i, v_i)$:

Schritt i	η_i
0 (Start)	0 ($x_0 = l, v_0 = 0$)
1	0,109
2	0,623
3	0,814
4	0,821

Diese Werte bilden untere Schranken für (v, v) . Der Übergang nach x' geht bei diesem einfachen Beispiel noch ganz ohne Auflösung von Gleichungssystemen. Wir können über 8 Komponenten von x' frei verfügen und übernehmen daher die 1.-4. und 9.-12. von x'' . Die restlichen Komponenten ergeben sich dann sukzessive durch Einsetzen der schon bekannten in die Bedingungsgleichungen, und zwar

- die 8. Komponente aus der 4. Gleichung,
- die 5. Komponente aus der 2. Gleichung,
- die 6. Komponente aus der 1. Gleichung,
- die 7. Komponente aus der 3. Gleichung.

Dieser Übergang wurde im zweiten und im dritten Schritt ausgeführt und damit je eine obere Schranke gewonnen. Die durch die η_i gegebenen unteren Schranken lassen sich, wie in Abschnitt 3.5 erklärt, nicht verbessern, also:

2. Schritt $0,623 \leq (v, v) \leq 2,525$
3. Schritt $0,814 \leq (v, v) \leq 0,831$

▼
0,821

Falls man sich nach dem dritten Schritt auf Grund der relativ engen Schranken dazu entschliessen würde, die Rechnung abzubrechen, so hätte man tatsächlich v -Werte, welche um höchstens 50 Einheiten der dritten Stelle nach dem Komma falsch sind, was in diesem Falle wohl eben noch gestattet werden könnte.

4.3 Approximation durch Polynom (vermittelnd und bedingt)

Hier handelt es sich um ein Schulbeispiel mit ganzzahligen Lösungen. Es sollen 16 vorgegebene Punkte (Ordinaten: Messvektor l) mit äquidistanten Abszissen durch eine Parabel 7. Grades approximiert werden. Die Ausgleichung wurde gleichzeitig vermittelnd und bedingt durchgeführt:

- $n = 16$ Messvariable,
- $\gamma = 8$ Unbekannte (Koeffizienten der Kurvengleichung) ,
- $\beta = 8$ Bedingungsgleichungen (8. Differenzen $\equiv 0$).

Ob man sich in einem konkreten Falle für die eine oder die andere Variante entscheidet, hängt von der Anzahl der Punkte und dem Grad des verlangten Polynoms ab. Ferner ist zu beachten, dass die bedingte Ausgleichung nur mit den Ordinaten arbeitet und keine Kurvengleichung liefert. Die Koeffizientenmatrix B der Bedingungsgleichungen ist einfach gebaut (Binomialkoeffizienten) und enthält eine beträchtliche Anzahl Nullen.

In die Matrix C der Fehlergleichungen der vermittelnden Ausgleichung hingegen gehen die Abszissen der Punkte wesentlich ein, da ja die Kurvengleichung bestimmt werden soll. Die Matrix C wird im allgemeinen ausgefüllt sein und sich unter Umständen sehr schlecht für die numerische Rechnung eignen. Wenn als Unbekannte die Koeffizienten der Parabelgleichung $\eta = c_0 + c_1 \xi + c_2 \xi^2 + \dots + c_{\gamma-1} \xi^{\gamma-1}$ gewählt werden, so erhält man schon in unserem Beispiel mit $\gamma = 8$ infolge numerischer Instabilität überhaupt keine vernünftigen Resultate mehr. (Ich verdanke Herrn Professor RUTISHAUSER den Hinweis auf die Verwandtschaft der betreffenden Gaußschen Matrizen $C^T C$ mit den sehr schlecht konditionierten Hilbert-Matrizen.)

Eine wesentliche Verbesserung ist zu erwarten, wenn die gesuchte Funktion nicht nach Potenzen von ξ , sondern nach einem System von orthogonalen Polynomen entwickelt wird. Wir machten den Versuch mit den auf das Intervall $[-1, +1]$ normierten Legendre-Polynomen P_r und wählten die Abszissen der 16 Punkte von $-0,7$ bis $0,8$ im Abstand $0,1$.

Es folgt eine Zusammenstellung der Daten, mit denen die Rechnung durchgeführt wurde:

$$C = \begin{vmatrix} P_0(-0,7) & P_1(-0,7) & \dots & P_7(-0,7) \\ P_0(-0,6) & P_1(-0,6) & \dots & P_7(-0,6) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_0(0,8) & P_1(0,8) & \dots & P_7(0,8) \\ 1 & -0,7 & 0,235 & \dots & -0,1501 \dots \\ 1 & -0,6 & 0,04 & \dots & -0,3225 \dots \\ 1 & -0,5 & -0,125 & \dots & -0,2231 \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0,8 & 0,46 & \dots & -0,2396 \dots \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} 1 & -8 & 28 & -56 & 70 & -56 & 28 & -8 & 1 \\ & 1 & -8 & 28 & -56 & 70 & -56 & 28 & -8 & 1 \\ & & 1 & -8 & 28 & -56 & 70 & -56 & 28 & -8 & 1 \\ & & & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ & & & & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & 1 & -8 & 28 & -56 & 70 & -56 & 28 & -8 & 1 \end{vmatrix}$$

$b = 0$

Ferner

$l = \{471 \ 402 \ 1024 \ -95 \ 1228 \ -46 \ 301 \ -100 \ -331 \ -354 \ -1018 \ 95 \ -1214 \ 78 \ -261 \ 130\}$

Die exakte Lösung

$x = s = \{451 \ 542 \ 604 \ 605 \ 528 \ 374 \ 161 \ -80 \ -311 \ -494 \ -598 \ -605 \ -514 \ -342 \ -121 \ 110\}$

sollte theoretisch nach 8 Schritten erreicht werden.

Die tatsächlich erhaltenen Werte sind jedoch mit Rundungsfehlern behaftet, und es zeigt sich, dass zusätzliche cg-Schritte noch eine Verbesserung der Resultate bringen.

Die Zwischenwerte der η_i (v_i, v_i) sind, auf Ganze gerundet, in der folgenden Tabelle angegeben:

Schritt i	η'_i (vermittelnd)	η''_i (bedingt)
0 (Start)	$5896874 = (l, l)$	0 ($x_0 = l, v_0 = 0$)
1	3038088	2005649
2	2892854	2692796
3	2757019	2745146
4	2747769	2769706
5	2746849	2746532
6	2746439	2745534
7	2745601	2745565
8	2745601	2745600
9	2745600	.
	.	.
	.	.
	.	.

Dies sind zugleich die besten, auf Grund des cg-Verfahrens erhältlichen Schranken für den exakten Wert $(v, v) = 2745600$. Es fällt auf, dass in Schritt 4 und 5 das η'' , im Gegensatz zur Theorie, grösser wird als der exakte (v, v) -Wert. Diese Störung, die auf Rundungsfehler zurückzuführen ist, verschwindet interessanterweise später wieder. Um an dieser Stelle dennoch vernünftige Schranken zu erzwingen, wurde nachträglich folgendermassen vorgegangen:

Es wurden zwei Punkte x' und x'' bestimmt, möglichst nahe bei x'_4 und x''_4 , welche aber, im Gegensatz zu diesen Näherungspunkten, wieder genau in F' bzw. F'' lagen, und mit ihnen die groben Schranken nach (20) berechnet, welche nun sicher korrekt sind:

$2745482 \leq (v, v) \leq 2747919 .$

Als Beispiel für die Berechnung der Gewichtsmatrix P sollen die berechneten Zwischenwerte des ersten Diagonalelementes p_{11} 4stellig bis zum 8. Schritt

angegeben werden. Was in weiteren Schritten noch dazukäme, wäre offenbar sehr fragwürdig. Im 8. Schritt sollten beide Zahlenfolgen theoretisch denselben Wert erreichen.

Schritt i	p_{11} (vermittelnd)	p_{11} (bedingt)
0 (Start)	0	1
1	0,1119	1
2	0,1558	1
3	0,1564	0,9991
4	0,3119	0,9920
5	0,3151	0,9900
6	0,8093	0,9899
7	0,8810	0,9899
8	0,9300	0,9898

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] E. STIEFEL, *Ausgleichung ohne Aufstellung der Gaußschen Normalgleichungen*, Wissensch. Z. techn. Hochschule Dresden 2, 441 (1952/53).
- [2] J. L. SYNGE, *The Hypercircle in Mathematical Physics* (Cambridge University Press, 1957).
- [3] R. ZURMUEHL, *Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker*, 2. Aufl. (Springer, Berlin 1957).
- [4] E. STIEFEL, *Über einige Methoden der Relaxationsrechnung*, Z. angew. Math. Phys. 3, 1 (1952).
- [5] E. STIEFEL, *Relaxationsmethoden bester Strategie zur Lösung linearer Gleichungssysteme*, Comm. math. helv. 29, 157 (1955).
- [6] M. R. HESTENES und E. STIEFEL, *Methods of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems*, J. Res. NBS 49, No. 6, 409 (1952).
- [7] R. COURANT und D. HILBERT, *Methods of Mathematical Physics*, 1st English ed. (Interscience Publishers Inc., New York 1953), besonders S. 252ff.
- [8] W. JORDAN und O. EGGERT, *Handbuch der Vermessungskunde*, 1. Bd., 8. Aufl. (J. B. Metzlersche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart 1935), S. 225ff.

Summary

The paper begins with a short description of the theory of overdetermined linear systems (*Ausgleichsrechnung*), using the notation of matrix-calculus.

The solution of such systems by means of relaxation-methods is then discussed. In particular a broad description of the method of conjugate gradients is given. The algorithm avoids the use of the matrix of the normal equations.

Lastly the application of the 'method of the hypercircle', developed by SYNGE and others, to this problem of linear algebra is studied, with the aim of finding upper and lower bounds for the sum of the square residuals – this sum being a minimum for the solution of the system. To get these bounds, we need approximate solutions obtained as intermediate values in an iterative process.

(Eingegangen: 31. August 1958.)

Zur Matrizeninversion nach Gauss-Jordan

Von HEINZ RUTISHAUSER, Zürich¹⁾

Die Aufgabe, ein lineares Gleichungssystem numerisch aufzulösen, wurde schon von GAUSS 1826 vollständig gelöst. Die seitdem in grosser Zahl publizierten «neuen» Methoden zur Lösung linearer Gleichungssysteme und zur Inversion von Matrizen sind, soweit sie auf Elimination beruhen, alle nur mehr oder weniger wertvolle Varianten des Gaußschen Verfahrens. Die bedeutendsten Varianten sind ohne Zweifel diejenigen von JORDAN²⁾, welche die Unbekannten in einem einheitlichen Rechengang (das heisst ohne Rückwärtseinsetzen) zu berechnen gestattet, sowie diejenigen von BANACHIEWICZ³⁾, welche das Aufschreiben stark vereinfachen.

Die sonst weniger verwendete Jordansche Variante (auch Gauss-Jordan-Verfahren genannt) hat mit dem Aufkommen der elektronischen Rechenmaschinen wieder an Bedeutung gewonnen. Insbesondere sind in neuester Zeit einige Abarten des Gauss-Jordan-Verfahrens bekannt geworden⁴⁾, die sich speziell zur Berechnung der inversen Matrix mit Rechenautomaten eignen, weil sie zu wesentlich einfacheren Rechenprogrammen führen als das ursprüngliche Gaußsche Verfahren.

Im folgenden wird eine elementare, determinantenfreie Begründung der in [4] und [5] vorgeschlagenen Variante des Gauss-Jordanschen Verfahrens gegeben.

1. Die Transformation J

Sei $A = (a_{ij})$ eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten. Wir betrachten die lineare Substitution:

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (1)$$

mit den unabhängigen Variablen x_1, \dots, x_n und den abhängigen Variablen y_1, \dots, y_m .

Wir können nun in den Beziehungen (1) eine Rollenvertauschung vornehmen, indem wir ein beliebiges Matricelement $a_{pq} \neq 0$ herausgreifen und dann

¹⁾ Institut für angewandte Mathematik der ETH.

²⁾ Siehe etwa JORDAN-EGGERT [3], § 35.

³⁾ Siehe [1] sowie auch ZURMÜHL [6] oder § 23 in [7].

⁴⁾ Siehe PETRIE [4], ERISOV [2], ferner RUTISHAUSER [5].

die p -te der Relationen (1) nach x_q auflösen:

$$x_q = \frac{1}{a_{pq}} y_p - \sum_{j \neq q} \frac{a_{pj}}{a_{pq}} x_j. \quad (2)$$

Durch Einsetzen von (2) in die übrigen $m - 1$ Gleichungen (1) erhalten wir

$$y_i = \sum_j a_{ij} x_j = \sum_{j \neq q} a_{ij} x_j + a_{iq} \left\{ \frac{1}{a_{pq}} y_p - \sum_{j \neq q} \frac{a_{pj}}{a_{pq}} x_j \right\}$$

oder

$$y_i = \frac{a_{iq}}{a_{pq}} y_p + \sum_{j \neq q} \left(a_{ij} - \frac{a_{iq} a_{pj}}{a_{pq}} \right) x_j \quad (i \neq p). \quad (3)$$

Dies sind mit (2) zusammen wieder m lineare Beziehungen mit den unabhängigen Variablen $x_1, x_2, \dots, x_{q-1}, y_p, x_{q+1}, \dots, x_n$ und den abhängigen Variablen $y_1, y_2, \dots, y_{p-1}, x_q, y_{p+1}, \dots, y_m$. Man kann diese Beziehungen auch vektoriell aufschreiben:

$$\left. \begin{aligned} \eta^{(1)} &= A^{(1)} \mathfrak{x}^{(1)}, \\ \text{wobei} \quad \mathfrak{x}^{(1)} &= (x_1, x_2, \dots, x_{q-1}, y_p, x_{q+1}, \dots, x_n), \\ \eta^{(1)} &= (y_1, y_2, \dots, y_{p-1}, x_q, y_{p+1}, \dots, y_m) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

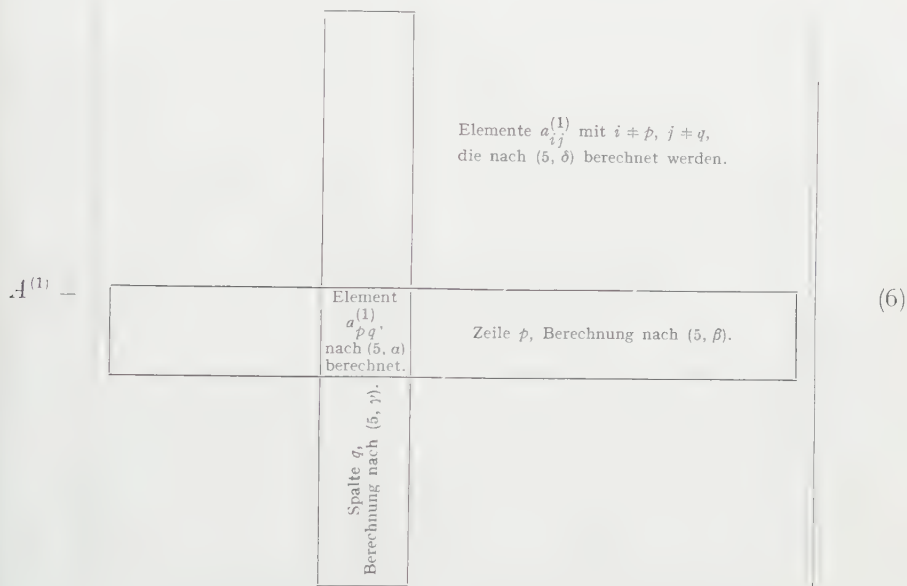
und die Elemente der Matrix $A^{(1)}$ wie folgt bestimmt sind:

$$a_{ij}^{(1)} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{a_{pq}} & \text{für } i = p, \quad j = q \quad (\alpha), \\ -\frac{a_{pj}}{a_{pq}} & \text{für } i = p, \quad j \neq q \quad (\beta), \\ \frac{a_{iq}}{a_{pq}} & \text{für } i \neq p, \quad j = q \quad (\gamma), \\ \left(a_{ij} - \frac{a_{iq} a_{pj}}{a_{pq}} \right) & \text{für } i \neq p, \quad j \neq q \quad (\delta). \end{array} \right\} \quad (5)$$

Der Elimination einer Unbekannten x_q aus den Gleichungen (1), genauer: der Vertauschung einer abhängigen Variablen mit einer unabhängigen Variablen, entspricht also eine innere Transformation J_{pq} ⁵⁾ der Matrix A , welche durch die Formeln (5) bestimmt ist. Das abgesehen von der Bedingung $a_{pq} \neq 0$ frei wählbare Element a_{pq} , von dem die Transformation wesentlich abhängt, heisst *Pivot* der Transformation J_{pq} .

⁵⁾ Es handelt sich *nicht* um eine Ähnlichkeitstransformation.

Die verschiedenen Berechnungsarten der Elemente der neuen Matrix $A^{(1)}$ können wie folgt schematisch dargestellt werden:



Die Transformation J_{pq} ist natürlich nur im Fall $a_{pq} \neq 0$ durchführbar, dann aber ist die Beziehung zwischen \mathbf{x} und $\mathbf{x}^{(1)}$ linear, es gilt nämlich

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pq} & \dots & a_{pn} \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad (7)$$

und damit

Satz 1: Durchläuft $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ein lineares Vektorgebilde der Dimension r , so gilt dasselbe auch für den Vektor $\mathbf{x}^{(1)}$ in (4).

2. Iterierte Anwendung der Transformation J

Es ist nun naheliegend, in der Beziehung (4) weitere abhängige und unabhängige Variablen gegeneinander auszutauschen, um dann schliesslich Formeln zu erhalten, in denen möglichst viele der unabhängigen Variablen durch abhängige Variablen ausgedrückt sind. Zu diesem Zweck muss man offenbar in der Matrix $A^{(1)}$ wieder ein Pivotelement $a_{p_2 q_2}^{(1)} \neq 0$ auswählen und dann die Transformation $J_{p_2 q_2}$ auf die Matrix $A^{(1)}$ anwenden. (Das erste Pivotelement ist jetzt sinngemäss mit $a_{p_1 q_1}$ zu bezeichnen.) Die resultierende Matrix $A^{(2)}$ kann in gleicher Weise behandelt werden, usw.

Damit die abhängigen und unabhängigen Variablen systematisch ausgetauscht werden, müssen die Pivots – abgesehen von der Bedingung $a_{pq} \neq 0$ – so gewählt werden, dass sowohl die p_k als auch die q_k je untereinander verschieden sind. Die Pivots müssen also der «Turmbedingung» genügen, das heisst, sie dürfen einander nicht bedrohen, wenn man sie als feindliche Türme auf einem $(m \times n)$ -Schachbrett auffasst. Diese Bedingung soll verhindern, dass der Austausch der x und y wieder teilweise rückgängig gemacht wird.

Wir wollen also allgemein nach Berechnung der Matrix $A^{(s)}$ das nächste Pivotelement nur unter denjenigen Zeilen und Spalten von $A^{(s)}$ auswählen, die nicht schon ein Pivotelement enthalten. Diese Einschränkung hat natürlich zur Folge, dass auf $A^{(s)}$ genau dann eine weitere Transformation J ausgeübt werden kann, wenn auch ausserhalb der Pivotzeilen und Pivotkolonnen von $A^{(s)}$ noch mindestens ein von 0 verschiedenes Element existiert. Satz 3 gibt eine a-priori-Aussage über die Zahl der auf A hintereinander ausübbarer Transformationen J . Zunächst gilt wegen (4):

Satz 2: Sei $A^{(s)}$ die durch Anwendung der S Transformationen $J_{p_k q_k}$ ($k = 1, 2, \dots, s$) aus $A = A^{(0)}$ erhaltene Matrix, wobei die Indexwerte p_1, p_2, \dots, p_s und q_1, q_2, \dots, q_s je untereinander verschieden seien. Ist dann $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ein beliebiger Vektor und $\boldsymbol{\eta} = A \mathbf{x} = (y_1, \dots, y_m)$, so gilt

$$A^{(s)} (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m),$$

wobei

$$\left. \begin{aligned} \xi_j &= \begin{cases} x_j & \text{für } j \neq q_1, q_2, \dots, q_s, \\ y_{p_k} & \text{für } j = q_k \ (k = 1, \dots, s), \end{cases} \\ \eta_i &= \begin{cases} y_i & \text{für } i \neq p_1, p_2, \dots, p_s, \\ x_{q_k} & \text{für } i = p_k \ (k = 1, \dots, s). \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Satz 3: Hat die Matrix A den Rang r , so kann man genau r Transformationen J hintereinander auf A anwenden und erhält dann eine Matrix $A^{(r)}$ mit der Eigenschaft

$$a_{ij}^{(r)} = 0 \quad \text{für } i \neq p_1, \dots, p_r \quad \text{und} \quad j \neq q_1, \dots, q_r, \quad (9)$$

das heisst, nach Streichen der Pivotzeilen und -spalten der Matrix $A^{(r)}$ verbleibt nur noch die $(m-r) \times (n-r)$ -reihige Nullmatrix.

Beweis: Hat A den Rang r , so existiert ein $(n-r)$ -dimensionales Vektorgebilde \mathfrak{Q} im Raum der x_1, \dots, x_n , so dass $A\mathfrak{x} = 0$ für alle $\mathfrak{x} \in \mathfrak{Q}$. Nach Satz 2 ist, falls man r Transformationen ausführen kann:

$$A^{(r)}(\xi_1, \dots, \xi_n) = (\eta_1, \dots, \eta_m),$$

wobei

$$\left. \begin{aligned} \xi_j &= \begin{cases} x_j & \text{für } j \neq q_1, q_2, \dots, q_r, \\ 0 & \text{für } j = q_k \ (k = 1, \dots, r), \end{cases} \\ \eta_i &= \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq p_1, \dots, p_r, \\ x_{q_k} & \text{für } i = p_k \ (k = 1, \dots, r) \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

und \mathfrak{x} ein beliebiger Vektor aus \mathfrak{Q} ist.

Nach Satz 1 muss aber der Vektor (ξ_1, \dots, ξ_n) ein $(n-r)$ -dimensionales Vektorgebilde durchlaufen, wenn $\mathfrak{x} \in \mathfrak{Q}$ durchläuft, das heisst, die Grössen x_j ($j \neq q_1, \dots, q_r$) unterliegen in der Gleichung (10) keinerlei Einschränkung. Daraus folgt aber die behauptete Eigenschaft von $A^{(r)}$.

Wenn man andererseits nach r Transformationsschritten J zu einer Matrix $A^{(r)}$ mit der Eigenschaft (9) kommt, so dass kein der Turmbedingung genügendes Pivotelement $a_{pq} \neq 0$ mehr gefunden werden kann, so kann man derartige Beziehungen (10) konstruieren, die für beliebige x_j ($j \neq q_1, q_2, \dots, q_r$) erfüllt sind. Daraus folgt dann umgekehrt wie oben, dass A ein Nullgebilde der Dimension $n-r$ und damit den Rang r haben muss, was zu beweisen war.

Es ist genau zu beachten, dass die Aussage von Satz 3 nicht etwa nur bei einer besonders günstigen, aber praktisch nie erreichbaren Wahl der Pivots realisiert werden kann. Vielmehr genügt es vollauf, als nächsten Pivot jeweils irgendein von Null verschiedenes Element zu wählen, das bezüglich der bisherigen Pivots die Turmbedingung erfüllt.

Dagegen ist es äusserst schwierig, mit Hilfe von Satz 3 den Rang einer Matrix tatsächlich numerisch zu bestimmen, weil infolge der Rundungsfehler Nullen in der Regel als kleine Zahlen erscheinen und daher kaum von den «echten» Nicht-Nullen unterschieden werden können.

3. Inversion von Matrizen

Sei nun A eine n -reihige quadratische Matrix. Falls sie nicht singular ist, kann man nach Satz 3 n Transformationen J anwenden; von den n Pivots steht dann genau einer in jeder Zeile und jeder Spalte, so dass unter den Indexfolgen p_1, p_2, \dots, p_n und q_1, q_2, \dots, q_n jede der Zahlen 1 bis n genau je einmal vorkommt. Damit hat die nach n Schritten resultierende Matrix $A^{(n)}$ nach Satz 2 die Eigenschaft, dass aus

$$\left. \begin{aligned} A \mathbf{x} = \boldsymbol{\eta} \quad A^{(n)} (\xi_1, \dots, \xi_n) &= (\eta_1, \dots, \eta_n) \\ \xi_j &= \eta_{p_k} \quad \text{für } j = q_k \\ \eta_i &= \xi_{q_k} \quad \text{für } i = p_k \end{aligned} \right\} \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (11)$$

folgt, wobei

Damit ist $A^{(n)}$ im wesentlichen die Inverse von A und kann durch blosse Zeilen- und Spaltenvertauschungen in diese überführt werden.

Zunächst ist die Beziehung zwischen den Vektoren (η_1, \dots, η_n) und \mathbf{x} gemäss (11) eine blosse Permutation der Komponenten, nämlich

$$\left. \begin{aligned} (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) &= P \mathbf{x}, \\ p_{ij} &= \begin{cases} 1 & \text{für } i = p_k, j = q_k, \\ 0 & \text{in allen anderen Fällen.} \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

wobei

Ebenso

$$\left. \begin{aligned} (\xi_1, \dots, \xi_n) &= Q \boldsymbol{\eta}, \\ q_{ij} &= \begin{cases} 1 & \text{für } i = q_k, j = p_k, \\ 0 & \text{in allen anderen Fällen.} \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

wobei

Damit ist Q offenbar die Transponierte von P , und es wird insgesamt

$$\mathbf{x} = P^{-1} (\eta_1, \dots, \eta_n) = P^{-1} A^{(n)} (\xi_1, \dots, \xi_n) = P^{-1} A^{(n)} P^T \boldsymbol{\eta}.$$

Schliesslich benützen wir noch, dass bei Permutationsmatrizen $P^{-1} = P^T$ ist, und erhalten damit

$$A^{-1} = P^T A^{(n)} P^T. \quad (14)$$

Die hier auftretende Matrix P hängt aufs engste mit den Pivotelementen der bei der Berechnung von $A^{(m)}$ ausgeführten Transformationen J zusammen; P hat Einsen an den Stellen $i = p_k, j = q_k$, also genau dort, wo sich die Pivots der n Transformationen $J_{p,q}$ befinden; alle andern Elemente von P sind Nullen. *Numerisches Beispiel* (die Pivots sind fett gesetzt):

$$A^{(0)} = \begin{vmatrix} 20 & 10 & 4 & 1 \\ 10 & 6 & 3 & \mathbf{1} \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad A^{(1)} = J_{24}(A^{(0)}) = \begin{vmatrix} 10 & 4 & 1 & -1 \\ 10 & 6 & 3 & \mathbf{1} \\ -6 & -3 & -\mathbf{1} & -1 \\ -9 & -5 & -2 & -1 \end{vmatrix},$$

$$A^{(2)} = J_{33}(A^{(1)}) = \begin{vmatrix} 4 & \mathbf{1} & 1 & -2 \\ -8 & -3 & 3 & -2 \\ 6 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}, \quad A^{(3)} = J_{12}(A^{(2)}) = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & 6 & -8 \\ -6 & -3 & -4 & 7 \\ -\mathbf{1} & -1 & -3 & 3 \end{vmatrix},$$

$$A^{(4)} = J_{41}(A^{(3)}) = \begin{vmatrix} 4 & -3 & -11 & 10 \\ 4 & -1 & -6 & 4 \\ -6 & 3 & 14 & -11 \\ -\mathbf{1} & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

Hier ist offenbar

$$P = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

und damit nach (14)

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 & -3 & -11 & 10 \\ 4 & -1 & -6 & 4 \\ -6 & 3 & 14 & -11 \\ -1 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ -3 & 10 & -11 & 4 \\ 3 & -11 & 14 & -6 \\ -1 & 4 & -6 & 4 \end{vmatrix}.$$

In der Praxis wird man freilich A^{-1} nicht durch effektive Matrizenmultiplikation nach (14), sondern durch Zeilen- und Spaltenvertauschungen berechnen:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Die } p_k\text{-te Zeile von } A^{(n)} \text{ ist die } q_k\text{-te Zeile von } A^{-1}, \\ \text{und} \\ \text{die } q_k\text{-te Spalte von } A^{(n)} \text{ ist die } p_k\text{-te Spalte von } A^{-1}. \end{array} \right\} \quad (15)$$

Man wird zweckmässig nach dieser Regel zuerst die Zeilen umordnen und dann die Spalten entsprechend behandeln.

4. Summenkontrollen

Sei S eine $(m \times n)$ -Matrix mit der Eigenschaft, dass die Summe aller Elemente in jeder Zeile $+1$ beträgt, also

$$\sum_{j=1}^n S_{ij} = +1 \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (16)$$

Hierüber gilt:

Satz 4: Die Eigenschaft (16) ist invariant gegenüber der Transformation J ; das heisst mit S haben auch die daraus abgeleiteten Matrizen $S^{(1)}$, $S^{(2)}$ usw. diese Eigenschaft.

Beweis: (16) heisst, dass $\mathbf{x} = (1, 1, \dots, 1)$ den Bildvektor $\mathbf{y} = S\mathbf{x} = (1, 1, \dots, 1)$ besitzt, das heisst, für $x_j \equiv 1$ ist $y_i \equiv 1$. Nach Satz 2 ist also auch

$$S^{(k)}(1, 1, \dots, 1) = (1, 1, \dots, 1),$$

was zu beweisen war. Entsprechendes gilt für Matrizen S , deren Kolonnen-summen -1 sind, das heisst für Matrizen S mit der Eigenschaft

$$\sum_{i=1}^m S_{ij} = -1 \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (17)$$

Satz 5: Die Eigenschaft (17) ist invariant gegenüber der Transformation J .

Beweis: Die Eigenschaft (17) äussert sich darin, dass für einen beliebigen Vektor \mathbf{x} und sein Bild \mathbf{y} die Beziehung

$$\sum_{i=1}^n x_i + \sum_{j=1}^m y_j = 0$$

gilt.

Andererseits zieht die Gültigkeit dieser Beziehung für alle \mathbf{x} auch die Eigenschaft (17) nach sich. Es bleibt also nur noch zu zeigen, dass auch für die Vektoren $\mathbf{x}^{(1)}$ und $\mathbf{y}^{(1)}$ aus (4) dieselbe Beziehung gilt. Dies ist aber in der Tat der Fall, denn das Vektorpaar $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{y}^{(1)}$ hat bis auf zyklische Vertauschung dieselben Komponenten wie das Paar \mathbf{x} , \mathbf{y} , was zu beweisen war.

Aus diesen beiden Sätzen lassen sich verschiedene Rechenkontrollen für die praktische Durchführung der Matrizeninversion ableiten. Sie beruhen darauf, dass man der zu invertierenden Matrix noch eine weitere Spalte bzw. Zeile derart zufügt, dass eine Matrix mit der Eigenschaft (16) bzw. (17) entsteht und auf diese Matrix S n Transformationsschritte J anwendet. Es kann dann sowohl bei $S^{(n)}$ (das ist die mit einer Kontrollsummenspalte bzw. -zeile versehene Inverse) als auch bei allen Zwischenmatrizen $S^{(k)}$ die Eigenschaft (16) bzw. (17) geprüft werden.

5. Zur praktischen Durchführung der Matrizeninversion

Im numerischen Beispiel von Abschnitt 3 wurden der Einfachheit halber immer Einsen als Pivotelemente gewählt. Da aber durch die Pivotelemente dividiert werden muss, wählt man in der Praxis zweckmässig möglichst grosse

Elemente als Pivots. Das kann dadurch erreicht werden, dass man jeweils unter den als Pivots in Frage kommenden Elementen das absolut grösste auswählt. Dann verläuft die Inversion der Matrix aus Abschnitt 3 wie folgt:

$$A = \begin{vmatrix} 20 & 10 & 4 & 1 \\ 10 & 6 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A^{(1)} = \begin{vmatrix} 0,05 & -0,5 & -0,2 & -0,05 \\ 0,5 & 1 & 1 & 0,5 \\ 0,2 & 1 & \mathbf{1,2} & 0,8 \\ 0,05 & 0,5 & 0,8 & 0,95 \end{vmatrix}$$

$$A^{(2)} = \begin{vmatrix} 0,083333 & -0,333333 & -0,166667 & 0,083333 \\ 0,333333 & 0,166667 & 0,833333 & -0,166667 \\ -0,166667 & -0,833333 & 0,833333 & -0,666667 \\ -0,083334 & -0,166666 & 0,666667 & \mathbf{0,416666} \end{vmatrix}$$

$$A^{(3)} = \begin{vmatrix} 0,100000 & -0,300000 & -0,300000 & 0,199999 \\ 0,300000 & \mathbf{0,100000} & 1,100001 & -0,400001 \\ -0,300002 & -1,099999 & 1,900002 & -1,600003 \\ 0,200002 & 0,399999 & -1,600003 & 2,400003 \end{vmatrix}$$

$$A^{(4)} = \begin{vmatrix} 1,000000 & -3,000000 & 3,000003 & -1,000004 \\ -3,000000 & 10,000000 & -11,000010 & 4,000010 \\ 2,999995 & -10,999990 & 14,000002 & -6,000010 \\ -0,999995 & 3,999990 & -5,999996 & 4,000003 \end{vmatrix}$$

Da sämtliche Pivots in der Diagonalen liegen, ist P die Einheitsmatrix und $A^{(4)}$ bereits die gesuchte Inverse. Dieser Fall muss bei positiv definiten symmetrischen Matrizen immer eintreten, wenn man die Pivotelemente gemäss β) bestimmt.

Führt man die Inversion mit einer elektronischen Rechenmaschine durch, so wird man zweckmässig wie folgt vorgehen:

α) Zunächst fügt man eine Kontrollsummenzeile an, denn es ist unbedingt notwendig, Kontrollen in das Rechenprogramm einzubauen.

β) Als nächstes Pivotelement wählt man jeweils das absolut grösste der noch zur Verfügung stehenden Matrixelemente.

γ) Um das Absuchen der Matrix nach dem grössten Pivot zu erleichtern, werden die Pivotzeilen und -spalten dadurch gekennzeichnet, dass man ihre Elemente im Speicherwerk der Maschine mit einem besonderen Kennzeichen versieht (Q -Zeichen bei der ERMETH). Die Summenzeile wird schon beim Beginn markiert, da sie keine Pivots stellen darf.

δ) Die Transformationsformeln (5) werden zweckmässig in leicht variierte Form angewendet: Man bilde zunächst die Grössen

$$\left. \begin{aligned} b_j &= \begin{cases} -\frac{a_{pj}}{a_{pq}} & \text{für } j \neq q, \\ \frac{1}{a_{pq}} & \text{für } j = q, \end{cases} \\ c_i &= \begin{cases} a_{iq} & \text{für } i \neq p, \\ 1 & \text{für } i = p \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

und lösche dann die p -te Zeile und q -te Spalte der Matrix aus. Dann wird, wenn wir die Elemente der derart gelöschten Matrix mit a'_{ij} bezeichnen:

$$a_{ij}^{(1)} = a'_{ij} + c_i b_j \quad \text{für alle } i \text{ und } j. \quad (19)$$

Entsprechend werden die weiteren Transformationen $J_{p_v q_v}$ modifiziert. Auf diese Weise kann eine Vereinfachung des Programms und eine Beschleunigung der Berechnung erzielt werden.

ε) Nach jedem Transformationsschritt werden die Kolonnen- (Zeilen-) Summen kontrolliert.

η) Damit am Schluss die zur Ausführung der Zeilen- und Spaltenvertauschung notwendige Information zur Verfügung steht, speichert man nach jeder Transformation J_{pq} die Zahl p in der Zelle $N + q$ und die Zahl q in der Zelle $M + p$; die Zahlen in den Zellen $M + 1$ bis $M + n$ und $N + 1$ bis $N + n$ bestimmen dann die auszuführenden Vertauschungsoperationen (15) vollständig.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] T. BANACHIEWICZ, *Méthode de résolution numérique des équations linéaires, du calcul des déterminants et des inverses et de réduction de formes quadratiques*, Bull. internat. Acad. polon. Sci. [A] 1938, 393–404.
- [2] A. P. ERISOV, *Über eine Methode der Inversion von Matrizen (russisch)*, Doklady Akad. Nauk. SSSR. 100, 209–211 (1955).
- [3] JORDAN-EGGERT, *Handbuch der Vermessungslehre*, Bd. 1, § 35, 8. Aufl. (Verlag Metzler, Stuttgart 1935), 630 S.
- [4] G. W. PETRIE, III., *Matrix Inversion and Solution of Simultaneous Linear Algebraic Equations with the IBM 604 Electronic Calculating Punch*, NBS, AMS, 29, 107–111 (1953).
- [5] H. RUTISHAUSER, *Automatische Rechenplanfertigung bei programmgesteuerten Rechenmaschinen*, Z. angew. Math. Phys. 3, 312–313 (1952).
- [6] R. ZURMÜHL, *Zur numerischen Auflösung linearer Gleichungssysteme nach dem Matrizenverfahren von Banachiewicz*, Z. angew. Math. Mech. 29, 76–84 (1949).
- [7] R. ZURMÜHL, *Matrizen* (Springer-Verlag, Berlin, Göttingen und Heidelberg 1950), 427 S.

Summary

The so-called 'Gauss-Jordan' procedure for inverting matrices has been described in many papers and is well known. The present paper gives an unusual approach to this method insofar as the inverse is obtained by repeated application of a certain non-similarity transformation to the original matrix. Of course this transformation is related to the Gauss elimination process, but formally has rather the character of an exchange of components in two vector spaces.

(Eingegangen: 9. September 1958.)

Friction and Heat Transfer of Compressible Flow into an Infinite Lattice of Flat Plates

By SHAO L. SOO, Princeton, N. J., USA¹⁾

Introduction

The problem of friction and heat transfer of compressible flow into a lattice of turbine or compressor blades and flow into the plate-fin arrangement of a heat exchanger, particularly that of interrupted fin construction cannot, in general, be approximated by existing solutions of flow over a body in an infinite medium. The difference between the case of a grid of straight passages and a single semi-infinite flat plate is obvious: First, flow cannot proceed through this type of channel without pressure gradient. Second, the normal component (to the surface) of velocity must be zero at the center of each channel. Third, transition can occur in two ways in a channel, to develop into turbulent boundary layer or into Poiseuille type of flow.

In this analysis, an idealized system of an infinite lattice of flat plates of zero thickness was taken to represent the above applications. The solution presented in the following represents a generalization of the flat plate solutions developed by BLASIUS, CROCCO, CHAPMAN, and RUBESIN [1, 2, 3]²⁾. Consistent with applications of practical interest, two cases are considered in this study: *Case 1*: constant wall temperature (approximating the condition in a heat exchanger); *case 2*: adiabatic wall (approximating the condition of uncooled blade passages). Both cases involve uniform and steady velocity and temperature of the incoming stream. The method can be applied, however, to the case of steady arbitrary surface temperature distribution.

¹⁾ Department of Mechanical Engineering, Princeton University.

²⁾ Numbers in brackets refer to References, page 309.

Studies made to date on the subject of flow through channels are presented in [4, 5]. Reference [4] considers the entrance condition, but with prescribed velocity profiles, [5] deals with compressible fluid, but neglecting entrance effect and heat transfer. Other studies on thermal entrance region are listed in [6–10].

Notations

C	Constant defined by equation (11);
c_d	drag coefficient;
c_p	specific heat at constant pressure;
f_1, f_2, \dots	functions of velocity distribution;
G_0, G_1, \dots	functions of temperature distribution;
G_0^*	defined by equation (19);
h	enthalpy;
k	thermal conductivity;
K_1, K_2, \dots	constants defined by equation (16);
M	free stream Mach number;
M_1, M_2, \dots	constants defined by equation (18);
Nu_x	Nusselt number based on characteristic dimension x ;
p	pressure;
Pr	Prandtl number;
Q	heat transfer per unit width;
q	heat transfer per unit area;
R	gas constant;
r	recovery factor [3];
Re_s	Reynolds number based on gap s as characteristic dimension;
Re_x	Reynolds number based on x as characteristic dimension;
s	gap between plates;
T	static temperature, absolute;
T'	total temperature, absolute;
u	axial component of velocity;
v	normal component of velocity;
x	axial coordinate;
y	normal coordinate;
γ	ratio of specific heats;
η	transformed normal coordinate;
μ	viscosity;
ξ	transformed axial coordinate;
ρ	density;
τ	shear stress;
ψ	stream function;
φ	function defined by equation (A 20).

Subscripts

0	Refers to inlet free stream condition;
w	refers to condition at the wall;
1	refers to condition of the core.

Superscripts

⁺ , *	Dimensionless quantities as defined;
', ", ...	total derivatives with respect to η .

Basic Equations and Assumptions

The cases described in the introduction are depicted in Figure 1.

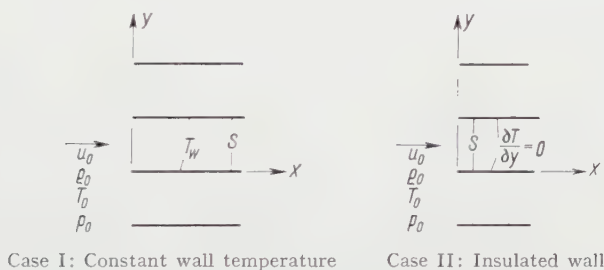


Figure 1

Diagrammatic representation of the flow system.

According to the classical laminar boundary layer theory with pressure gradient only in the direction of flow, the continuity equation, momentum equation, and energy equation of this flow system are:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} u + \frac{\partial \rho}{\partial y} v = 0, \quad (1)$$

$$\rho \left[u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] = - \frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (2)$$

$$\rho \left[u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right] - u \frac{dp}{dx} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k}{c_p} \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \right) - \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = 0. \quad (3)$$

The equation of state of fluid is given by

$$p = R \rho T. \quad (4)$$

The boundary conditions are: For both cases,

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) = 0 = u(x, s), \quad u(0, y) = u_0, \\ \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=s/2} = 0, \quad \int_0^s \varrho u \, dy = \varrho_0 u_0 s, \quad T(0, y) = T_0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=s/2} = 0; \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

and, for case I, constant wall temperature,

$$T(x, 0) = T_w = T(x, s), \quad (6)$$

for case II, adiabatic wall,

$$\frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0. \quad (7)$$

As long as a core exists, with velocity of core u_1 :

$$-\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dx} = u_1 \frac{du_1}{dx}. \quad (8)$$

For constant total enthalpy [11],

$$\varrho_1 \frac{d}{dx} (c_p T_1) = \frac{dp}{dx};$$

or

$$\frac{c_p}{R T_1} \cdot \frac{dT_1}{dx} = \frac{1}{p} \cdot \frac{dp}{dx}. \quad (9)$$

Further, for the isentropic core,

$$\frac{\varrho(x, y) T(x, y)}{p(x, y)} = \frac{\varrho_1(x) T_1(x)}{p(x)}. \quad (10)$$

It is assumed also that

$$c_p = \text{const} \quad \text{and} \quad \mu \varrho = C \mu_0 \varrho_0 \quad (11)$$

in general [3], and at the wall,

$$\frac{\mu_w}{\mu_0} = \frac{k_w}{k_0} = C_w \frac{T_w}{T_0}. \quad (12)$$

Solution of the Problem

The details of the solution based on Howarth transformation [12] and series expansion from the leading edge is given in the Appendix.

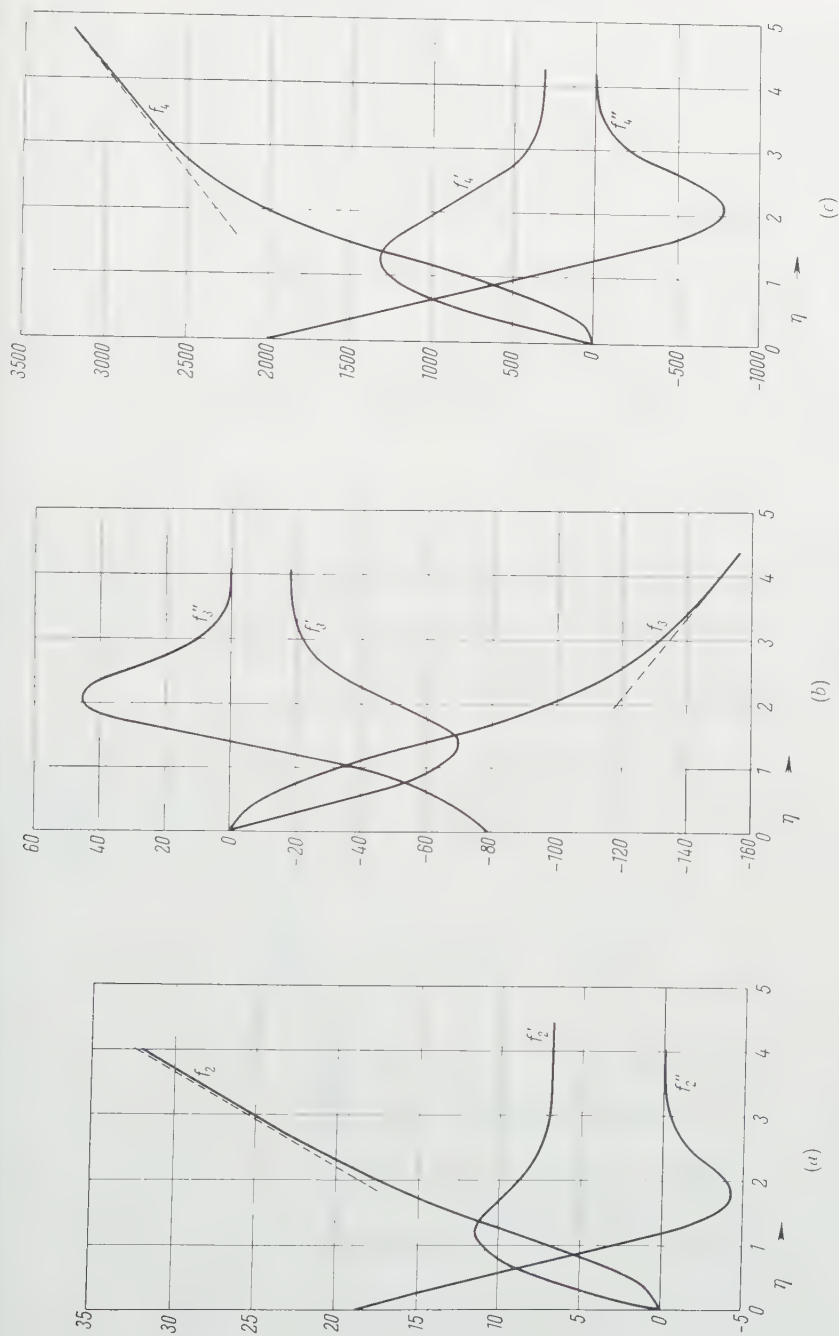


Figure 2
Solution of the momentum equation (a) f_2 , (b) f_3 , (c) f_4 .

For the coordinates x and y expressed in terms of

$$y = 2s\xi \int_0^\eta \frac{T^+(\eta) d\eta}{(T_1^+)^{\gamma/(\gamma-1)}} \Big|_\xi, \quad (13)$$

$$\xi = \sqrt{\frac{x \mu_0}{u_0 \varrho_0 s^2}} = \sqrt{\frac{x}{s Re_s}}, \quad (14)$$

and

$$T^+ = \frac{T}{T_0}, \quad T_1^+ = \frac{T_1}{T_0};$$

the velocity distribution is given by [1]

$$\frac{u}{u_0} = u^+ = \frac{1}{2} [f_1'(\eta) + \xi f_2'(\eta) + \xi^2 f_3'(\eta) + \xi^3 f_4'(\eta) + \dots]. \quad (15)$$

The velocity of the core is given by

$$\frac{u_1}{u_0} = u_1^+ = 1 + K_1 \xi + K_2 \xi^2 + K_3 \xi^3 + K_4 \xi^4 + \dots, \quad (16)$$

where the K 's are constants. These constants are determined to be $K_1 = 3.44156$, $K_2 = -8.951536$, $K_3 = 158.3782$, $K_4 = -1669.602$, by series expansion from $\eta = 0$ and asymptotic expansion from $\eta = \infty$. The function $f_1(\eta)$ is given in [1] and [3]. f_2 , f_3 , and f_4 are presented in Figure 2 respectively. In Figures 3 and 4, the velocity distribution for various ξ are presented.

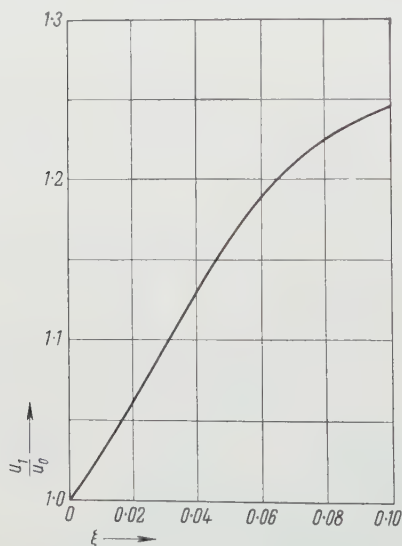


Figure 3

Velocity distribution in the core versus ξ .

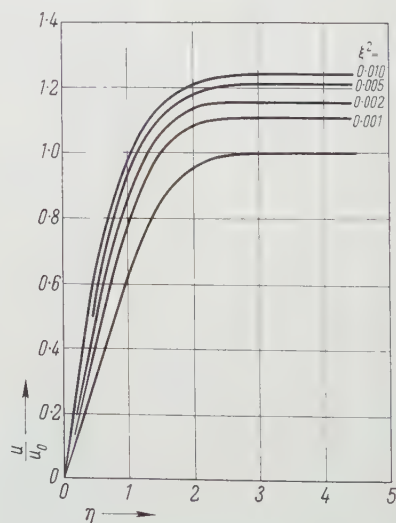


Figure 4

Velocity distribution normal to the plate at various ξ .

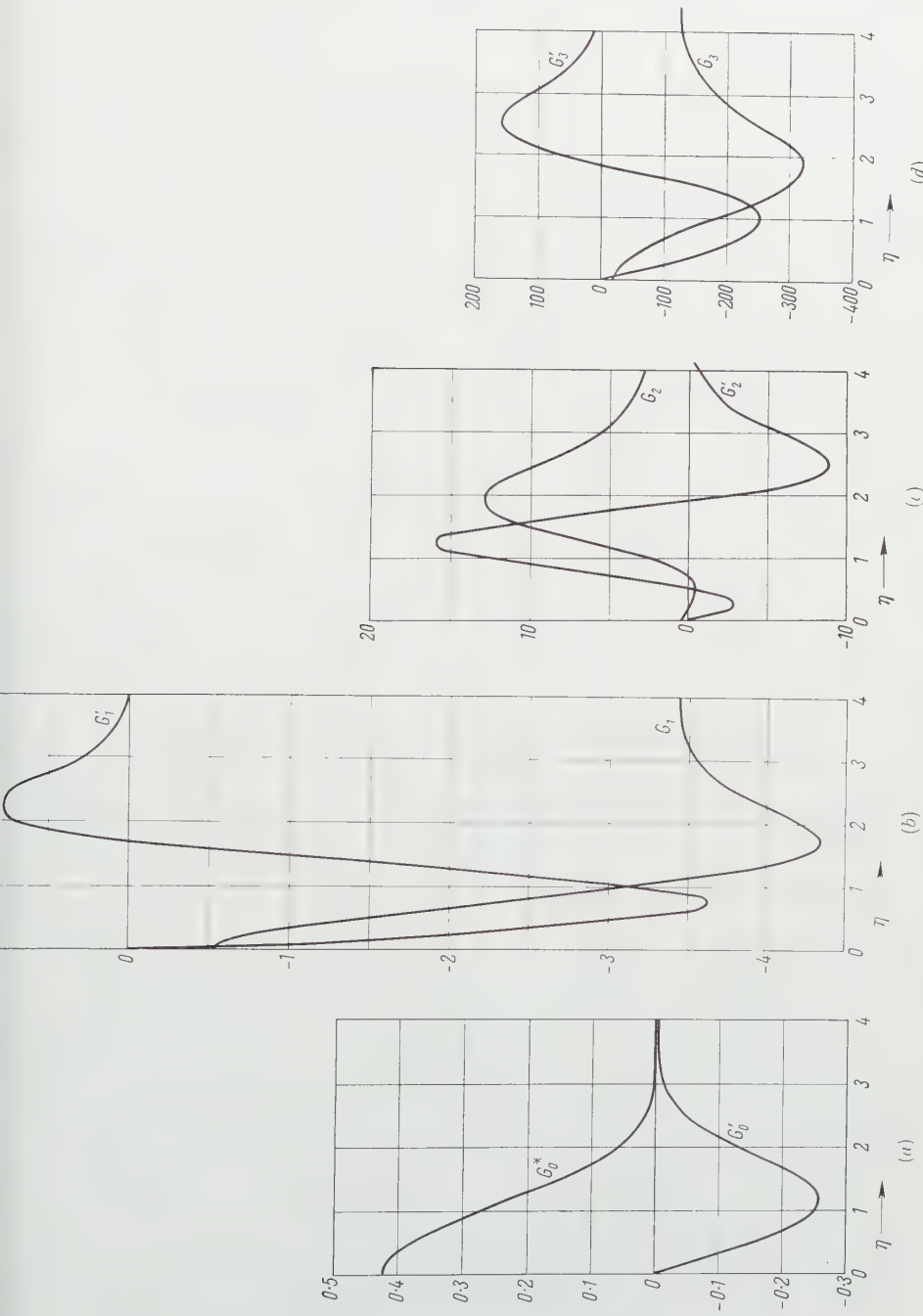


Figure 5
Solution of the energy equation for insulated plate (a) G_0^* , (b) G_1 , (c) G_2 , (d) G_3 , $Pr = 0.72$.

The temperature distribution is given by

$$\frac{T}{T_0} = T^+ = (\gamma - 1) M^2 [G_0(\eta) + \xi G_1(\eta) + \xi^2 G_2(\eta) + \xi^3 G_3(\eta) + \dots] \quad (17)$$

and

$$\frac{T_1}{T_0} = T_1^+ = 1 + M_1 \xi + M_2 \xi^2 + M_3 \xi^3 + \dots, \quad (18)$$

where M is the Mach number of the inlet stream and M_1, M_2 , etc. are constants dependent on K_1, K_2 , etc. in the above. Figure 6 gives the values of T_1/T_0 .

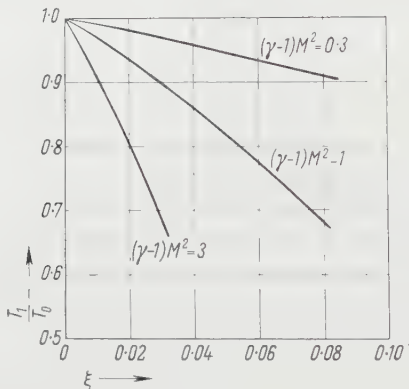


Figure 6

Temperature distribution in the core of various inlet Mach numbers M . $\gamma = 1.4$.

For the case of the insulated walls (case II) the functions $G(\eta)$'s are basically independent of T_0 and M particularly when G_0 is replaced by G_0^* according to

$$G_0^* = G_0 - \frac{1}{(\gamma - 1) M^2}. \quad (19)$$

For the case of the insulated walls, G_0^*, G_1, G_2 , etc. are given in Figure 5, for $k = 1.40$ and $Pr = 0.72$. G_0^* is identical to $2 r(\eta)$ of reference [3].

For the case of walls at constant temperature, the method presented in the Appendix is valid for any steady temperature distribution. The solution is dependent on both T_w/T_0 and M . The case of uniform wall temperature was calculated. Several combinations of $(\gamma - 1) M^2$ and T_w/T_0 were calculated. The choice of parameter was made for the convenience of logarithmic interpolation. (1) $T_w/T_0 = 0.3$, $(\gamma - 1) M^2 = 0.3$ (Figure 7), (2) $T_w/T_0 = 3$ and $(\gamma - 1) M^2 = 10$ (Figure 8), which show distinctly different trends. The temperature distribution in the latter case shows heat flow into the plate and the stream due to dissipation. Figure 9 shows the values of $G_n'(0)$ at various T_w/T_0 and $(\gamma - 1) M^2$. This set of data has to do with heat transfer from the

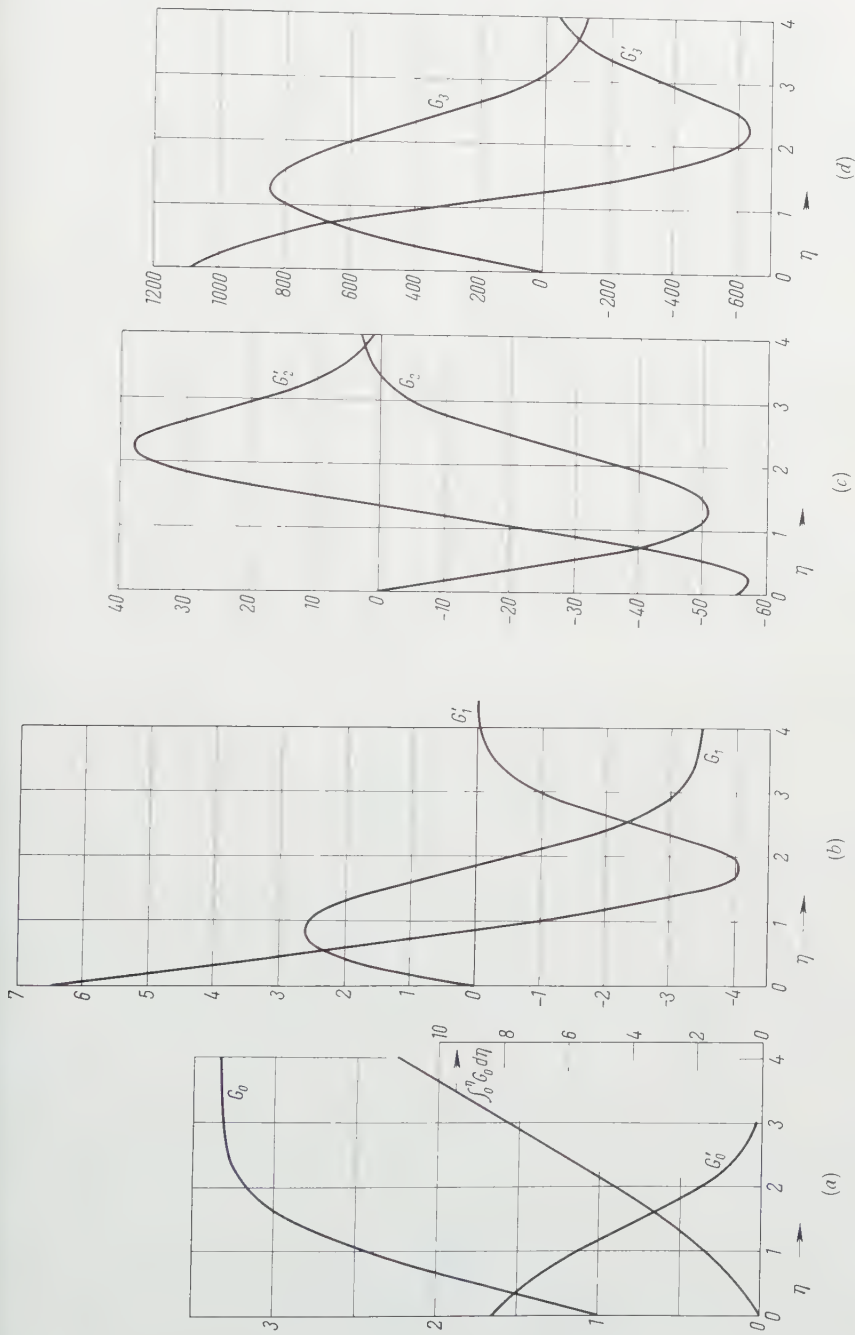


Figure 7
Solution of the energy equation for constant temperature plate $T_w/T_0 = 0.3$, $(\gamma - 1) M^2 = 0.3$, $Pr = 0.72$. (a) G_0 , (b) G_1 , (c) G_2 , (d) G_3 .

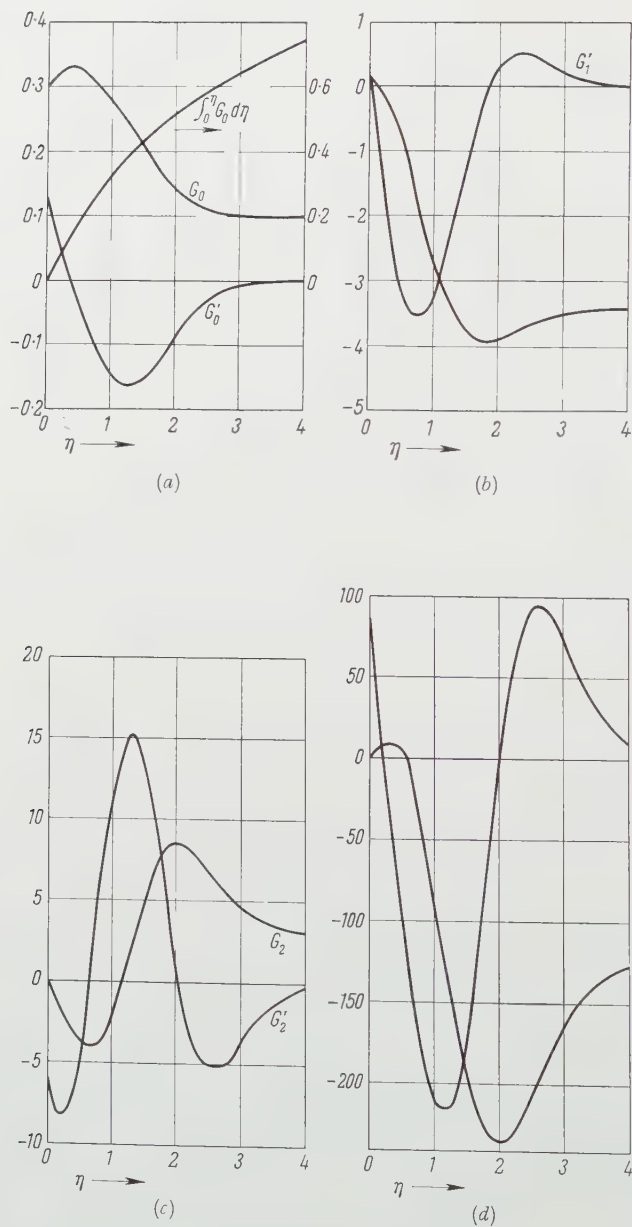


Figure 8

Solution of the energy equation for constant temperature plate
 $T_w/T_0 = 3$, $(\gamma - 1) M^2 = 10$, $Pr = 0.72$.

surface. Other cases will be presented and discussed in the following in terms of characteristics of friction and heat transfer.

From these results, the fluid friction and heat transfer of this system of flat plates can be determined.

All the numerical solutions of the ordinary differential equations were obtained with an IBM 704 digital computer.

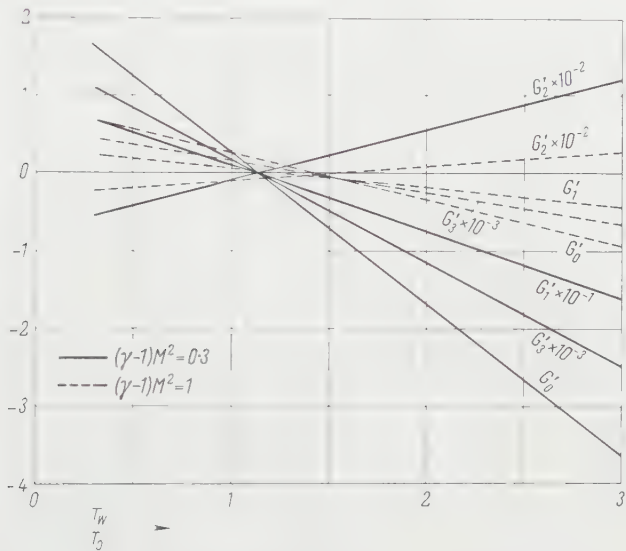


Figure 9

$G'_n(0)$ for constant temperature plate.

$G'(0) = 0$ at $T_w/T_0 = 1.15$ for $(\gamma-1) M^2 = 0.3$, $G'(0) = 0$ at $T_w/T_0 = 1.43$ for $(\gamma-1) M^2 = 1$.

Friction and Heat Transfer Characteristics

The shear stress at the wall is given by

$$\tau_w = \mu_w \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\mu_w u_0}{4 \sqrt{x^+}} Re_s^{1/2} \varrho^+ [f_1''(0) + \xi f_2''(0) + \xi^2 f_3''(0) + \cdots], \tag{20}$$

where

$$Re_s = \frac{u_0 \varrho_0 s}{\mu_0}.$$

The drag coefficient at x^+ is given by

$$c_d = \frac{\int_0^{x^+} \tau_w dx^+}{\frac{1}{2} \varrho_0 u_0^2 x^+}. \tag{21}$$

For constant surface temperature,

$$c_d = \sqrt{C_{f,x}} \left[f_1''(0) \left(\frac{x/s}{Re_s} \right)^{1/2} + \frac{1}{2} f_2''(0) \left(\frac{x/s}{Re_s} \right) + \frac{1}{3} f_3''(0) \left(\frac{x/s}{Re_s} \right)^{3/2} + \frac{1}{4} f_4''(0) \left(\frac{x/s}{Re_s} \right)^2 + \dots \right] \quad (22)$$

The friction factor calculated is shown in Figure 10, plotted is $Re_x (-x u_0 \rho_0 / \mu_0)$ for various values of Re_s together with the values for single flat plate ($Re_s \sim \infty$) given in [3] for comparison. It is shown that the value of Re_s affects the friction factor at the wall. At low Re_s , the friction factor is greater than that of a single flat plate.

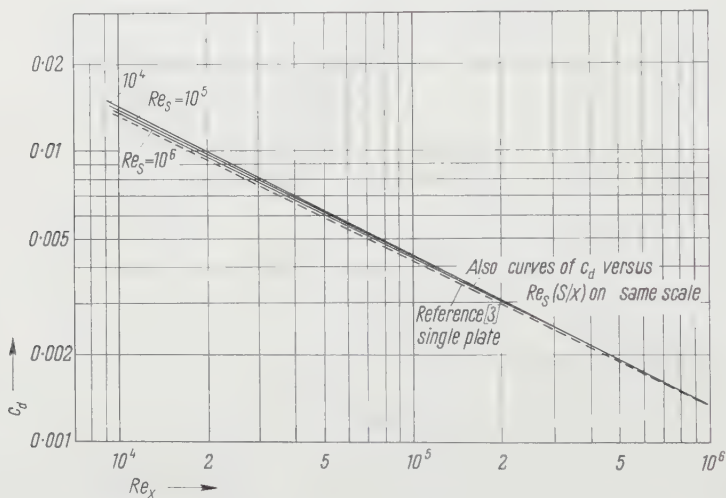


Figure 10

Friction drag at various Re_s as compared to that of a single plate.

Due to expansion of the fluid at the inlet to the plates, the temperature variation along the hypothetical insulated wall is of interest. The wall temperature can be evaluated from

$$\frac{T_w}{T_0} = 1 + (\gamma - 1) M^2 [G_0^*(0) + \xi G_1(0) + \xi^2 G_2(0) + \dots] \quad (23)$$

Of greater interest is the relation between the wall temperature and the stagnation temperature of the free stream, or

$$\frac{T_w}{T_0} = \frac{\frac{T_w}{T_0}}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \quad (24)$$

For various Mach numbers of the inlet, T_w/T_0' was calculated for various ξ and M as shown in Figure 11. This shows that besides the reduced recovery at high speeds, the decrease in wall temperature from the leading edge means lower leading edge temperature when thermal conductivity of a real wall is taken into account.

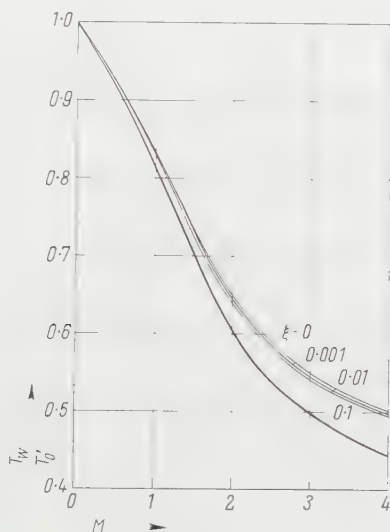


Figure 11

Temperature distribution along the wall of an insulated plate.

The rate of heat transfer by convection from the constant temperature wall can be determined at every point along the wall according to

$$\left. \begin{aligned} q &= -k_w \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = h_w (T_w - T_0') \\ &= -\frac{k_w T_0}{2s \sqrt{x^+}} Re_s^{1/2} \varrho^+ (\gamma - 1) M^2 [G_0'(0) + \xi G_1'(0) + \xi^2 G_2'(0) + \dots], \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

where

$$T_0' = T_0 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)$$

is the total temperature of the stream. The local Nusselt number at x is

$$\left. \begin{aligned} Nu_x = \frac{h_w x}{k_w} &= -\frac{C_w}{2\sqrt{C}} \sqrt{Re_x} \frac{(\gamma - 1) M^2 T_0}{(T_w - T_0')} \\ &\quad \times [G_0'(0) + \xi G_1'(0) + \xi^2 G_2'(0) + \dots]. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

From the leading edge to x , the total heat transfer rate can be calculated from for constant surface temperature:

$$Q = -\frac{k_0 T_0}{2} \sqrt{C} (\gamma - 1) M^2 \left[\xi G'_0(0) + \frac{\xi^2}{2} G'_1(0) + \frac{\xi^3}{3} G'_2(0) + \dots \right]. \quad (27)$$

The values of $G'_n(0)$ are given in Figure 9.

The ratio of heat transfer and skin friction is obtained by

$$\frac{q}{\tau} = -\frac{2 k_0 T_0}{u_0 \mu_0} \cdot \frac{(\gamma - 1) M^2 [G'_0(0) + \xi G'_1(0) + \dots]}{(f'_1(0) + \xi f'_2(0) \dots)}.$$

The ratio of total rate of heat transfer and the friction drag of length x of plate is given by

$$\frac{Q}{\tau x} = -\frac{k_0 T_0}{2} (\gamma - 1) M^2 \frac{\left[\xi G'_0(0) + \frac{\xi^2}{2} G'_1(0) + \dots \right]}{\xi \left[f'_1(0) + \frac{\xi^2}{2} f'_2(0) \dots \right]}.$$

The condition given in [3] applies only to the leading edge.

The Nusselt number over length L from the leading edge is:

$$Nu_L = \frac{h_w L}{k_w} = \frac{1}{C} \cdot \frac{T_w - 1}{T_0} \left[\frac{T_w}{T_0} - 1 - \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right] \cdot \sqrt{Re_L} \left[G'_0(0) + \frac{\xi}{2} G'_1(0) + \dots \right]. \quad (30)$$

The calculated values are plotted in Figure 12, also shown are data of single flat plate case given in [3] and [15] for comparison.

Discussion

From the above consideration, flow into a row of parallel flat plates may be visualized as flow over a single flat plate with prescribed pressure gradient as that in the core in the above. The variation of static pressure in the core in the direction of flow depends on the distance from the leading edge and the Reynolds number of the gap. As shown in Figure 6, the pressure drop seems to be large, however, this isentropic core exists only for short distance from the leading edge.

The presence of a core at increased velocity (Figure 3) from the leading edge results in higher friction drag (Figure 10) than in the case of a single flat plate. This increase is quite substantial for gap Reynolds number below 10^4 . At Re_x above 10^6 approximation with single flat plate condition would be quite adequate for most purposes.

The effect of acceleration of the core also shows up significantly in temperature distribution along insulated plates due to lowering of the temperature of the core (Figure 6). The temperature of the wall is highest at the leading edge (identical to the single plate case) but decreases toward downstream. This effect is more significant at higher inlet stream Mach numbers. In the case

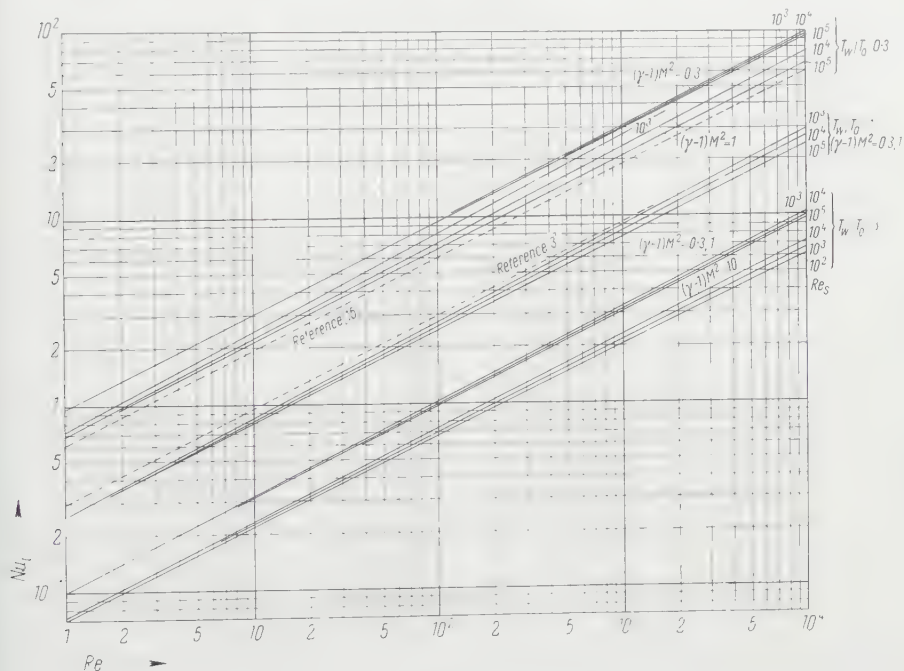


Figure 12

Nusselt number of inlet length L for $Pr = 0.72$, $\gamma = 1.40$, $C = 1$
 $(Re_L = L u_0 P_0 / \mu_0, Nu_L = h_w L / k_w)$.

of finite plate thickness this effect would be more significant. This means lower leading edge temperature than the present case when conductivity of the plate is considered.

For the case of steady wall temperature, when the fluid is heated by the wall, the effect of increased boundary layer thickness due to heating, is compensated by the presence of a core of lowered temperature, resulting in higher Nusselt number than the single plate case. When the fluid is cooled by the wall, the increased heat transfer rate due to reduced boundary layer thickness as in the single plate case, is rendered less favorable due to the core. However, the latter modification is not one-sided because of reduced boundary layer thickness when the gap is finite (Figure 12).

Figure 9 also shows that zero heat transfer in the constant wall temperature case occurs at $T_w = T'_0$ nearly for subsonic flow only. At higher speeds, the direction of heat flow is affected by the signs of different orders of G'_n .

The high Mach number cases considered in this study are pure idealizations, since flow discontinuity is neglected here.

The condition of whether flow separation or convergence to Poiseuille flow would occur cannot be obtained from the proposed solution. It can be said, however, the flow will converge to Poiseuille motion for Re_s below critical [1] value. In the present case, however, the critical Reynolds number is affected by the rate of boundary layer growth or the temperature distribution. The critical Reynolds number will be higher for the case of a cold wall, but lower for the insulated wall, and still lower for the case in which the stream is heated by the wall.

Appendix

Solutions of Equations

Introducing the stream function ψ , such that (12)

$$\varrho u = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_x, \quad \varrho v = - \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_y, \quad (\text{A1})$$

which satisfy the continuity equation, and change the independent variables to ψ and x , the momentum and energy equations [equations (2) and (3)] become:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{d\bar{p}}{dx} + u \frac{\partial}{\partial \psi} \left[\mu \varrho u \frac{\partial u}{\partial \psi} \right], \quad (\text{A2})$$

$$u \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{u}{\varrho} \cdot \frac{d\bar{p}}{dx} - \frac{1}{Pr} u \frac{\partial h}{\partial \psi} \left[\mu \varrho u \frac{\partial h}{\partial \psi} \right] - \mu \varrho u^2 \left(\frac{\partial u}{\partial \psi} \right)^2 = 0. \quad (\text{A3})$$

Further, reducing these equations to the non-dimensional form by introducing

$$\left. \begin{aligned} x^+ &= \frac{x}{s}, & y^+ &= \frac{y}{s}; \\ \psi^+ &= \frac{\psi}{\varrho_0 \mu_0 s u_0 C}, & \psi_s^+ &= \frac{\varrho_0 u_0 s}{\varrho_0 \mu_0 s u_0 C}; \\ u^+ &= \frac{u}{u_0}, & \varrho^+ &= \frac{\varrho}{\varrho_0}, & p^+ &= \frac{p}{p_0}, & T^+ &= \frac{T}{T_0}; \end{aligned} \right\} \quad (\text{A4})$$

equations (A2) and (A3) are reduced to

$$u^+ \frac{\partial u^+}{\partial x^+} = u_1^+ \frac{du_1^+}{dx^+} + u^+ \frac{\partial}{\partial \psi^+} u^+ \frac{\partial u^+}{\partial \psi^+}, \quad (\text{A5})$$

$$u^+ \frac{\partial T^+}{\partial x^+} + \frac{u_0^2}{c_p T_0} u^+ u_1^+ \frac{du_1^+}{dx^+} - \frac{1}{Pr} u^+ \frac{\partial}{\partial \psi^+} u^+ \frac{\partial T^+}{\partial \psi^+} - \frac{u_0^2}{c_p T_0} u^{+2} \left(\frac{\partial u^+}{\partial \psi^+} \right)^2 = 0. \quad (\text{A6})$$

For the sake of convenience in the solution, substitute into equation (A5)

$$\psi^* = \frac{\psi^+}{\psi_s^+}, \quad x^* = \frac{x^+}{\psi_s^{+2}}. \quad (\text{A7})$$

x^+ and ψ^+ are simply replaced by x^* and ψ^* . The momentum equation can be solved independently first of all.

$$u^+ \frac{\partial u^+}{\partial x^*} = u_1^+ \frac{\partial u_1^+}{\partial x^*} + u^+ \frac{\partial}{\partial x^*} u^+ \frac{\partial u^+}{\partial x^*} \quad (\text{A8})$$

with the boundary conditions

$$u^+(0, x^*) = 1, \quad u^+(x^*, 0) = u^+(x^*, 1) = 0, \quad \left[\frac{\partial u^+}{\partial x^*} \right]_{x^* = 1/2} = 0. \quad (\text{A9})$$

The momentum equation and the boundary conditions can be satisfied by a solution of the form given by equation (14) and velocity of the core given by equation (15), with $\xi = 1/x^*$, and η is defined by [1]

$$\psi^* = \xi f_1(\eta) + \xi^2 f_2(\eta) + \xi^4 f_4(\eta) + \dots \quad (\text{A10})$$

The boundary conditions as applied to functions f_n are ($\xi = 0, \eta = \infty$):

$$\left. \begin{aligned} x = 0, \quad \eta = 0, \quad f_1(0) = f_2(0) = f_3(0) = \dots = 0, \\ f'_1(0) = f'_2(0) = f'_3(0) = \dots = 0, \\ \eta = \infty, \quad f_1(\infty) = 2, \quad f_2(\infty) = 2 K_1, \quad f'_3(\infty) = 2 K_2, \quad f'_4(\infty) = 2 K_3 \dots \end{aligned} \right\} \quad (\text{A11})$$

For large η

$$f_1 \sim 2 \eta + A_1, \quad f_2 \sim 2 K_1 \eta + A_2, \quad f_3 \sim 2 K_2 \eta + A_3, \dots \quad (\text{A12})$$

at $x^* = 1/2, \eta = 1/4 \xi$, and

$$\frac{1}{2} = \xi \left[\frac{1}{2 \xi} + A_1 \right] + \xi^2 \left[\frac{K_1}{2 \xi} + A_2 \right] + \xi^3 \left[\frac{K_3}{2 \xi} + A_3 \right] + \dots \quad (\text{A13})$$

Hence

$$-2 A_1 = K_1, \quad -2 A_2 = K_2, \dots \quad (\text{A14})$$

The functions f_1, f_2 etc. are governed by

$$f_1''' + f_1 f_1'' = 0, \quad (\text{A15})$$

$$f_2''' + f_1 f_2'' - f_1' f_2' + 2 f_1'' f_2 = -4 K_1, \quad (\text{A16})$$

$$f_3''' + f_1 f_3'' - 2 f_1' f_3' + 3 f_1'' f_3 = -8 K_2 - 4 K_1^2 + f_1'^2 - 2 f_2 f_2'', \quad (\text{A17})$$

$$f_4''' + f_1 f_4'' - 3 f_1' f_4' + 4 f_1'' f_4 = -12 K_3 - 12 K_1 K_2 + 3 f_2 f_3' - 3 f_2' f_3 - 2 f_2 f_3''. \quad (\text{A18})$$

Equation (A15) of f_1 is none other than the classical Blasius equation, whose solution by piecing up series expansion from $\eta = 0$ and asymptotic expansion from $\eta = \infty$ is known, and is given in [1].

Functions f_2, f_3 , etc. can be determined in similar manners, as depicted in Figure 3 as have been presented in the text of this paper.

The condition that

$$\frac{\partial u}{\partial y} \bigg|_{y=0} = 0$$

is satisfied, since

$$\frac{\partial u}{\partial y} \bigg|_{y=0} = \frac{\partial u}{\partial x} \bigg|_{x=0} = \frac{q}{q_0} \frac{u_0^2}{s} \cdot \frac{\partial u^+}{\partial \eta} \bigg|_{\eta=0} \sim \frac{1}{2 \xi} = 0.$$

With substitution of equation (A7) η and ξ into the energy equation (A6),

$$\frac{1}{Pr} \left[\frac{\partial^2 T^+}{\partial \eta^2} + \varphi \frac{\partial T^+}{\partial \eta} - (2 \xi u^+) \frac{\partial T^*}{\partial \xi} = \frac{u_0^2}{c_p T_0} (2 \xi u^+) u_1^+ \frac{\partial u_1^+}{\partial \xi} - \frac{u_0^2}{c_p T_0} \left(\frac{\partial u^+}{\partial \eta} \right)^2 \right] \\ = - (2 \xi u^+) \frac{dT_1^+}{d\xi} - \frac{u_0^2}{c_p T_0} \left(\frac{\partial u^+}{\partial \eta} \right)^2, \quad (A20)$$

where

$$\varphi = f_1 + 2 \xi f_2 + 3 \xi^2 f_3 + 4 \xi^3 f_4 + \dots \quad (A20)$$

The boundary conditions are:

$$\left. \begin{aligned} \xi = 0, \quad \eta = \infty, \quad T^+ = 1, \\ \text{case I:} \quad \eta = 0, \quad T^+ = \frac{T_w}{T_0}, \\ \text{case II:} \quad \eta = 0, \quad \frac{\partial T^+}{\partial \eta} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (A21)$$

The energy equation and the boundary conditions can be satisfied by solution of the type given by equations (16) and (17). Since [equations (9) and (10)]

$$\left. \begin{aligned} \frac{dT_1^+}{d\xi} &= - \frac{u_0^2}{c_p T_0} u_1^+ \frac{du_1^+}{d\xi} = - (\gamma - 1) M^2 u_1^+ \frac{du_1^+}{d\xi}, \\ M_1 &= -K_1 \frac{u_0^2}{c_p T_0} = - (\gamma - 1) M^2 K_1, \\ M_2 &= - (K_1^2 + 2 K_2) \frac{u_0^2}{c_p T_0} = \frac{1}{2} (\gamma - 1) M^2 (2 K_2 + K_1^2), \\ M_3 &= - (\gamma - 1) M^2 (K_3 + K_1 K_2), \\ M_4 &= \frac{(\gamma - 1)}{2} M^2 (2 K_4 + 2 K_1 K_3 + K_2^2). \end{aligned} \right\} \quad (A22)$$

The functions G_n have the following boundary conditions

$$G_0(\infty) = \frac{1}{\gamma - 1} M^2, \quad G_1(\infty) = -K_2, \quad G_2(\infty) = -\frac{1}{2} (2 K_2 + K_1^2), \\ G_3(\infty) = - (K_3 + K_1 K_2), \dots;$$

together with for

$$\text{case I:} \quad G_0(0) = \frac{T_w/T_0}{(\gamma - 1) M^2}, \quad G_1(0) = G_2(0) = \dots = 0, \\ \text{case II:} \quad G'_0(0) = G'_1(0) = G'_3(0) = \dots = 0.$$

For different orders of ξ , the function G_n can be determined from:

$$\frac{1}{Pr} G''_0 + f_1 G'_0 = - \frac{1}{4} (f'_1)^2, \quad (A23)$$

$$\frac{1}{Pr} G''_1 + f_1 G'_1 - f'_1 G_1 = -2 f_2 G_0 + K_2 f'_1 - \frac{1}{2} f''_1 f'_2, \quad (A24)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{Pr} G_2'' + f_1 G_2' - 2 f_1' G_2 = -2 f_2 G_1' - 3 f_3 G_0' + f_2' G_1 \\ + (2 K_2 + K_1^2) f_1' + K_2 f_2' - \frac{1}{4} (f_0'^2 + 2 f_1' f_0'') \end{aligned} \right\} \quad (\text{A25})$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{Pr} G_3'' - f_1 G_3' - 3 f_1' G_3 - 2 f_2 G_2' - 3 f_3 G_2 - 4 f_4 G_0 - 2 f_2' G_2 - f_3' G_1 - K_2 f_3 \\ + (2 K_2 + K_1^2) f_2' + 3 (K_3 + K_1 K_2) f_1' - \frac{1}{2} (f_1' f_4' + f_2' f_3'') \end{aligned} \right\} \quad (\text{A26})$$

Equations (A15) to (A18) and (A23) to (A26) were solved numerically on an IBM 704 digital computer. The intermediate steps as given in [3] or [13] and [14] were shown to be valid but unnecessary.

The physical velocity and temperature profiles were obtained by

$$y = \int_0^{\xi} \frac{d\lambda}{q''} = \int_0^{\xi} \frac{d\lambda}{q''} \quad ; \quad 2 \kappa \xi \int_0^{\eta} \frac{d\eta}{q''}.$$

Since p is a function of x alone

$$q^+ = \frac{p^+(\xi)}{T^+} = \frac{[T_1^+]^{(\gamma-1)/\gamma}}{T^+},$$

leading to equation (13).

Acknowledgement

This study was supported by the Higgins Fund for Engineering Research, Princeton University. Appreciation is also extended to Mr. ROBERT H. GOERSS, Senior Engineer in Charge of Digital Computers, for his suggestions on the numerical solution.

REFERENCES

- [1] S. GOLDSTEIN, *Modern Developments in Fluid Mechanics*, vol. I (Oxford Press 1952), pp. 304–309.
- [2] L. GROCCO, *Lo Strato Limite Laminare nei Gas*, Monogr. sci. Aeron., Roma 3, (1946).
- [3] D. R. CHAPMAN and M. W. RUBESIN, *Temperature and Velocity Profiles in the Compressible Laminar Boundary Layer with Arbitrary Distribution of Surface Temperature*, J. aeron. Sci. 16 (9), 547–561 (1949).
- [4] H. F. POPPENDIEK, *Forced Convection Heat Transfer in Thermal Entrance Regions*, A. E. C. Report ORNL-913, 914, 915 (Oak Ridge National Laboratory, March 20, 1951).
- [5] S. K. GRINNELL, *Flow of a Compressible Fluid in a Thin Passage*, Trans. A.S.M.E. 78 (4), 765–772 (1956).
- [6] P. J. SCHNEIDER, *Effect of Axial Fluid Conduction on Heat Transfer in the Entrance Region of Parallel Plates and Tubes* (Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute, 1956), pp. 47–57.
- [7] J. A. PRINS, J. MULDER and J. SCHENK, *Heat Transfer in Laminar Flow between Parallel Plates*, Appl. Sci. Res. [A] 7, 431 (1951).
- [8] J. SCHENK and H. L. BECKERS, *Heat Transfer in Laminar Flow between Parallel Plates*, Appl. Sci. Res. [A] 4, 405–413 (1954).

- 9] J. A. W. VAN DER DOES DE BYE and J. SCHENK, *Heat Transfer in Laminar Flow between Parallel Plates*, Appl. Sci. Res. [A] 3, 308–316 (1953).
- 10] S. C. R. DENNIS and G. POOTS, *An Approximate Treatment of Forced Heat Convection in Laminar Flow between Parallel Plates*, Appl. Sci. Res. [A] 5, 453 (1956).
- 11] T. Y. LI and H. T. NAGAMATSU, *Similar Solutions of Compressible Boundary Layer Equations* (Hypersonic Wind Tunnel Memo No. 22, Cal. Inst. of Tech. Sept. 10, 1954).
- 12] L. HOWARTH, *On the Solution of Laminar Boundary Layer Equations*, Proc. Roy. Soc. 164, 547 (1938).
- 13] K. MILLSAPS and K. POHLHAUSEN, *Heat Transfer by Laminar Flow from a Rotating Plate*, J. aeron. Sci. 19 (2), 120–126 (1952).
- 14] J. B. SCARBOROUGH, *Numerical Mathematical Analysis* (The John Hopkins Press, 1950).
- 15] M. JAKOB, *Heat Transfer*, vol. 1, sec. 22. 4 (John Wiley, 1949).

Zusammenfassung

Es wird eine Analyse vorgelegt, die erlauben soll, die Bestimmung der Reibungs- und Wärmeübergangs-Kenngrössen einer kompressiblen, laminaren Strömung in einem unendlich grossen Gitter flacher Platten vorzunehmen.

Die Ergebnisse weichen für niedrige Reynoldssche Zahlen bedeutend von jenen einer einzelnen flachen Platte ab. Die Rechnungen führen zu vergrössertem Reibungswiderstand, verminderter Rückbildung und für den Fall, dass die Flüssigkeit die Wand erwärmt bzw. abkühlt, zu vergrösserter bzw. verkleinerter Nusselt-Zahl.

(Received: October 20, 1958.)

Kurze Mitteilungen – Brief Reports – Communications brèves

Zur Bestimmung von Ultraspuren von Silberjodid in Regenwasser

Von OTTO GÜBELI, Zürich¹⁾

Silberjodid (AgI) bildet ein sehr schwer lösliches Salz von gelblicher Farbe. Das klassische Löslichkeitsprodukt bei 25°C beträgt $1,5 \cdot 10^{-16} \text{ Mol}^2/\text{l}^2$. Durch Belichtung färbt es sich allmählich grauschwarz.

Die durch Fällung aus wässriger Lösung bei Zimmertemperatur mit einem Überschuss an Ag^+ -Ionen erhaltene Modifikation bezeichnet man als α -AgI. Sie ist bei Zimmertemperatur beständig, ist kubisch, Zinkblendegitter mit $a_W = 6,48 \text{ \AA}$.

Bei 137°C wandelt sich die Zimmertemperatur-Modifikation in β -AgI um. Sie kristallisiert hexagonal, Wurtzitgitter $a = 4,59 \text{ \AA}$, $c = 7,52 \text{ \AA}$. Man erhält diese Modifikation nicht nur beim Erwärmen, sondern auch bei der Fällung von Ag^+ -Ionen mit einem Überschuss an I^- bei Zimmertemperatur. Sie ist jedoch nicht stabil und zerfällt schon beim Zerreiben des Niederschlages in α -AgI.

¹⁾ Anorganisch-chemisches Institut der ETH.

Oberhalb 146°C ist die Modifikation von γ -AgI beständig. Sie weist ein kubisches Gitter mit statistischer Verteilung der Ag^+ -Ionen auf. Die I^- -Ionen besetzen die Ecken und das Zentrum der Elementarzelle $a_W = 5,03 \text{ \AA}$. Die Silberionen wurden vollkommen ungeordnet auf 42 Gitterlücken verteilt gefunden. Der Schmelzpunkt von AgI liegt bei 552°C.

Die *Komplexbildung der Silberionen* ist sehr ausgeprägt. In einer wässrigen Suspension von Silberchlorid sind noch merkbare Mengen an Ag^+ -Ionen vorhanden, die beim Bromid und schliesslich beim Jodid beträchtlich abnehmen. Die Werte der klassischen Löslichkeitsprodukte sind bei 25°C für AgCl $1,56 \cdot 10^{-10}$ und für AgBr $7,7 \cdot 10^{-13} \text{ Mol}^2/\text{l}^2$. Fügt man zum Silberchloridniederschlag Ammoniak, so entsteht das Gleichgewicht mit den vorhandenen Ionen



Sind genügend Silberionen vorhanden, so reagieren diese zum bedeutend stabileren Ammoniakkomplex. Silberbromid geht bereits schlechter in Lösung und das Jodid, weil zu wenig Ag^+ -Ionen vorhanden sind, nicht mehr. Lässt man jedoch auf das AgI einen stärkeren Komplexbildner, zum Beispiel Cyanid, einwirken, so gelingt die Auflösung des Niederschlages erneut. Die Komplexbkonstanten dieser Gebilde sind, für Ammoniak



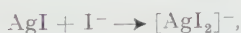
$$K = \frac{[\text{Ag}^+][\text{NH}_3]^2}{[\text{Ag}(\text{NH}_3)_2^+]} = 6,3 \cdot 10^{-8},$$

und für Cyanid



$$K = \frac{[\text{Ag}^+][\text{CN}^-]^2}{[\text{Ag}(\text{CN})_2^-]} = 9,5 \cdot 10^{-22}.$$

Eine ganz erhebliche Komplexbildung tritt bereits bei folgendem Salzpaar in Erscheinung:



wobei nicht nur die erste Stufe, sondern auch höhere Komplexe, wie $[\text{AgI}_3]^{2-}$, auftreten. Beim Verdünnen mit Wasser zersetzen sich gewöhnlich diese Komplexe, so dass AgI ausfällt.

Die Silberionen zeichnen sich dadurch aus, dass ihre *Reduktion* zum Metall besonders leicht möglich ist. Die Reaktionswiderstände sind sehr gering, wenn das erforderliche Reduktionspotential erreicht ist. Das Normalpotential beträgt 0,80 V bei 25°C. Man führt dies teilweise auf die geringfügige Hydratation des Silberions zurück. Auch die elektrochemische Potentialeinstellung ist sehr gut.

Durch *Schmelzen* der Silberhalogenide mit einem Überschuss an Natriumkarbonat erhält man das Metall.



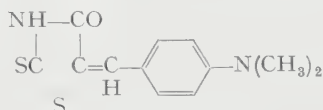
Auf unserem Wege kann man schon in der Kälte, rascher beim Erwärmen mit Eisensulfat reduzieren. Ferner wird aus gewöhnlichen und komplexen Silberlösungen in saurem Medium mit metallischem Zink das Silber abgeschieden:



Die Sammlung des Regenwassers hatte auf diese Verhältnisse Rücksicht zu nehmen. Es wurde an geeigneten Sammelstellen in Proben von 50 l in Glasballons gefüllt und im Laboratorium mit Hilfe eines Dünnschichten-Schnellverdampfers aus Glas eingedampft.

Ein Unterdruck einer Wasserstrahlpumpe genügt, um mit Dampfheizung 50 l Wasser in 8 Stunden auf ein kleines Volumen einzuengen, das mit der Waschflüssigkeit 500 ml ausmacht. Diese Menge wurde in offenen Porzellangefässen und schliesslich im Porzellantiegel offen zur Trockene verdampft. Durch vorsichtiges Schmelzen mit Na_2CO_3 und gleichzeitige Verbrennung organischer Substanzen wurde reduziert. Nach Extraktion mit Wasser und Filtration konnten gefälltes, metallisches Silber und lösliches Jodid getrennt werden.

Ein *quantitativer Silbernachweis* von hoher Empfindlichkeit und guter Spezifität ist in der Reaktion mit *p*-Dimethylaminobenzilidenrhodanin bekannt. In der Formel



ersetzt das Silberion den Wasserstoff der zyklischen Imingruppe unter Bildung sehr schwer löslicher, gefärbter Silbersalze. Das Reagens ist nur in saurem Medium brauchbar. Gleichzeitig reagieren noch Quecksilber-, Gold-, Platin-, Palladium- und Kupfer-1-ionen.

Zur Ausführung der Mikrobestimmung wird Filterpapier mit einer gesättigten Lösung des Reagens in Azeton getränkt. Das Papier lässt man trocknen und bringt einen Tropfen der schwach salpetersauren, gepufferten Silberlösung darauf. Mit sehr niedrigen Silbergehalten entstehen auf dem gelbbraun gefärbten Papier violettrote Flecken. Die Erfassungsgrenze liegt bei $0,02 \mu\text{g}$ Silber in $0,2\text{-n}$ Salpetersäure; die Grenzkonzentration beträgt $1:2\,500\,000$, Verwendung von $0,05 \text{ ml}$ Lösung.

Aus grösseren Flüssigkeitsmengen wurde der Nachweis so ausgeführt, dass das Reagens zur sauren Silberlösung gegeben wurde. Nun überschichtete man mit Äther und schüttelte durch. Das überschüssige Reagens ging in die überstehende Ätherphase. An der Grenzschicht Äther-Wasser bildete sich eine violette Haut. Die Erfassungsgrenze betrug $1 \mu\text{g}$ Silber in einer Grenzkonzentration von $1:5\,000\,000$, wobei 5 ml Lösung verwendet wurden.

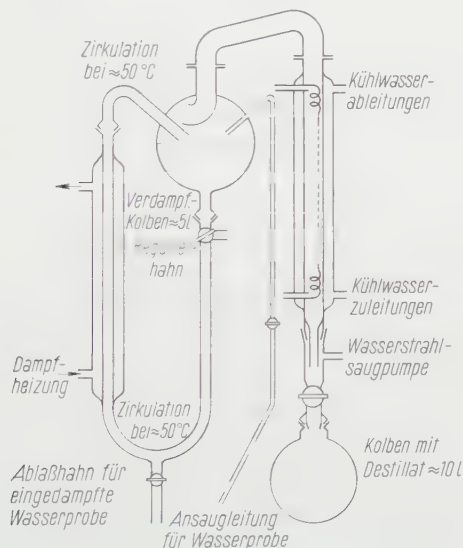
Zum Nachweis neben störenden Fremdionen sind folgende Möglichkeiten gegeben:

Neben Quecksilber und Edelmetallen wird die Probelösung mit 5prozentigem Kaliumcyanid versetzt und nun mit 2-n Salpetersäure schwach angesäuert. Die Cyanide des Quecksilbers und der Edelmetalle dissoziieren so wenig, dass nur noch das Silberion mit dem Benzilidenrhodanin reagiert. Die Empfindlichkeit hat eingebüsst, so dass die Erfassungsgrenze bei $0,5 \mu\text{g}$ Silber mit der Grenzkonzentration $1:100\,000$ liegt.

Neben Quecksilber- und Kupfer-1-Salzen führt die Maskierung mit Cyanid nicht zum Ziel. Man kann mit Salzsäure und Ammonchlorid versetzen, wobei die Chloride gebildet werden und das Silber dank der Stabilität des Benzilidenrhodanins trotzdem reagiert. Die Empfindlichkeit hat nochmals abgenommen. Die Erfassungsgrenze liegt bei $0,65 \mu\text{g}$ Silber mit einer Grenzkonzentration von $1:80\,000$.

Grösseren Schwierigkeiten begegnet der *quantitative Spurennachweis von Jodid* im aufgearbeiteten sodaalkalischen Filtrat. Zunächst wird das Filtrat eingeeengt, Jodid nach schwachem Ansäuern mit Salzsäure unter Zugabe von etwa 5 g

Eisen-3-chlorid oxydiert und in einem Destillierkolben bei 90°C im Stickstoffstrom in eine Vorlage mit etwa 5 ml Tetrachlorkohlenstoff abdestilliert. Jodmengen in der Grössenordnung von 10^{-4} g färben den Tetrachlorkohlenstoff deutlich violett. Für Spuren in der Gegend von μg muss der Tetrachlorkohlenstoff mit 10 ml Wasser und etwa 0,5 g elektrolytisch dargestelltem, feinverteiltem Cadmium geschüttelt werden. Dabei geht das zu Jodid reduzierte Jod in die wässrige Phase über. Aus der wässrigen Lösung wird erneut nach dem Ansäuern mit Salzsäure mit Eisen-3-chlorid oxydiert. Als Reagens verwendet man mit Fluoreszeinnatrium getränkte



Dünnschicht-Schnellverdampfer aus Glas für Regenwasser.

Papierstreifen. Beim Erwärmen der jodidhaltigen Probe entsteht auf dem darübergelegten gelbgrün gefärbten Papierstreifen je nach Menge ein oranger bis roter Fleck. Durch Eichung mit bekannten Gehalten lässt sich die Menge halbquantitativ ermitteln.

Das geschilderte Verfahren für den AgI-Spurenachweis ist im Auftrage der Eidgenössischen Kommission zum Studium der Hagelbildung und der Hagelabwehr entwickelt worden. Es führte an zwei ausgewählten Tagen des Versuchsjahres 1954 bzw. an einem Tag des Versuchsjahres 1956, an denen im Grossversuch II zur Bekämpfung des Hagels in der Magadinoebene die Atmosphäre vermittelt AgI-Bodengeneratoren geimpft wurde, zum Nachweis des Impfstoffes im Regenwasser, wobei die Niederschlagsproben von je 50 l jeweils an einer (Gordola) bzw. drei Stellen (Gordola, San Antonino und Taverne) des Versuchsgebietes gesammelt worden sind²⁾. Bei Probenentnahmen an ungeimpften Tagen (total 2 Blindprobenanalysen) konnten keinerlei Spuren von AgI festgestellt werden.

²⁾ Tätigkeitsbericht Nr. 7, Versuchsjahr 1954, bzw. Nr. 9, Versuchsjahr 1956 des Grossversuches II zur Bekämpfung des Hagels in der Magadinoebene, herausgegeben von der Abteilung für Landwirtschaft des EVD; S. 38 bzw. 65.

Summary

A process is given for determining ultra-traces of silver iodide in rainwater following on seeding experiments designed to influence precipitation. After considering the physico-chemical properties of silver iodide a 50-l sample of rainwater has been vaporized in a rapid 'thin-film' vaporizer. The residue is reduced by melting with soda. The reduced silver can be separated from the iodide by extraction with water. The quantitative analysis is then made by spot test on the basis of drops placed on filter paper saturated in *p*-dimethylaminobenzilidene-rhodanine, compared with drops of known content or alternatively with non-seeded rainwater. The quantitative analysis of the iodide is made with the aqueous, soda-alkaline, silver-free extract. The iodide traces are enriched, oxidized, and made to react on strips of paper soaked in fluorescein-sodium.

(Eingegangen: 8. Dezember 1958.)

Deflation bei Bandmatrizen

Von HEINZ RUTISHAUSER, Zürich¹⁾

Sei λ_1 ein Eigenwert, \mathbf{v}_1 ein zugehöriger, normierter Eigenvektor der symmetrischen Matrix A . Dann ist bekanntlich

$$B = A - \lambda_1 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1^T \quad (1)$$

eine Matrix mit folgenden Eigenschaften:

- B besitzt n unabhängige Eigenvektoren, die ebenfalls Eigenvektoren von A sind.
- Sind $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte von A , so sind $0, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ diejenigen von B .

Man bezweckt mit diesem von HOTELLING eingeführten Verfahren, den «Beitrag» des absolut grössten Eigenwertes in der Matrix A zu eliminieren. Dadurch wird es möglich, auch mit Methoden, die an sich nur den absolut grössten Eigenwert einer Matrix liefern, dennoch sämtliche Eigenwerte und Eigenvektoren zu berechnen.

Die Vor- und Nachteile dieses Vorgehens sind hinreichend bekannt, so dass sich eine weitere Erörterung erübrigt. Wenn man jedoch dieses Deflationsverfahren auf *Bandmatrizen*, das heisst Matrizen (a_{ik}) mit der Eigenschaft

$$a_{ik} = 0 \quad \text{für} \quad |i - k| > m \quad (2)$$

anwendet, so zeigt sich ein weiterer Nachteil: Die Matrix B ist dann nämlich *ausgefüllt*, das heisst, die für die numerische Berechnung vorteilhafte Eigenschaft (2) geht durch die Deflation nach (1) verloren.

Es wird daher in dieser Arbeit ein von (1) etwas abweichendes Deflationsverfahren entwickelt, welches die Bandgestalt einer symmetrischen Matrix nicht zerstört, aber auch auf beliebige symmetrische Matrizen mit Vorteil angewendet werden kann.

¹⁾ Institut für angewandte Mathematik der ETH.

1. Orthogonale Hessenberg-Matrizen

Ist \mathbf{v} ein zunächst beliebiger Vektor mit den Komponenten x_1, x_2, \dots, x_n , so kann man sofort $n - 1$ weitere Vektoren angeben, die mit \mathbf{v} zusammen ein Orthogonalsystem bilden. Wir setzen zunächst:

$$\mathbf{v}_n = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) = \text{gegebener Vektor},$$

ferner:

$$\mathbf{v}_{n-1} = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, y_n),$$

wobei die letzte Komponente y_n so bestimmt wird, dass \mathbf{v}_{n-1} und \mathbf{v}_n orthogonal sind; aber im Falle $x_n = 0$ setzen wir

$$\mathbf{v}_{n-1} = (0, 0, \dots, 0, 1).$$

Allgemein definieren wir rekursiv

$$\mathbf{v}_k = (x_1, x_2, \dots, x_k, y_{k+1}, 0, 0, \dots, 0), \tag{3}$$

wobei y_{k+1} so gewählt wird, dass \mathbf{v}_k zu \mathbf{v}_n orthogonal wird. Nur im Falle, dass $x_{k+1} = 0$ ist, setzen wir

$$\mathbf{v}_k = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \quad [= (k + 1)\text{-ter Koordinatenvektor}].$$

Damit wird \mathbf{v}_k offenbar von selbst auch orthogonal zu $\mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$.

Dieses Verfahren bricht wie folgt ab: Falls die p ersten Komponenten ($p = 0, 1, \dots, n - 1$) von \mathbf{v} verschwinden, ist der letzte nach (3) konstruierbare Vektor offenbar

$$\mathbf{v}_{p+1} = (0, \dots, 0, x_{p+1}, y_{p+2}, 0, \dots, 0).$$

Für die übrigen p Vektoren des Orthogonalsystems wählt man dann einfach die p ersten Koordinatenvektoren (das heisst die ersten p Kolonnenvektoren der Einheitsmatrix).

Die so konstruierten Vektoren $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ bilden ein Orthogonalsystem, welche nach Normierung die Kolonnenvektoren einer orthogonalen Matrix H bilden, die offenbar von sogenannter Hessenberg-Gestalt ist, das heisst

$$H = \begin{vmatrix} * & * & * & * & \dots & * & * \\ * & * & * & & \dots & * & * \\ 0 & * & * & & \dots & * & * \\ 0 & 0 & * & & & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & * & * \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Die letzte Kolonne dieser Matrix enthält bis auf einen konstanten Faktor den gegebenen Vektor \mathbf{v} , welcher die Matrix H im wesentlichen eindeutig bestimmt. Es ist im übrigen bemerkenswert, wie gering der Rechenaufwand für die Konstruktion dieser Matrix H ist. Beispiel: $n = 5, \mathbf{v} = (1, -1, 0, 1, -1)$. Dann wird

$$H = \begin{vmatrix} 0,707107 & 0 & 0,408248 & 0,288675 & 0,5 \\ 0,707107 & 0 & -0,408248 & -0,288675 & -0,5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,816496 & 0,288675 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0,866025 & -0,5 \end{vmatrix}.$$

Eigenschaft (2), mit anderen Worten: die Bandgestalt bleibt durch diese Art der Deflation erhalten.

Beweis: Wir zeigen zunächst:

a) Die Matrix $B = (A - \lambda E) H$ hat die Eigenschaft

$$b_{ik} = 0 \text{ für } \left\{ \begin{array}{ll} k > p, & \text{wenn } i < k + 1 - m \\ k \leq p, & \text{wenn } i < k - m \end{array} \right\}^2, \quad (7)$$

falls \mathbf{v} ein Eigenvektor von A und λ der zugehörige Eigenwert ist.

In der Tat ist ja für $k > p$ die k -te Kolonne \mathbf{v}_k von H eine Linearkombination der Vektoren $\mathbf{v}_n, \mathbf{e}_{k+1}, \dots, \mathbf{e}_n$ (wobei \mathbf{e}_i den i -ten Kolonnenvektor der Einheitsmatrix bezeichnet), denn die ersten k Komponenten von \mathbf{v}_k stimmen bis auf einen gemeinsamen Faktor mit denen von \mathbf{v}_n überein. Damit ist die k -te Kolonne von $B = (A - \lambda E) H$, das heisst der Vektor $(A - \lambda E) \mathbf{v}_k$, offenbar eine Linearkombination der Vektoren

$$(A - \lambda E) \mathbf{v}_n = 0, (A - \lambda E) \mathbf{e}_{k+1}, \dots, (A - \lambda E) \mathbf{e}_n,$$

also eine Linearkombination der $(k+1)$ -ten bis n -ten Kolonne von $A - \lambda E$, woraus sich die erste Behauptung in (7) ergibt.

Für $k \leq p$ ist die k -te Kolonne von B hingegen gleich derjenigen von $A - \lambda E$, womit sich auch die zweite Behauptung in (7) ergibt.

b) Es wird nun noch das Produkt ${}^1A = \lambda E + H^T B$ gebildet, wobei B die Eigenschaft (7), H^T dagegen die Eigenschaft

$$h_{ik}^T = 0 \text{ für } \left\{ \begin{array}{ll} i \leq p, & k > i \\ i > p, & k > i + 1 \end{array} \right\} \quad (8)$$

besitzt. Damit folgt aber für 1A sofort ${}^1a_{ik} = 0$ für $k - i > m$ und damit wegen der Symmetrie von 1A auch die Eigenschaft (2), was zu beweisen war.

Numerisches Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Hier ist $\mathbf{v} = (1, -1, 0, 1, -1)$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 2. Somit ergibt sich die Matrix H , die in Abschnitt 1 numerisch angegeben wurde, und damit

$${}^1A = \begin{pmatrix} 4,5 & 1,414214 & -0,866025 & 0 & 0 \\ 1,414214 & 4 & -0,816496 & 1,154701 & 0 \\ -0,866025 & -0,816496 & 4,166667 & -0,942809 & 0 \\ 0 & 1,154701 & -0,942809 & 3,333333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Natürlich sind die Elemente einer so berechneten Matrix 1A mit Rundungsfehlern behaftet, doch lassen sich diese wegen der Orthogonalität von H relativ leicht abschätzen.

²⁾ Dabei ist p wie in Abschnitt 1 dadurch definiert, dass x_{p+1} die erste nicht-verschwindende Komponente des Vektors \mathbf{v} ist.

3. Pseudodeflation durch Transformation mit H

Der grosse Vorteil jeder «Deflation durch Ähnlichkeitstransformation» besteht darin, dass die Verwendung eines ungenauen Eigenvektors \mathbf{v} lediglich zur Folge hat, dass die «Ränder» der Matrix 1A nicht mit Nullen, sondern mit kleinen Grössen besetzt sind. Da die Eigenwerte von 1A dadurch nicht beeinflusst werden, hat dies lediglich zur Folge, dass man nicht mit der $(n-1)$ -reihigen Matrix 1A , sondern mit der vollen Matrix 1A weiterrechnen muss³⁾.

Die weiteren Deflationsschritte zur Bestimmung sämtlicher Eigenwerte verlaufen daher nicht gleich wie bei der exakten Deflation: Zwar bestimmt man zunächst ebenfalls einen Eigenwert ${}^1\lambda$ und Eigenvektor ${}^1\mathbf{v}$ der $(n-1)$ -reihigen Matrix 1A , und ebenso auch die zu ${}^1\mathbf{v}$ gehörige $(n-1)$ -reihige orthogonale Hessenberg-Matrix 1H . Die letztere wird aber sogleich wie folgt zu einer n -reihigen Orthogonalmatrix 1H ergänzt:

$${}^1H = \left(\begin{array}{c|c} {}^1H & \begin{matrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & \dots & 0 \end{matrix} & 1 \end{array} \right).$$

Wenn man nun die Transformation

$${}^2A = ({}^1H)^T ({}^1A) ({}^1H)$$

durchführt, so hat die wieder symmetrische Matrix 2A die Gestalt

$${}^2A = \left(\begin{array}{c|cc} & \varepsilon & \varepsilon \\ & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot \\ & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \dots & \varepsilon & {}^1\lambda & \varepsilon \\ \varepsilon & \dots & \varepsilon & \varepsilon & \lambda \end{array} \right),$$

wobei die ε kleine Grössen andeuten, die durch genauere Bestimmung der Vektoren ${}^1\mathbf{v}$ und \mathbf{v} beliebig klein (praktisch jedoch nicht kleiner als Rundungsfehler) gemacht werden können.

In dieser Weise fortfahrend, erhält man schliesslich, ungeachtet der Ungenauigkeit der verwendeten Eigenvektoren \mathbf{v} , ${}^1\mathbf{v}$, ${}^2\mathbf{v}$ usw., eine zu A ähnliche Matrix nA , deren Aussendiagonalelemente klein sind, deren exakte Eigenwerte daher relativ leicht berechnet werden können.

Die Bandgestalt einer Matrix wird allerdings durch die Verwendung ungenauer Eigenvektoren zur Konstruktion der Matrizen H für die Deflation nach (5) im allgemeinen zerstört. Die Eigenschaft (2) bleibt jedoch erhalten (bis auf Reste, die durch Rundungsfehler erzeugt werden), wenn man nur dafür sorgt, dass der ver-

³⁾ Im Gegensatz dazu führt die Verwendung eines ungenauen Eigenvektors \mathbf{v} in (1) zu irreparablen Fehlern, die sich bei weiteren Deflationsschritten in gefährlicher Weise anhäufen können.

wendete Eigenvektor \mathbf{v} die ersten $n - m$ Gleichungen des Systems $(A - \lambda E) \mathbf{v} = 0$ exakt erfüllt.

Summary

Deflation methods which are used to eliminate dominant eigenvalues of a matrix in order to compute also non-dominant ones, in general destroy special forms of a matrix, such as the property

$$a_{ik} = 0 \quad \text{for} \quad |i - k| > m. \quad (1)$$

(In some cases even the symmetry of the matrix is destroyed by deflation.) In the present paper, the author describes a deflation method which maintains the symmetry as well as the property (1).

(Eingegangen: 16. Dezember 1958.)

Varia – Miscellaneous – Divers

10. Sitzung des Schweizer Komitees für Optik vom 18. November 1958 in Zürich

Am 18. November 1958 fand im Physikgebäude der ETH in Zürich die 10. Sitzung des Schweizer Komitees für Optik statt. Anlässlich dieser Sitzung wurden 5 Vorträge gehalten, wovon zwei Berichte über die internationalen Kongresse von Brüssel (*Die Optik in der Metrologie*) und Berlin (*Elektronenmikroskopie*) und drei wissenschaftliche Mitteilungen. Wir geben nachfolgend eine Zusammenfassung der drei Mitteilungen.

Über die Evakuierungsgeschwindigkeit von Bedampfanlagen. Von TH. KRAUS, Balzers¹⁾.

Die optischen und mechanischen Eigenschaften von Aufdampfschichten sind sehr stark von der Desorption der an den zu bedampfenden Objekten und an der Rezipientenwand adsorbierten Gase (hauptsächlich Wasserdampf) abhängig. Das Ausmass der Desorption gibt sich durch die Evakuierungsgeschwindigkeit des Rezipienten zu erkennen. Anhand der Untersuchungsergebnisse konnte gezeigt werden²⁾, dass unter gewissen vereinfachten Bedingungen die Pumpzeit t folgender einfachen Regel gehorcht:

$$t = \frac{V}{S} \cdot \frac{P_A}{p - P_E} + C$$

(V Volumen des Rezipienten, S Sauggeschwindigkeit der Pumpe, p Druck im Rezipienten zum Zeitpunkt t , P_E erreichbarer Enddruck, C eine von den Anfangsbedingungen abhängige Konstante, die häufig vernachlässigbar klein wird, wenn t vom

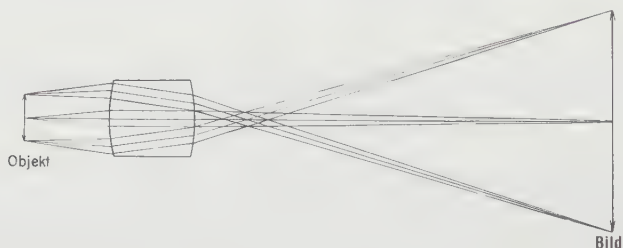
¹⁾ Gerätebauanstalt Balzers.

²⁾ Vgl. Th. KRAUS, *Über die Evakuierungsgeschwindigkeit von Hochvakuumanlagen*, Vakuumtechnik 8, 39–43 (1959).

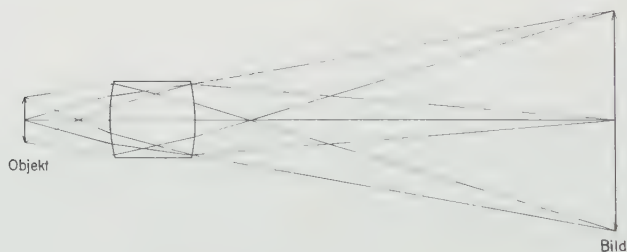
Einsetzen der Diffusionspumpe an gerechnet wird). Die Grösse P_A , welche die Dimension eines Druckes besitzt, charakterisiert den Zustand des Rezipienten in bezug auf die Adsorption. Ihr Betrag liegt bei Bedampfungsanlagen bei Zimmertemperatur je nach «Verschmutzungsgrad» in der Grössenordnung von 10^{-2} bis 10^{-1} Torr und kann innerhalb des Gültigkeitsbereiches der Regel ($P_A > p > P_E$) jeweils aus dem $t = [1/(p - P_E)]$ -Diagramm ermittelt werden. Damit können Bedampfungsanlagen auf ihre Einsatzfähigkeit geprüft und durch rechtzeitige Vorkehrungen (zum Beispiel Reinigung) Ausfälle vermieden werden.

Ein Objektiv für Profilprojektion. Von W. LOTMAR, Aarau³⁾.

Projektionsobjektive für Messzwecke müssen bei vorgegebenem Abbildungsmaßstab ein verzeichnungsreies Bild im telezentrischen Strahlengang liefern (Figur 1). Auf industriellen Profilprojektoren, die zur Stückkontrolle auf Masshaltigkeit dienen, sind in der Regel mehrere auswechselbare Objektive mit verschiedenen normierten Abbildungsmaßstäben vorgesehen. In diesem Fall kommt zu den obigen Forderungen noch diejenige nach Abstimmbarkeit der Objektivbrennweiten hinzu, da aus konstruktiven Gründen die Distanz Objekt–Bild beim Vergrößerungswechsel erhalten bleiben soll.



Figur 1
Telezentrischer Strahlengang.



Figur 2
Strahlengang bei episkopischer Beleuchtung.

Bei Profilprojektoren wird ausserdem oft gewünscht, opake Objekte mit derselben Optik in Epi-Projektion abbilden zu können. Der Strahlengang ist hierbei nicht mehr telezentrisch, sondern das Objektiv wird von jedem Objektpunkt aus mehr oder weniger mit voller Apertur beansprucht (Figur 2).

³⁾ Kern & Co. AG.

Wegen seiner guten Korrektureigenschaften ist bisher für derartige Zwecke vielfach der sogenannte Gauss-Typ verwendet worden (Figur 3). Die Abstimmung erfolgt durch Veränderung des mittleren Luftabstandes, wodurch jedoch unvermeidbarerweise die Bildebnung in ziemlich empfindlichem Masse beeinflusst wird.

Die Suche nach einem korrekturmässig gleichwertigen Typus mit geringerer Empfindlichkeit auf Brennweitenabstimmung führte auf den in Figur 4 gezeigten Aufbau, der aus dem bekannten, in Figur 5 dargestellten Typ durch Einführen zweier sammelnder Kittflächen in den Negativgliedern hervorgeht. Der vorgeschlagene Typ ist zwar für photographische Zwecke bereits bekannt geworden⁴⁾,



Figur 3
Gauss-Typ.



Figur 4
Aus dem Grundtyp von Figur 5
entwickelter verbesserter Typ.



Figur 5

war aber wenig leistungsfähig. Durch Verwendung moderner Gläser (Lanthan-Kron) lässt sich eine für Profilprojektion geeignete Korrektur erreichen, bei sehr geringer Abhängigkeit derselben vom Mittelabstand sowie guter Bildschärfe auch für Epi-Projektion. Für einen Bildwinkel von rund 16° und ein Öffnungsverhältnis von 1:2,7 beträgt der Radius der Bildschale bei einem Ausführungsbeispiel das 2,9fache der Brennweite, was für den vorgesehenen Zweck ausreicht.

Zur linearen Fehlertheorie optischer Prismen, insbesondere des Tripelprismas. Von R. STETTLER, Aarau⁵⁾.

Die Optik unterscheidet bekanntlich zwischen Dispersions- und Spiegelprismen.

Während Dispersionsprismen zur Erzeugung von Spektren dienen, verwendet man Spiegelprismen, um Strahlengänge abzulenken und die Orientierung optischer Bilder zu verändern.

1. Allgemeines über Spiegelprismen

Jedes ideale Spiegelprisma ist optisch äquivalent einem System von Planspiegeln, deren Lage mit derjenigen der reflektierenden Prismenflächen übereinstimmt, und einer Planplatte, deren Dicke gleich dem sogenannten Glasweg ist.

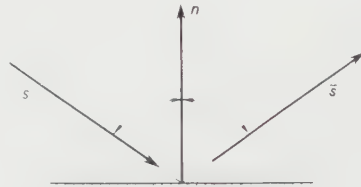
Die gegenseitige Lage der Prismenflächen ist an gewisse Winkelbeziehungen geknüpft. Sind diese nicht genau erfüllt, so entstehen kleine Ablenkungsfehler, schwache Farbenzerstreuungen und eventuell Bildverdopplungen. Während die beiden erstgenannten Erscheinungen meist unerheblich sind, sind Bildverdopplungen, wie man sie zum Beispiel beim Dachkantprisma beobachtet, im allgemeinen unzulässig. Die Bildverdopplung beruht darauf, dass Spiegelungen als mathematische Transformationen aufgefasst im allgemeinen nicht vertauschbar sind. Wie man leicht nachweist, sind Spiegelungen an zwei Reflexionsflächen dann und nur dann vertauschbar, wenn diese einen rechten Winkel bilden. Jedoch zeigen nicht alle fehlerhaften Prismen Bildverdopplungen. Solche entstehen nur, wenn das einfallende Bündel durch eine Prismenkante in zwei Teilbündel aufgeteilt wird (wie

⁴⁾ US-Patent Nr. 1565205 (P. Rudolph).

⁵⁾ Kern & Co. AG.

zum Beispiel beim Dachkantprisma). Ist nämlich der Prismenwinkel dieser Kante nicht exakt 90° , so besitzen die beiden reflektierten Teilbündel einen Richtungsunterschied, was dann zur Entstehung eines Doppelbildes führt.

Für die technische Optik ergibt sich damit die Aufgabe, die zulässigen Toleranzen der Winkelfehler zu bestimmen. Das Verfahren ist einfach. Gegeben sei ein ideales Spiegelprisma. Ein einfallendes Parallelbündel, festgelegt durch den Richtungsvektor \mathbf{s}_0 ($|\mathbf{s}_0| = 1$), wird durch das Prisma verfolgt und trete mit dem Richtungsvektor \mathbf{s}'_0 ($|\mathbf{s}'_0| = 1$) aus. Dann werden die Prismenwinkel mit den Winkelfehlern α_i ($|\alpha_i| \ll 1$) behaftet, worauf das Parallelbündel \mathbf{s}_0 erneut durch das Pris-



Figur 1

Zum Reflexionsgesetz.

mensystem verfolgt wird. Für die Fehlerbetrachtung darf man dabei jedes nicht-ideale Spiegelprisma durch das entsprechende Spiegelsystem ersetzen. Wie man zeigen kann, sind die Ablenkungsfehler eines nichtidealen Spiegelprismas gleich den Ablenkungsfehlern des entsprechenden Spiegelsystems, multipliziert mit der Brechungszahl des Prismenglases (vorausgesetzt, dass die Ein- und Austrittsfläche des Prismas nicht zu gross sind). Bei der Strahlendurchrechnung ist noch zu berücksichtigen, dass für Teilbündel die Reihenfolge der Reflexionsflächen eventuell verschieden sein kann; dadurch wird das ursprünglich einheitliche Bündel \mathbf{s}_0 in $k \geq 1$ austretende Parallelbündel aufgespalten. $\mathbf{s}'_1, \mathbf{s}'_2, \dots, \mathbf{s}'_k$ seien die Richtungsvektoren dieser Bündel. Dann liefern die Differenzvektoren $\mathbf{l}_i = \mathbf{s}'_i - \mathbf{s}_0$ die gesuchten Ablenkungsfehler, die natürlich Funktionen der α_i sind.

Die Strahlendurchrechnung erfolgt vorteilhaft mit Vektorrechnung unter Zugrundelegung des *vektoriellen Reflexionsgesetzes* (Figur 1):

$$\bar{\mathbf{s}} = \mathbf{s} - 2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{s})\mathbf{n}, \quad \bar{\mathbf{s}}^2 = \mathbf{s}^2 = \mathbf{n}^2 = 1.$$

Bei Spiegelsystemen mit Winkelfehlern ist eine Strahlendurchrechnung umständlich. Eine Vereinfachung ergibt sich dadurch, dass nur die 1. Potenzen der α_i berücksichtigt werden (lineare Fehlertheorie).

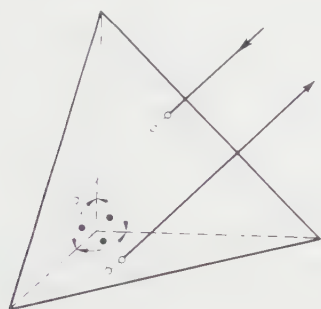
2. Das Tripelprisma

Die vorstehenden Ausführungen sollen – mit einer bemerkenswerten Abänderung – auf das Tripelprisma angewandt werden.

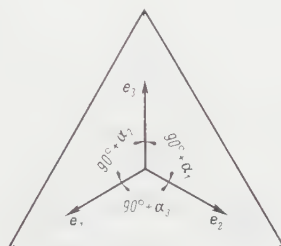
Drei rechtwinklig aufeinanderstehende Spiegel bilden einen Tripelspiegel; das Tripelprisma entsteht dadurch, dass man aus einem Glaswürfel eine gleichseitige Ecke abschneidet (Figur 2).

Das ideale Tripelprisma hat die interessante Eigenschaft, dass jeder einfallende Strahl, nach Totalreflexion an den 3 Seitenflächen, parallel versetzt zum einfallenden Strahl austritt. Somit wird ein einfallendes Parallelbündel in sich selbst zurückgespiegelt, wobei die einzelnen Strahlen Parallelversetzungen erleiden.

Für das Tripelprisma soll nun die lineare Fehlertheorie entwickelt werden. Gemäss den obigen Ausführungen kann man sich auf den Tripelspiegel beschränken. Beim fehlerhaften Tripelspiegel sind die Kantenwinkel mit den Winkelfehlern α_i behaftet (Figur 3).



Figur 2
Ideales Tripelprisma.



Figur 3
Fehlerhaftes Tripelprisma.

In Abänderung der geschilderten Vektormethode erweist sich im Fall des Tripelprismas ein *Verfahren mittels Begreifen des Ricci-Kalküls* als wesentlich wirkungsvoller.

Da die Kanten eines fehlerhaften Tripelspiegels offenbar ein «schwach» schiefwinkliges Koordinatensystem bilden, so liegt der Gedanke nahe, die Strahlendurchrechnung auf dieses System zu beziehen. Man denkt sich deshalb in den drei Kantenrichtungen die Einheitsvektoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ abgetragen (Figur 3). Dann erhält man für den metrischen Fundamentaltensor $g_{ik} = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_k$ in linearer Approximation

$$g_{ij} = 1 \quad (i = 1, 2, 3), \quad g_{12} = -\alpha_3, \quad g_{13} = -\alpha_2, \quad g_{23} = -\alpha_1,$$

und daraus in bekannter Weise für den kontravarianten Fundamentaltensor

$$g^{ii} = 1 \quad (i = 1, 2, 3), \quad g^{12} = \alpha_3, \quad g^{13} = \alpha_2, \quad g^{23} = \alpha_1.$$

Bedeutung s^i und s_i die kontravarianten Komponenten des Richtungsvektors des einfallenden bzw. reflektierten Strahls, ferner n^i und n_i die kontra- bzw. kovarianten Komponenten der Spiegelnormalen, so gilt in *Übertragung des Reflexionsgesetzes in den Ricci-Kalkül*

$$s^i = s^i - 2 n_\lambda s^\lambda n^i, \quad \bar{s}^i s_i = s^i s_i = n^i n_i = 1.$$

Die Spiegelnormale berechnet sich nach bekannten Regeln. Zum Beispiel gilt für die Spiegelnormale auf die 3. Fläche, aufgespannt durch \mathbf{e}_1 und \mathbf{e}_2 , in linearer Approximation

$$n_1 = 0, \quad n_2 = 0, \quad n_3 = 1,$$

und

$$n^1 = \alpha_2, \quad n^2 = \alpha_1, \quad n^3 = 1.$$

Damit sind alle Hilfsmittel für die Strahlendurchrechnung bereitgestellt. Besonders zu beachten ist noch die Reihenfolge der Reflexionsflächen.

Ohne auf Einzelheiten der Strahlendurchrechnung weiter einzugehen, fassen wir die auf dem beschriebenen Weg erhaltenen Resultate wie folgt zusammen⁶⁾:

Man denke sich 2 Tripelprismen, ein ideales und ein fehlerhaftes, deren Deckflächen parallel seien.

Fällt dann ein Parallelbündel \mathbf{s}_0 auf das *ideale Tripelprisma*, so wird es als einheitliches Parallelbündel mit dem Richtungsvektor $\mathbf{s}'_0 = -\mathbf{s}_0$ zurückgespiegelt.

Fällt dagegen das Parallelbündel \mathbf{s}_0 auf das *fehlerhafte Tripelprisma*, unter kleiner Inzidenz gegen die Deckfläche, so wird es im allgemeinen in $k = 6$ *Parallelbündel* $\mathbf{s}'_1, \mathbf{s}'_2, \dots, \mathbf{s}'_6$ aufgespalten. Werden die Vektoren \mathbf{s}'_1 bis \mathbf{s}'_6 von einem Punkt aus abgetragen, so bilden sie die Kanten einer sechsseitigen geraden Pyramide. Ihre Grundfläche ist ein Sechseck besonderer Art: Zwei aufeinanderfolgende Seiten schliessen einen Winkel von 60° oder 120° ein (geeignete Numerierung vorausgesetzt), wobei gegenüberliegende Seiten gleich lang und parallel sind.

Die Pyramide ist räumlich so orientiert, dass ihre Höhe mit \mathbf{s}'_0 zusammenfällt und ausserdem je 2 gegenüberliegende Seiten des Sechsecks zu den Seitenflächen des Tripelprismas parallel sind. Die Ablenkungsfehler $\delta_i = \angle(\mathbf{s}'_i, \mathbf{s}'_0)$ der 6 Parallelbündel gegenüber dem ideal reflektierten Bündel \mathbf{s}'_0 berechnen sich wie folgt⁷⁾:

$$\delta_1 = \delta_4 = \frac{2}{3} \sqrt{6n} \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 - \alpha_2 \alpha_3},$$

$$\delta_2 = \delta_5 = \frac{2}{3} \sqrt{6n} \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3},$$

$$\delta_3 = \delta_6 = \frac{2}{3} \sqrt{6n} \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3}.$$

Hierin bedeutet n die Brechungszahl des Prismenglases.

Buchbesprechungen – Book Reviews – Notices bibliographiques

Handbuch der Physik – Encyclopedia of Physics. Herausgegeben von S. FLÜGGE, Band 50: *Astrophysik I: Sternoberflächen – Doppelsterne* (Springer-Verlag, Berlin 1958). 458 S., 167 Fig.; DM 98.–

Vor 30 Jahren erschien das 10bändige *Handbuch der Astrophysik*, das damals am Wendepunkt von der beobachtenden zur interpretierenden Astrophysik einen Markstein gesetzt hat. Seither sind die Bindungen der Astronomie an die Physik viel enger geworden, so dass es berechtigt und begrüssenswert ist, dass im Rahmen des jetzt erscheinenden *Handbuches der Physik* in den der Astrophysik gewidmeten 5 Bänden 50 bis 54 jenes enzyklopädische Werk der letzten Generation eine neue, wenn auch weniger umfangreiche Auflage erfährt. Neben dem Umfang unterscheidet sich das neue Werk von demjenigen der letzten Generation durch die Sprache, indem Deutsch seine damalige Vorrangstellung an Englisch abgetreten hat, und in der Gliederung des Stoffes, indem auf die die ersten Bände des Hand-

⁶⁾ Wie nachträglich festgestellt wurde, ist die Fehlertheorie des Tripelprismas auf ähnlichem Weg von G. ROSENTHAL, *Optik* 4, 391 (1948/49), entwickelt worden. Vgl. auch P. R. YODER jr., *J. opt. Soc. Amer.* 48, 496 (1958).

⁷⁾ Für Bündel, bei denen die Reihenfolge der Reflexionsflächen umgekehrt ist, ergeben sich gleiche Ablenkungsfehler.

buches der Astrophysik füllenden physikalischen Grundlagen im Rahmen eines Handbuches der Physik verzichtet werden konnte. So präsentiert sich das neue Werk, nach dem Prospekt zu schliessen, als eine Aneinanderreihung von Monographien. Eine zu starke Aufgliederung des Stoffes wurde, sehr zum Vorteil des Werkes, vermieden, wobei allerdings in Kauf genommen werden musste, dass manche Autoren über Gebiete zu berichten haben, die weit ausserhalb des ihnen durch eigene Forschung vertrauten Stoffes liegen.

Der vorliegende Band 50, *Astrophysik I, Sternoberflächen und Doppelsterne*, behandelt in 10 Beiträgen die Spektralklassifikation, Sterne mit speziellen Spektren, die Spektren der weissen Zwerge und der planetarischen Nebel, die Molekülbanden in Sternspektren, die visuellen, Bedeckungs- und spektroskopischen Doppelsterne und schliesst mit zwei theoretischen Beiträgen über die Sternatmosphären und die planetarischen Nebel. Alle Artikel sind von kompetenten Autoren verfasst, straff geschrieben und dem neuesten Stand angepasst. Die technische Ausstattung ist in jeder Hinsicht vorzüglich; auch wurde durch das Anbringen der Literaturzitate am Fusse der Seiten mehr an die Bequemlichkeit des Lesers als an diejenige des Setzers gedacht.

Die vier noch ausstehenden astrophysikalischen Bände werden den inneren Aufbau und die Entwicklung der Sterne, das Sonnensystem, die Sternsysteme (inkl. Kosmogonie) und die astronomischen Instrumente behandeln. Mögen auch diese eine ebenso erfreuliche Vermehrung der astrophysikalischen Literatur werden wie der vorliegende erste Band.

M. WALDMEIER

Theorie schallnaher Strömungen. Von K. G. GUDERLEY (Springer-Verlag, Berlin 1957). 376 S., 125 Abb.; DM 42.–.

Gasströmungen verhalten sich grundsätzlich verschieden, je nachdem die Strömungsgeschwindigkeit kleiner oder grösser als die Schallgeschwindigkeit ist. Wenn auch die Theorie der reinen reibungslosen Unterschall- sowie der reinen Überschallströmung zu einem gewissen Abschluss gebracht werden konnte, so bietet die Behandlung eines Strömungsfeldes, in welchem gleichzeitig Unterschall wie Überschallgebiete auftreten, grosse Schwierigkeiten, die zur Hauptsache vom gemischten Charakter der Differentialgleichungen herrühren. Es ist daher verständlich, dass ein Buch über schallnahe Strömungen einen stark mathematisch betonten Charakter aufweist. Das Verdienst des Verfassers besteht darin, eine ziemlich lückenlose Zusammenfassung der weit zerstreuten Arbeiten zu bringen, in welchen er neben der mathematischen Darstellung immer wieder den physikalischen Vorgang aufführt. Leider enthält das Buch sozusagen keine experimentellen Resultate, und wenn mehrmals auf die gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Wirklichkeit hingewiesen wird, so bleibt der Verfasser den Beweis schuldig. Dem mathematisch interessierten Aerodynamiker wird dieses Buch gute Dienste leisten.

P. DE HALLER

The Fundamental Principles of Quantum Mechanics. Von E. C. KEMBLE (Dover Publications, Inc., London und New York 1958). 611 S.; \$2.95.

Quantum Electrodynamics. Herausgegeben von J. SCHWINGER (Dover Publications, Inc., London und New York 1958). 424 S.; \$2.45

Die Tatsache, dass unser Zeitalter neben andern Eigenschaften durch eine Überschwemmung mit billigem, bedrucktem Papier gekennzeichnet ist, hat auch ihre guten Seiten. Davon zeugen die beiden vorliegenden Bände.

Der erste Band macht die bekannte gründliche Einführung von E. C. KEMBLE in die Prinzipien der Quantentheorie jedermann zugänglich. Das Werk selbst hat

sich in den 20 Jahren seines Bestehens genügend eingebürgert und braucht kaum noch eine Empfehlung.

Von anderer Art sind die von J. SCHWINGER herausgegebenen 34 Arbeiten über Quantenelektrodynamik. Hier werden viele der wichtigsten Vorarbeiten zur modernen Quantenelektrodynamik (angefangen bei P. A. M. DIRACS erstmaliger Quantisierung des Maxwell-Feldes im Jahre 1927) zusammengestellt. Darauf folgen, was sehr zu begrüßen ist, zwei experimentelle Arbeiten, wovon die eine von W. E. LAMB und R. C. RETHERFORD unmittelbar den Ansporn zur weiteren Entwicklung bildete. Daran schliessen sich die grundlegenden Arbeiten von J. SCHWINGER, R. P. FEYNMAN und F. J. DYSON an. Den Abschluss bildet eine Arbeit von G. KÄLLÉN mit dem Resultat, dass nicht alle Renormalisierungskonstanten endlich sein können.

Die Einleitung von J. SCHWINGER gibt auf wenigen Seiten eine angenehme lesbare Einführung in die Entwicklung der Quantenelektrodynamik.

Natürlich wird eine solche Auswahl von Artikeln den persönlichen Stil des Herausgebers widerspiegeln. Sie lässt sich daher kritisieren. Doch ist ihr Nutzen und ihre Wünschbarkeit so gross, dass jegliche Kritik nebensächlich wird.

Es ist gut, dass jeder interessierte Student nun die Möglichkeit hat, die Originalarbeiten selbst, die oft in schwer zugänglichen Zeitschriften zu suchen waren, nicht nur zu lesen, sondern auch zu besitzen.

R. JOST

Physics and Mathematics. Band 2: *Progress in Nuclear Energy*. Von D. J. HUGHES, J. E. SANDERS und J. HOROWITH (Pergamon Press, London 1958). 375 S.; 90 s.

Der zweite Band in der Bücherserie «Physics and Mathematics» ist als Fortsetzung von Band 1 der Reaktor- und Neutronenphysik gewidmet. Nach einem Überblick über die experimentellen Daten, die sämtliche Reaktionsmöglichkeiten von schnellen Neutronen mit den schweren Kernen Thorium, Uran und Plutonium umfassen, wird ebenfalls zusammenfassend über die thermischen Einfangsquerschnitte bei schweren Kernen unter Berücksichtigung der Resonanzeffekte referiert. In die Neutronenphysik gehören eindeutig auch die Aufsätze über die Standardisierung von Neutronenquellen und über Diffusionsmessungen mit gepulsten Neutronenquellen. Dazu könnte man auch die Arbeit über die Ausmessung und Theorie der Reaktorspektren rechnen. Betrachtungen über den in thermischen Reaktoren wichtigen Resonanzeinfang während der Verlangsamung gehören nun eindeutig in die Reaktorphysik. Methoden für die Berechnung von heterogenen Reaktoren und das mehr in die angewandte Mathematik weisende Kapitel über eine Monte-Carlo-Methode für Transportprobleme beschliessen das Buch. Es handelt sich hier um ein typisches Spezialistenbuch, das vor allem durch brillante Zusammenfassungen einen grossen Wert bekommt. Allerdings sind in einer Ausgabe so divergierende Stoffgebiete behandelt, dass selbst ein Spezialist nur einzelne Kapitel herausgreifen wird. Es wäre deshalb zu begrüßen, wenn in einer weiteren Buchfolge eine homogenere Zusammenstellung der Aufsätze erreicht werden könnte.

P. STOLL

Fundamentals of Gas Dynamics. Band 3: *High Speed Aerodynamics and Jet Propulsion*. Herausgeber: H. W. EMMONS (Princeton University Press, Princeton 1958). 749 S., 313 Abb.; \$20.00.

Das vorliegende Werk ist der dritte Band des von TH. VON KÁRMÁN, H. L. DRYDEN und H. S. TAYLOR herausgegebenen Handbuches über *Aerodynamik der hohen Geschwindigkeiten und Strahlantrieb*. Diesem Rahmen entsprechend wird die

Gasdynamik im weitesten Sinne behandelt. Die Autoren der verschiedenen Abschnitte sind alle bekannte Spezialisten ihres Faches, und ihre Beiträge bestehen nicht nur aus einer Zusammenfassung der bisherigen Arbeiten, sondern enthalten wichtige eigene Betrachtungen, die dem Buche ein besonderes Gepräge erteilen. Die acht Kapitel sind:

A. H. S. TSIEN: *Allgemeine Gleichungen der Gasdynamik.*

B. LUIGI CROCCO: *Eindimensionale stationäre Gasdynamik.* Ausführliche Behandlung der Strömungsvorgänge in Leitungen und Düsen, mit stationären Stößen, Reibung, Verbrennung und Wärmeübergang. Auch der Einfluss einer Abweichung vom idealen Gas wird untersucht.

C. ARTHUR KANTROWITZ: *Eindimensionale instationäre Gasdynamik.* Dieser Abschnitt behandelt die Stosswellen im idealen Gas, unter spezieller Berücksichtigung der zylindrischen und kugelsymmetrischen Explosion und Implosion.

D. WALLACE D. HAYES: *Allgemeine theoretische Grundlagen der gasdynamischen Stöße.*

E. H. POLACHEK und R. SEEGER: *Gegenseitige Beeinflussung von Stosswellen.*

F. H. G. STEVER: *Kondensationsvorgänge bei hohen Geschwindigkeiten.*

G. TH. VON KÁRMÁN, H. W. EMMONS, R. S. TANKIN und G. I. TAYLOR: *Gasdynamik der Verbrennung und Detonation.*

H. S. A. SCHAAF und P. CHAMBRÉ: *Strömungen im hohen Vakuum.*

Das ausserordentlich inhaltsreiche Buch kann dem Fachmann und dem Studenten bestens empfohlen werden.

P. DE HALLER

Jahrbuch der Wissenschaftlichen Gesellschaft für Luftfahrt e. V. (WGL) 1957 (Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1958). 504 S., 623 Abb.; DM 58.—.

Den Hauptinhalt dieses Jahrbuches bilden die Vorträge der vom 9. bis 12. April 1957 in Essen (Ruhrgebiet) gemeinsam von der WGL und der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt (DVL) durchgeführten Tagung. Die Vorträge behandeln die Themata:

Entwicklungsstand der Turbinentriebwerke – Probleme und Ergebnisse der angewandten gasdynamischen Forschung – Der Überdruckwindkanal in Aachen – Ein schnellanzeigendes elektronisches Multimanometer – Vereinfachte Bestimmung der Druckverteilung an Flügeln beliebiger Spannweite – Strömung an Körpern nicht mehr kleiner Streckung in auftriebsloser linearer Unter- und Überschallströmung – Auftrieb und Widerstand langer Ringflügel in Überschallströmung – Strömungsuntersuchungen an rotierenden Schaufelgittern – Akustische Steuerung der turbulenten Anfachung im Freistrahle – Beitrag zur Frage des Lufteinlasses bei Strahltriebwerken für Überschallgeschwindigkeiten – Der Einfluss der Fluggeschwindigkeit auf die Wirtschaftlichkeit von Durch- und Ausströmtriebwerk – Die Wirkung der Schleierkühlung bei hocherhitzten Bauteilen – Zur Frage der Fahrwerkslastannahmen – Ortungsgenauigkeit von Funknavigationungsverfahren – Über das Springen von Funkpeilungen – Biologische Strahlungswirkung – Beiträge zu Nachwuchs- und Ausbildungsfragen aus den Erfahrungen bei der Flugzeugführerauslese – Über die Berechnung des induzierten Geschwindigkeitsfeldes von Tragflügeln – Untersuchungen zur Aerodynamik der Flügel-Rumpf-Anordnungen – Strömungsuntersuchungen an Tandem-Schaukelgittern – Überschallströmung um Rumpf-Flügel-Anordnungen – Grenzschichteffekte beim Rohrwindkanal – Grenzschichtablösung und Totwasserbildung – Aeronautical Studies in the Aeroballistics Range – Über den Entwicklungsstand der Freifluganlagen – Beitrag zur Frage nach den Flugeigenschaften der Segelflugzeuge –

Grenzschichtmessungen im Segelflugzeug – Die schräg angeblasene Luftschraube und andere Flügel-Triebwerk-Systeme im Langsamflug – Bemerkungen zur Schräganblasung am Rotorblatt eines Hubschraubers – On the Response of Structures Having Multiple Random Inputs – Durch die Flügel verursachte Spannungserhöhung in Mittelscheiben axialer Turboläufer – Ein Beitrag zur Statik des Ringflügels – Design of 'Passenger Tie-Down'. Some Factors for Consideration in the Crash-Survival Design of Passenger Seats in Transport Aircraft – Analog-Rechengerate und Simulatoren in der Luftfahrt – Über einige neuere Ergebnisse der Regelungstheorie und ihre Bedeutung für die Lagenregelungen von Flugzeugen – Dreiachsen-Flugregelung für Hochleistungsflugzeuge mit Integrations-Wendekreiseln als Haupttrichtgeber – A High Resolution Hydraulic Servo – Sichtbarmachung von Flugzeugbordgeräten – Über gasdynamische Mischungsvorgänge; Schuberrhöhung durch Strahlbeimischung – Ange-näherte Berechnung der mittleren Zustandsfelder in ebenen oder runden turbu-lenten Diffusionsflammen und dissoziierenden freien Gasstrahlen – Fliegende Prüf-stände für Strahltriebwerke – Probleme bei Versuchen an Ringbrennkammern – Turbinen-Flugtriebwerke, Leistungen und Gewichte – Die Herstellung von Blech-schaufeln für Gasturbinen und Kompressoren – S. A. P. – Der hochwarmfeste Alu-minium-Sinterwerkstoff – Wärmeübergang und Grenzschichtausbildung bei Schweißbaustoffen – Die Arbeiten des Flugmeteorologischen Instituts der Deut-schen Forschungsanstalt für Segelflug (DFS). Freie und zweckgebundene For-schung – Neue Untersuchungen über die Eisteilchenbildung in unterkühlten Wolken – Wolkenhöhenmessungen bei Tage mit laufender Registrierung.

Das Jahrbuch stellt somit wieder eine wertvolle Sammlung dar aus allen heute aktuellen Gebieten des Flugwesens: Aerodynamik, Flugmechanik, Triebwerks-forschung, Luftfahrzeugführung, Werkstoffe und Festigkeit, Hubschrauber, Funknavigation, Meteorologie und Medizin.

Den Schluss des auch drucktechnisch sehr gut ausgeführten Bandes bilden Angaben über die Tätigkeit der WGL im Jahre 1957, und mehrere Nachrufe bringen das Wirken bedeutender Persönlichkeiten in Erinnerung, die in der vom Jahrbuch erfassten Zeitperiode zum Teil in hohem Alter, zum Teil aber auch nur allzu jung verstorben sind.

G. DÄTWYLER

Dislocations and Mechanical Properties of Crystals. Von J. C. FISHER, W. C. JOHNSTON, R. THOMSON und T. VREELAND. Eine internationale Konferenz in Lake Placid vom September 1956 (John Wiley & Sons, New York 1957). 634 S., 347 Fig.; \$15.00.

Die Festigkeitseigenschaften der Kristalle sind um Größenordnungen kleiner als die theoretisch für Idealkristalle berechneten. Durch die Einführung hypo-thetischer Gitterstörungen von linearer Gestalt, der sogenannten «Versetzungen», gelang es 1934 unabhängig voneinander G. I. TAYLOR, E. OROWAN und M. PO-LANYI, diese Diskrepanz zu beseitigen. Es folgten dann 20 Jahre, während denen immer mehr Effekte der Kristallplastizität und -festigkeit, aber auch zahlreiche andere Kristallphänomene (zum Beispiel gewisse Wachstumserscheinungen, be-stimmte Polymorphien usw.) sich mühelos vermittlels der Versetzungstheorie er-klären ließen, ohne dass aber ein direkter Beweis für das Vorhandensein von Versetzungen erbracht worden wäre. In den letzten Jahren sind nun mit ganz verschiedenen Methoden Versetzungen in Kristallen sichtbar gemacht worden, so dass an ihrer Existenz nicht mehr gezweifelt werden kann. Anhand von 42 Bei-trägen gibt das vorliegende Buch einen Einblick in den heutigen Stand der Ver-setzungstheorie, ihre Anwendungen in der Festigkeitslehre der Kristalle und

weitere Probleme der Kristallkunde. Besondere Aufmerksamkeit ist dabei folgenden Problemen gewidmet: direkter Nachweis von Versetzungen, Deformation reiner Einkristalle, Verfestigung und Erholung, Legierungswirkung auf die Streckgrenze, Dämpfung und Ermüdung, Strahlenschäden, Whiskerkristalle (Haarkristalle, welche sehr arm an Versetzungen sind und daher eine besonders hohe Festigkeit besitzen). Zahlreiche, zum Teil ausserordentlich gute Abbildungen und die Mannigfaltigkeit der Gesichtspunkte machen dieses Symposium zu einem wertvollen Informationswerk über die Versetzungen. W. EPPRECHT

Elementary Introduction to Molecular Spectra. VON BORGE BAK (North Holland Publishing Company, Amsterdam 1954). 125 S., 35 Fig.; hfl.9,-.

Die Einführung BAKS in die Molekularspektroskopie zeigt sich uns als kleines, aber sehr ansprechendes Buch von nur wenig mehr als 100 Seiten, das aber alles Wesentliche enthält, das ein Nichtspektroskopiker wissen sollte, der sich des Verfahrens der modernen Molekularspektroskopie bedienen will, um Aufschluss über den strukturellen Aufbau der Stoffe zu gewinnen.

Das Büchlein ist ganz auf die Bedürfnisse des Experimentes zugeschnitten. In den beiden ersten Kapiteln, die die Hälfte des Umfanges beanspruchen, werden zunächst die Molekularspektren in ihren wesentlichen Zügen erläutert, soweit dies für ein Verstehen der grundlegenden, im Molekül sich anspielenden Vorgänge und ihrer Wechselwirkungen notwendig ist. Hierauf folgen in den Kapiteln 3, 4 bzw. 5 die Einzelbearbeitungen der Spektren des Mikrowellen-, des infraroten bzw. des sichtbaren und ultraviolettten Frequenzgebietes. Zu Beginn dieser drei Kapitel findet sich je ein Hinweis über die Möglichkeiten, die das entsprechende Frequenzgebiet für die Erkundung des molekularen Aufbaues bietet.

Gerade diese kurzen Hinweise bilden zusammen mit den beigeordneten, in knapper Darstellung gegebenen theoretischen Erläuterungen das wertvolle Gepräge der Schrift. In erster Linie wendet sich die Monographie an Biologen, Chemiker und Ing.-Chemiker, die die Möglichkeiten der Molekularspektroskopie für ihre Forschungen zunutze ziehen wollen; zumal heute die notwendigen Spektralgeräte in zugänglicher Form und einfacher Handhabung zur Verfügung stehen. R. SÄNGER

Der lichtelektrische Effekt und seine Anwendungen. VON H. SIMON und R. SUHRMANN (Springer-Verlag, Berlin 1958). 747 S., 599 Abb.; DM 97.50.

Dieses Buch erscheint als neue Auflage des 1932 unter dem Titel *Lichtelektrische Zellen und ihre Anwendungen* publizierten Buches.

Das Hauptgewicht der Forschung auf dem Gebiet der Festkörperphysik lag in den letzten 25 Jahren bei den Halbleitern. Die erzielten Fortschritte machten eine Revision verschiedener Kapitel notwendig, so vor allem jener über den inneren Photoeffekt, wo einige hervorragende neue Photoleiter, wie PbS, CdS, Ti_2S usw., zu berücksichtigen waren. Über die Si-Zelle wird leider noch nichts gesagt.

Aus diesem umfangreichen Buch werden wir nur die wichtigsten Kapitel erwähnen. Nach einer kurzen phänomenologischen Beschreibung des äusseren, inneren und Sperrschicht-Photoeffektes wird in Kapitel II von R. SUHRMANN der äussere lichtelektrische Effekt im Detail betrachtet. Der Physiker findet dort eine genaue Beschreibung der Theorien von FOWLER und DU BRIDGE über die Temperaturabhängigkeit des Photoeffektes. Weiter werden die Einflüsse der Oberflächenschichten und der Kristallstruktur auf die Energieverteilung der austretenden Elektronen experimentell und theoretisch untersucht. Die Eigenschaften der üb-

lichen Photozellen (K, Cs, K_3Sb , Cs_3Sb , K-Diphenyläther, ...) sind tabelliert und graphisch dargestellt.

Das Kapitel III, *Innere lichtelektrische Effekte*, ist von einem Spezialisten, K. W. BÖER, geschrieben worden. BÖER beginnt wirklich am Anfang und entwickelt die ganze Bändertheorie des festen Körpers, ausgehend vom periodischen Potential, was ihm erlaubt, die Photoleitung und den Sperrschichtphotoeffekt zu erklären.

In den Kapiteln IV und V werden von H. SIMON die Herstellungsmethoden für Photozellen, sowohl mit äußerem wie mit innerem Effekt, von Grund auf angegeben. Wir finden die Beschreibung sogar fast zu gründlich, denn der Autor hätte vom Leser sicher mehr Kenntnisse voraussetzen können. Nicht nur werden die Herstellungsverfahren der Zellen selber erläutert, sondern auch alle dazu gebrauchten Apparate beschrieben. Nur ein Beispiel: Der Aufbau des Pumpstandes von der Vorvakuumpumpe bis zur Getterpumpe, über den Lecksucher, das Alpert-Manometer usw., alles ist der Schilderung zu entnehmen.

Die Kapitel VI bis XII stammen von F. ECKART, W. LEO, R. SUHRMANN und H. SIMON und sind speziellen Effekten und Anwendungen gewidmet: Sekundärelektronen-Verstärkung, Methoden der lichtelektrischen Messungen, Anwendungen der Photozellen in der Photometrie, als Bildwandler, in der Fernsehtechnik, auf dem Tonfilm usw.

Wichtig und besonders wertvoll sind die zahlreichen Literaturangaben (bis und mit 1955) am Ende jedes Kapitels, die vielen Tabellen und detaillierten Zeichnungen von sehr vielen Röhren und Zellen.

P. JUNOD

Introduction to the Physics of Many-Body Systems. VON D. TER HAAR (Interscience Publishers Inc., New York 1958). 127 S.; \$ 1.95.

Das vorliegende kleine Buch hat als Thema den in letzter Zeit besonders im Vordergrund des Interesses stehenden Fragenkreis der Vielkörper-Probleme. Zu diesen Problemen gehören unter anderem so unterschiedliche Dinge wie die Eigenschaften der Kernmaterie, das Verhalten eines Bose-Gases mit abstossenden Kräften als Modell für die merkwürdigen Eigenschaften von He^4 bei tiefen Temperaturen und die von THOMAS und FERMI erfundene statistische Methode zur Behandlung schwerer Atome.

Der Autor gibt eine angenehm lesbare Übersicht über das Gebiet, die eher die mehr intuitiven Methoden und weniger die anspruchsvollen konsequenten mathematischen Durchführungen betont. Etwas anderes wäre ohne eine starke Vergrößerung des Umfanges auch kaum möglich.

Imposant ist das Literaturverzeichnis. Vollständigkeit konnte aber auch hier nicht angestrebt werden. So vermisst man etwa die Arbeiten der Schule von L. VAN HOFE.

Als Einführung kann das kleine Werk empfohlen werden.

R. JOST

Ergebnisse der Hochvakuumtechnik und der Physik dünner Schichten. Herausgegeben von M. AUWÄRTER (Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft mbH, Stuttgart 1957). 282 S., 209 Abb.; DM 52.—.

Das vorliegende, von Dr. M. AUWÄRTER herausgegebene Buch umfasst 19 Sonderbeiträge, welche aus der Feder führender Wissenschaftler stammen. Bei der Zusammenstellung dieser Beiträge ist eine Systematik weder verfolgt noch gewollt. Jeder Beitrag ist entweder eine Originalmitteilung oder ein kritischer Zusammenfassungsbericht über ein bestimmtes Teilgebiet. Unter letzteren gehören die zwei Beiträge: *Die Aufdampfung von dünnen Schichten im Hochvakuum* von W. ESPE

und *Grundlagen und Grenzen vakuumtechnischer Arbeitsverfahren in der Metallurgie* von O. WINKLER. Beide Beiträge geben eine knappe und präzise Darstellung des behandelten Stoffes. Fünf Arbeiten theoretischer und experimenteller Natur sind dem Problem der Interferenzfilter und der Glasentspiegelungsschichten gewidmet. Besonders hervorzuheben ist ein Beitrag von M. AUWÄRTER, R. HAEFER und P. RHEINBERGER über die Schichtdickenmessung mit Hilfe von optischen Interferenzfiltern. Es wird hierbei nicht nur ein neuer Weg zur Messung von Schichtdicken von der Grösse von einigen Ångström angegeben, sondern auch ein Verfahren entwickelt, mit dessen Hilfe Informationen in Form von kleinsten Massendickeunterschieden in einer Aufdampfschicht gespeichert, konserviert und sichtbar gemacht werden können, ähnlich wie bei einer Photoplatte. Die Brauchbarkeit dieser Art des Photographierens wird in einem Beitrag von T. RUF und O. WINKLER über die *Untersuchung der Rückströmung von Öl-Diffusionspumpen mit Hilfe der Lochkamera* sehr anschaulich unter Beweis gestellt. Eine Reihe von Arbeiten beschäftigen sich mit den verschiedenen Aspekten der dünnen Aufdampfschichten, darunter eine sehr aufschlussreiche Abhandlung von G. HASS und A. F. TURNER über die optischen Aufdampfschichten für das Infrarot-Gebiet. Auch die Abhandlung von H. MAYER, H. THOMAS und A. W. ELBEL über die Messung der Lichtabsorption und der Photoemission an monoatomaren Kalium-Aufdampfschichten sei noch erwähnt.

Ohne Zweifel weist das Buch von AUWÄRTER eine Sammlung von sehr wertvollen Abhandlungen auf, und das Studium desselben wird allen Lesern, die sich für die Physik dünner Schichten und für die Hochvakuumtechnik interessieren, neue Anregungen bringen.

E. BAS

Electronic Digital Computers. Von FRANZ L. ALT (Academic Press, Inc., New York 1958). 336 S., 8 Fig.; \$ 10.-.

Die Nachfrage nach Information über das Gebiet der elektronischen digitalen Rechenmaschinen wächst gleichermassen wie die Produktion und der Bedarf an solchen Rechenautomaten. Der Autor will mit dem vorliegenden Buch in überblickartiger Form eine Einführung in die wesentlichen Aspekte dieses Gebietes geben.

Die Einleitung, das erste von 5 Kapiteln, enthält die Beschreibung der elementarsten Begriffe und des Aufbaus des Buches. Im Kapitel 2 werden dem Leser in einem interessanten historischen Überblick die wichtigsten, vor allem amerikanischen Maschinen vorgestellt und ihre charakteristischen technischen und organisatorischen Merkmale erwähnt. Von den verschiedenen Teilen einer Maschine werden lediglich ihre Funktionen beschrieben, so dass für das Verständnis keine technischen Kenntnisse notwendig sind. Alle Maschineneigenschaften, die das Programmieren betreffen, kommen im Kapitel 3 zur Sprache. Es werden Programmierungsbeispiele für verschieden organisierte Maschinen behandelt und ganz kurz das Aufstellen von Flussdiagrammen, Unterprogrammen und die Verwendung der Maschine zu Programmierzwecken gestreift.

Das Kapitel 4 über die Analyse der Probleme darf nicht mit einem Text über numerische Verfahren verglichen werden. Es will nur eine Zusammenstellung und Erklärung der landläufig benützten numerischen Methoden geben für die Berechnung expliziter Funktionen, das Differenzieren und Integrieren, die Lösung von gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen, algebraische Gleichungen, Eigenwertprobleme und nichtlineare Gleichungen.

Im letzten Kapitel zeigen mehrere Beispiele die grosse Anwendungsmöglichkeit digitaler Rechenmaschinen auf den verschiedenen technischen, wissenschaftlichen

und anderen Gebieten, wobei die wesentlichen Eigenschaften der je einem bestimmten Zweck am besten angepassten Maschinen abgeschätzt werden. Am Ende folgt eine Betrachtung über die Organisation eines Rechenbetriebes. Umfangreiche Literaturangaben vermitteln den Zugang zur Spezialliteratur.

FRANZ L. ALT wendet sich mit seinem Buch in erster Linie an Leute, die genötigt sind, sich in das Gebiet der elektronischen Rechenmaschinen einarbeiten zu müssen, und die die Prinzipien, welche dem Entwurf und dem Funktionieren von Rechenmaschinen zugrunde liegen, kennenlernen möchten, also an Physiker, Chemiker, Ingenieure und ähnlich Beschäftigte, die Maschinen zur Lösung ihrer Probleme verwenden können. Er will dem Benützer einer Maschine das Werkzeug in die Hand geben, das ihm die Verständigung mit dem Rechenmaschinen-Spezialisten erlaubt und damit die Möglichkeit gibt, in kurzer Zeit auf irgendeiner Maschine Probleme selbständig zu lösen. Das Buch entspricht einem wirklichen Bedürfnis, und das vom Autor gesteckte Ziel wurde in jeder Hinsicht erreicht. A. SCHAI

Logical Design of Digital Computers. Von MONTGOMERY PHISTER, JR. (John Wiley and Sons, New York 1958). 408 S., 128 Fig., 147 Tab.; \$ 10.50.

Der Autor teilt die Entwurfsarbeiten an einer Rechenmaschine in 3 Gebiete ein: Den Entwurf des ganzen Systems, den logischen Entwurf und den Entwurf der Grundsaltungen. Das vorliegende Buch behandelt ausschliesslich nur den logischen Entwurf von digitalen Rechengерäten. In 12 Kapiteln werden eingehend die Methoden und Techniken beschrieben, die von verschiedenen Fachleuten angewendet werden. Das Buch vermittelt dem Leser die notwendige Information und das Werkzeug, um den vollständigen logischen Entwurf einer Rechenmaschine ausführen zu können; spezielle Kenntnisse werden keine vorausgesetzt. Mit Ausnahme von folgenden Einschränkungen wird das behandelte Gebiet recht tiefgehend dargestellt: Die Untersuchungen werden auf synchrone Schaltungen beschränkt, das bewegliche Komma kommt nicht zur Sprache, und Division und Parallelmaschinen werden nur ganz kurz gestreift.

Wegen der grossen Bedeutung der Booleschen Algebra wird diesem Gegenstand ein ganzes Kapitel gewidmet. Die Boolesche Algebra wird darin als eine deduktive Theorie formal eingeführt. Im folgenden Kapitel werden die Booleschen Funktionen mit verschiedenen Hilfsmitteln vereinfacht (Minimisierung): Mit der Methode von QUINE, der Harvard-Methode und der Veitch-Diagramm-Methode. Die Anwendung der Booleschen Algebra auf die Behandlung von Flipflop-Speicherelementen führt auf sogenannte «difference equations». Es handelt sich dabei im wesentlichen um die logische Untersuchung von Elementen, deren Zustand von früheren Zeitintervallen abhängt (Kapitel 5). Das Huffman-Moore-Modell einer digitalen Rechenmaschine wird in den Kapiteln 6 und 9 erklärt und mit Erfolg auf verschiedene Probleme angewendet. Dieses Modell ist nichts anderes als eine etwas vereinfachte Turing-Maschine. Schlussendlich wird in Kapitel 11 das Leitwerk einer Maschine sowie das Vorgehen beim logischen Entwurf einer vollständigen digitalen Maschine beschrieben.

Von besonderem Wert dieses Buches seien die Abschnitte über die Veitch-Diagramm-Methode, die Aufstellung von «difference equations» für Speicherelemente und das Huffman-Moore-Modell hervorgehoben. Dem Aufbau des Buches wurde die Form eines 1-2semestrigen Kurses gegeben. Dementsprechend wurden zwischen die einzelnen Kapitel Übungsaufgaben eingeflochten sowie die wichtigsten, das jeweilige Kapitel betreffenden Literaturangaben.

Für das Gebiet des logischen Entwurfes von digitalen Geräten stellt das vorliegende Buch einen wertvollen Beitrag dar. A. SCHAI

A Note on the Position of the Centre of Flexure of a Beam of Isotropic Material Having a Section Bounded by a Parabola and a Straight Line

By AMITAVA CHAKRAVORTI, Calcutta, India¹⁾

Nomenclature

x, y, z	rectangular co-ordinates;
l, m, n	direction cosines of outward drawn normal;
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	normal components of stress parallel to x, y, z axes;
$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$	shearing stress components in rectangular co-ordinates;
u, v, w	components of displacement;
$T(x, y)$	stress function in rectangular coordinates;
σ	POISSON'S ratio;
μ	shear modulus;
$\gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}$	shearing strain components in rectangular coordinates.

1. Method of Solution

Let a beam of uniform cross section with a straight edge have one end $z = 0$ fixed and the other end $z = l$ loaded by some distribution of forces that is statically equivalent to a single force W acting parallel to the straight edge. At the end $z = 0$, axis of x is taken parallel to the load, y axis is taken perpendicular to the straight edge and z axis is taken along central line of the beam. Here x and y axes are parallel to principal axes of inertia at the centroid. The origin is at the middle point of straight edge.

Following the semi-inverse method of DE ST. VENANT, we assume

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0 \quad \text{and} \quad \sigma_z = -\frac{W}{I} (l - z) x, \quad (1.1)$$

where $I = \int x^2 dx dy$ over entire cross section.

From equations of equilibrium we get

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \quad (1.2)$$

¹⁾ Department of Mathematics, Brahmananda Keshab Chandra College.

and

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{W}{I} x = 0. \quad (1.3)$$

Equations (1.2) show that τ_{xz} and τ_{yz} are functions of x and y only. Equation (1.3) is satisfied if we assume

$$\tau_{xz} = \frac{\partial T}{\partial y} + S(y) - \frac{W}{2I} x^2, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial T}{\partial x}, \quad (1.4)$$

where $S(y)$ is a function of y to be so chosen as to yield a simple boundary condition. Beltrami-Michell compatibility equations reduce in this case to

$$\nabla^2 \tau_{xz} + \frac{1}{1+\sigma} \cdot \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x \partial z} = 0, \quad \nabla^2 \tau_{yz} = 0.$$

Therefore from (1.4)

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\nabla^2 T(x, y) + \frac{dS}{dy} \right] = \frac{W}{I} \cdot \frac{\sigma}{1+\sigma}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 T(x, y) = 0.$$

Hence, we have

$$\nabla^2 T(x, y) = \frac{\sigma}{1+\sigma} \cdot \frac{W}{I} (y - y_0) - \frac{dS}{dy} - 2\mu\alpha, \quad (1.5)$$

where y_0 is y co-ordinate of centre of inertia of cross section. Local twist at point (x, y) of cross section is

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \gamma_{yz} - \frac{\partial}{\partial y} \gamma_{zx} \right) \\ &= -\frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} \right) = -\frac{1}{2\mu} \left[\nabla^2 T(x, y) + \frac{dS}{dy} \right] \quad [\text{by (1.4)}] \\ &= -\frac{1}{2\mu} \left[\frac{\sigma}{1+\sigma} \cdot \frac{W}{I} (y - y_0) - 2\mu\alpha \right]. \quad [\text{by (1.5)}] \end{aligned}$$

Therefore mean local twist equals α .

We define centre of flexure as position of load point for which the mean local twist α is equal to zero. Then we can take $\alpha = 0$ in (1.5). Now let (\bar{x}, \bar{y}, l) be co-ordinates of centre of flexure. In our case since the load W acts parallel to a principal axis (x axis), hence x co-ordinate of centre of flexure is zero. $\bar{y} = y$ co-ordinate of centre of flexure is given by

$$-\bar{y} W = \iint_K (x \tau_{yz} - y \tau_{zx}) dx dy.$$

Let C denote boundary of cross section and R , the region within C . Then from (1.4)

$$\begin{aligned}
 -\bar{y} W = & \left. \begin{aligned} & \iint_R \left[x \left(-\frac{\partial T}{\partial x} \right) - y \left\{ \frac{\partial T}{\partial y} + S(y) - \frac{W}{2I} x^2 \right\} \right] dx dy \\ & - \iint_R \left[2 T(x, y) + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ -x T(x, y) - x y S(y) + \frac{W}{6I} x^3 y \right\} \right. \\ & \quad \left. - \frac{\partial}{\partial y} \left\{ y T(x, y) \right\} \right] dx dy \\ & = 2 \iint_R T(x, y) dx dy + \int_C y T(x, y) dx \\ & \quad + \int_C \left[-x T(x, y) - x y S(y) + \frac{W}{6I} x^3 y \right] dy \end{aligned} \right\} \quad (1.6) \\
 & \text{(by GREEN'S theorem).}
 \end{aligned}$$

Again we have the boundary condition

$$l \tau_{xz} + m \tau_{yz} = 0,$$

i. e.

$$\frac{dy}{ds} \left[\frac{\partial T}{\partial y} + S(y) - \frac{W}{2I} x^2 \right] - \left(\frac{dx}{ds} \right) \left(-\frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0,$$

i. e.

$$\frac{dT}{ds} + \left[S(y) - \frac{W}{2I} x^2 \right] \frac{dy}{ds} = 0.$$

The function $S(y)$ may be prescribed arbitrarily. We choose $S(y) = x^2 W/2I$ on C so that above condition becomes $dT/ds = 0$. We take $T = 0$ on C since the constant term does not affect the stresses. Then we see that $T(x, y)$ satisfies the differential equation

$$\nabla^2 T(x, y) = \frac{\sigma}{1+\sigma} \cdot \frac{W}{I} (y - y_0) - \frac{dS}{dy} \quad (T = 0 \text{ on } C)$$

and $S(y) = x^2 W/2I$ on C except that $S(y)$ may take any value where $dy/ds = 0$.

Then from above considerations y is simplified and we get from (1.6)

$$\bar{y} = -\frac{2}{W} \iint_R T(x, y) dx dy + \frac{1}{3I} \int_C x^3 y dy. \quad (1.7)$$

2. Section Bounded by a Parabola and a Straight Edge

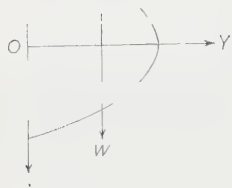
Here we assume $(x + i y) = -i (\xi + i \eta)^2$.

Therefore

$$x = 2 \xi \eta, \quad y = \eta^2 - \xi^2. \quad (2.1)$$

Then $\eta = \pm a$ gives the parabolic curved boundary

$$x^2 = 4 a^2 (a^2 - y). \quad (2.2)$$



The straight boundary is $y = 0$ or $\xi = \pm \eta$.
In this case

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{h^2} &= \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 = 4(\xi^2 + \eta^2), \\ y_0 &= \frac{2 a^2}{5}, \quad I = \frac{32}{15} a^8. \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

In this case on parabolic boundary C

$$S(y) = \frac{W}{2 I} x^2 = \frac{W}{2 I} 4 a^2 (a^2 - y).$$

Therefore $T(x, y)$ satisfies the differential equation

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 T(x, y) &= \frac{\sigma}{1 + \sigma} \cdot \frac{W}{I} (y - y_0) + \frac{2 W a^2}{I} \\ &= \frac{\sigma}{1 + \sigma} \cdot \frac{W}{I} y + \frac{2 W a^2}{5 I} \cdot \frac{(5 + 4 \sigma)}{1 + \sigma}. \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

$T = 0$ on $\eta = a$ and also on $y = 0$, i. e. $\xi = \pm \eta$. (2.4) is satisfied if we assume a particular solution of T ,

$$T_0 = A y (x^2 + 4 a^2 y) + B y^2 + C y, \quad (2.5)$$

where

$$A = \frac{\sigma W}{2 (1 + \sigma) I}, \quad B = \frac{W a^2}{5 I (1 + \sigma)} (5 - 6 \sigma). \quad (2.6)$$

$T_0 = 0$ on $y = 0$. But $T = 0$ on $\eta = \pm a$ also.

Therefore we assume

$$T = T_0 + \sum_{m=0}^{\infty} C_{2m+1} \left[\cosh \frac{(2m+1)\pi\eta}{2a} \cos \frac{(2m+1)\pi\xi}{2a} - \cosh \frac{(2m+1)\pi\xi}{2a} \cos \frac{(2m+1)\pi\eta}{2a} \right].$$

This assumption of T satisfies differential equation (2.4) and gives $T = 0$ on $y = 0$, i. e. $\xi = \pm \eta$.

Since $T = 0$ on $\eta = a$ hence it is necessary that

$$\begin{aligned} 0 &= B \xi^4 - \xi^2 (4 A a^4 + 2 B a^2 + C) + a^2 (4 a^4 A + B a^2 + C) \\ &+ \sum_{m=0}^{\infty} C_{2m+1} \cosh \frac{(2m+1)\pi}{2} \cos \frac{(2m+1)\pi\xi}{2a} \quad (-a < \xi < a). \end{aligned}$$

Putting

$$C = -4 a^4 A - B a^2 = -\frac{W a^4}{5 I} \cdot \frac{(5 + 4 \sigma)}{(1 + \sigma)}, \quad (2.8)$$

we see that the above condition reduces to

$$0 = B (\xi^4 - a^2 \xi^2) + \sum_{m=0}^{\infty} C_{2m+1} \cosh \frac{(2m+1)\pi}{2} \cos \frac{(2m+1)\pi \xi}{2a} \quad (-a < \xi < a).$$

This relation gives

$$C_{2m+1} = \left. \begin{aligned} & \frac{32 B a^4}{(2m+1)^3 \pi^3} \left[5 - \frac{48}{(2m+1)^2 \pi^2} \right] \frac{\sin(2m+1) \frac{\pi}{2}}{\cosh(2m+1) \frac{\pi}{2}} \\ & (m = 0, 1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

where B is given by (2.6). Thus T is obtained. Now from (1.7) substituting the value of T we get coordinates of centre of flexure.

Here

$$\bar{y} = \frac{a^2 (25 + 12 \sigma)}{35 (1 + \sigma)} - \frac{512 a^4}{\pi^3 W} \sum_{m=0}^{\infty} C_{2m+1} \\ \times \left[\frac{\sin(2m+1) \frac{\pi}{2} \cosh(2m+1) \frac{\pi}{2}}{(2m+1)^3} - \frac{3 \sin(2m+1) \frac{\pi}{2} \sinh(2m+1) \frac{\pi}{2}}{\pi (2m+1)^4} \right].$$

Substituting values of C_{2m+1} from (2.9) we get

$$\bar{y} = \frac{a^2 (25 + 12 \sigma)}{35 (1 + \sigma)} - \frac{1536 a^2 (5 - 6 \sigma)}{\pi^6 (1 + \sigma)} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{5}{(2m+1)^6} - \frac{48}{\pi^2 (2m+1)^8} \right] \\ + \frac{4608 a^2 (5 - 6 \sigma)}{\pi^7 (1 + \sigma)} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{5 \tanh(2m+1) \frac{\pi}{2}}{(2m+1)^7} - \frac{48 \tanh(2m+1) \frac{\pi}{2}}{\pi^2 (2m+1)^9} \right].$$

Next using the results [2]²)

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^6} = \frac{\pi^6}{960}, \quad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^8} = \frac{17 \pi^8}{2^5 \cdot 7!}$$

we get

$$\bar{y} = \left. \begin{aligned} & \frac{(12 \sigma - 3) a^2}{7 (1 + \sigma)} + \frac{4608 a^2 (5 - 6 \sigma) a^2}{\pi^7 (1 + \sigma)} \\ & \times \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{5}{(2m+1)^7} - \frac{48}{\pi^2 (2m+1)^9} \right] \tanh(2m+1) \frac{\pi}{2} \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

The infinite series occurring in (2.10) are rapidly convergent.

²) Numbers in brackets refer to References, page 338.

Let us consider those two series.

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^7} \tanh(2m+1) \frac{\pi}{2} = \tanh \frac{\pi}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^7} \tanh(2m+1) \frac{\pi}{2}.$$

Now

$$\tanh \frac{\pi}{2} > 0.9 \quad \text{and} \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^7} \tanh(2m+1) \frac{\pi}{2}$$

is smaller than

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^7} = 0.0005$$

approximately. Hence for practical purposes we may take only first term of series

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^7} \tanh(2m+1) \frac{\pi}{2}.$$

Similarly from the series

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^9} \tanh(2m+1) \frac{\pi}{2}$$

we take first term. Then

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{(12\sigma - 3)a^2}{7(1+\sigma)} + \frac{4608(5-6\sigma)a^2}{\pi^7(1-\sigma)} \left(5 - \frac{48}{\pi^2}\right) \tanh \frac{\pi}{2} \quad (\text{approximately}) \\ &= \frac{(12\sigma - 3)a^2}{7(1+\sigma)} + \frac{0.191(5-6\sigma)a^2}{1+\sigma} \quad (\text{approximately}). \end{aligned}$$

If we take $\sigma = 0.3$ then $\bar{y} = 0.536 a^2$ (approximately). It may be observed that x co-ordinate of centre of flexure is zero.

In conclusion the author expresses his deep gratitude to Prof. B. SEN, D. Sc., F. N. I. for his guidance and helpful suggestions.

REFERENCES

- [1] I. S. SOKOLNIKOFF, *Mathematical Theory of Elasticity*, 2nd ed. (McGraw-Hill Book Company, Inc., 1956), pp. 237-239.
- [2] B. O. PIERCE, *A Short Table of Integrals*, 3rd ed. (Ginn and Company), p. 90.

Zusammenfassung

Die vorliegende Notiz behandelt das Problem der Auffindung des Biegeungszentrums eines aus isotropem Material bestehenden Balkens, der einen durch eine parabolische und eine geradlinige Kante begrenzten Querschnitt besitzt. Die Last ist parallel zur geradlinigen Kante angenommen. Der Verfasser benützt zur Lösung der Aufgabe dasselbe Verfahren, das SOKOLNIKOFF [1] für die Auffindung des Biegeungszentrums eines halbkreisförmigen Balkens verwendete.

(Received: November 13, 1958.)

Der Analog-Interpolator

Von THEODOR ERISMANN, ETH, Zürich

Problemstellung

Das ungeheure Zahlenmaterial, das moderne programmgesteuerte Rechenautomaten zu liefern vermögen, macht die Auswertung der gerechneten Resultate gelegentlich zu einem schwierigen Problem. Dies gilt besonders dort, wo die übliche Ausgabe in Form von Zahlentabellen (allenfalls auf Lochkarten oder ähnlichen Trägern gespeichert) ungeeignet ist, weil eine anschauliche Darstellung des Resultats oder dessen Weiterverarbeitung in Analogform (etwa zur Steuerung von Werkzeugmaschinen) gewünscht wird.

Die bekannten elektrischen Digital-Analog-Umformer sind zwar zur Veranschaulichung der Rechenresultate durchaus geeignet, doch scheiden sie überall dort aus, wo hohe Genauigkeiten erforderlich sind (Kurvenscharen in Rechenblättern, Fräsen von Schaufelprofilen usw.). Zudem erfordert ihre diskrete Arbeitsweise die Berechnung einer sehr grossen Anzahl von Punkten, sofern man nicht nachträglich noch zum Kurvenlineal oder zu ähnlichen behelfsmässigen Interpolationsmitteln greifen will.

Ein Gerät, das die geschilderten Aufgaben zu lösen hat, sollte also die folgenden Eigenschaften in sich vereinigen:

1. Umformung der verarbeiteten Zahlen aus der Codesprache des Rechenautomaten in eine stetig sich ändernde Analogiegrösse.
2. Möglichst geringer Genauigkeitsverlust der Analogdarstellung gegenüber der Digitaldarstellung.
3. Möglichst geringer Zeitverlust zwischen der Eingabe in Digital- und der Ausgabe in Analogform.

Ein solches Gerät wird in der Folge als *Analog-Interpolator* bezeichnet.

Das Interpolationsverfahren

Der Übergang von der diskreten zur stetigen Darstellung erfordert ein Interpolationsverfahren, das nach dem oben Gesagten folgenden Bedingungen genügen muss:

1. Die interpolierte Funktion muss mindestens mit der durch ihre weitere Verwendung bedingten Genauigkeit durch eine beliebige Anzahl von Punkten gelegt werden können.

2. Im Hinblick auf die praktische Verwendung (Oberflächenglätte usw.) muss die interpolierte Funktion stetig sein. Von der zweiten Ableitung an sind Sprünge normalerweise zulässig.

3. Die interpolierte Funktion muss bei laufender Eingabe der Koordinaten für die aufeinanderfolgenden Punkte laufend gebildet werden. Zur Bestimmung ihres Verlaufes zwischen den benachbarten Punkten P_{i-1} und P_i sollte nach Möglichkeit die Kenntnis der Koordinaten vom Anfangspunkt P_0 bis P_i genügen.

Auf den ersten Blick scheint eine aus quadratischen Parabelbogen zusammengesetzte Funktion den erwähnten Bedingungen bei bescheidenem technischem Aufwand zu genügen: Ist der Verlauf der Funktion bis zum Punkt P_{i-1} gegeben, so gibt es eine und nur eine Parabel, die in P_{i-1} bezüglich des Funktionswertes und der ersten Ableitung mit dem vorhergehenden Teilbogen übereinstimmt und durch den nächstfolgenden Punkt P_i geht. Einer Fortsetzung des Verfahrens ad libitum steht also nichts im Wege.

Leider zeigt sich aber bei näherer Betrachtung, dass die beschriebene Parabelbogen-Interpolation eine gewisse Verwandtschaft mit dem Verhalten eines ungedämpft schwingungsfähigen Gebildes aufweist: Liegen beispielsweise in einem gewissen Bereich die Stützpunkte der Funktion äquidistant auf der Abszissenachse, so geht die interpolierte Funktion nicht etwa nach einigen Teilbogen in diese Achse über, sondern pendelt – wie man sich leicht überzeugen kann – in gleichmässig wiederholten Parabelbogen beliebig häufig weiter um dieselbe. Es ist klar, dass ein solches Verfahren, dessen periodische Fehler offenbar sowohl von den Anfangsbedingungen als auch vom Verlauf der interpolierten Punktfolge abhängen, in der Praxis genauigkeitsmässig unkontrollierbar (und unter Umständen sogar instabil) ist und dass nur bei Einführung einer wirksamen «Dämpfung» Aussicht auf Erfolg besteht.

Der Grundgedanke einer solchen Dämpfung geht aus Figur 1 hervor, welche die Umgebung eines Teilbogens darstellt. Hier wird die Parabel nicht durch die Punkte P_{i-1} und P_i , sondern durch zwei um den kleinen konstanten Betrag ϵ nach links verschobene Punkte Q_{i-1} und Q_i gelegt. Zwar wird von Q_{i-1} aus der durch P_i gehende Parabelbogen angesetzt, doch wird dieser nur bis Q_i geführt, von wo der nächste Teilbogen nach P_{i+1} bzw. Q_{i+1} begonnen wird.

Unter Verwendung des aus Figur 1 ersichtlichen Koordinatensystems ξ , η und der ebendort abzulesenden Bezeichnungen Δx und μ erhält man für den Parabelbogen (gegeben durch den Funktionswert $y_{Q_{i-1}}$ im Punkt Q_{i-1} , die nach ξ bzw. x gebildete Ableitung $y'_{Q_{i-1}}$ im gleichen Punkt und den Funktionswert y_{P_i} im Punkt P_i) die Gleichung

$$y = y_{Q_{i-1}} + \xi y'_{Q_{i-1}} + \xi^2 \left(\frac{y_{P_i} - y_{Q_{i-1}}}{\mu^2 \Delta x} - \frac{y'_{Q_{i-1}}}{\mu \Delta x} \right). \quad (1)$$

Damit ist der Verlauf dieses Teilbogens vollständig umschrieben. Insbesondere

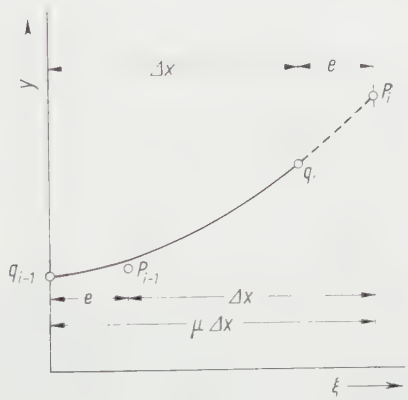
ist die Bestimmung der massgebenden Werte im Punkt Q_i möglich, die sich mit

$$y_{Q_i} = y_{Q_{i-1}} \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2} - y'_{Q_{i-1}} \Delta x \frac{\mu - 1}{\mu} + \frac{y_{Pi}}{\mu^2} \tag{2}$$

und

$$y'_{Q_i} = -y_{Q_{i-1}} \frac{2}{\mu^2 \Delta x} + y'_{Q_{i-1}} \frac{\mu - 2}{\mu} + y_{Pi} \frac{2}{\mu^2 \Delta x} \tag{3}$$

ergeben und als Ausgangsbasis für die Ermittlung des nächsten Teilbogens dienen.



Figur 1

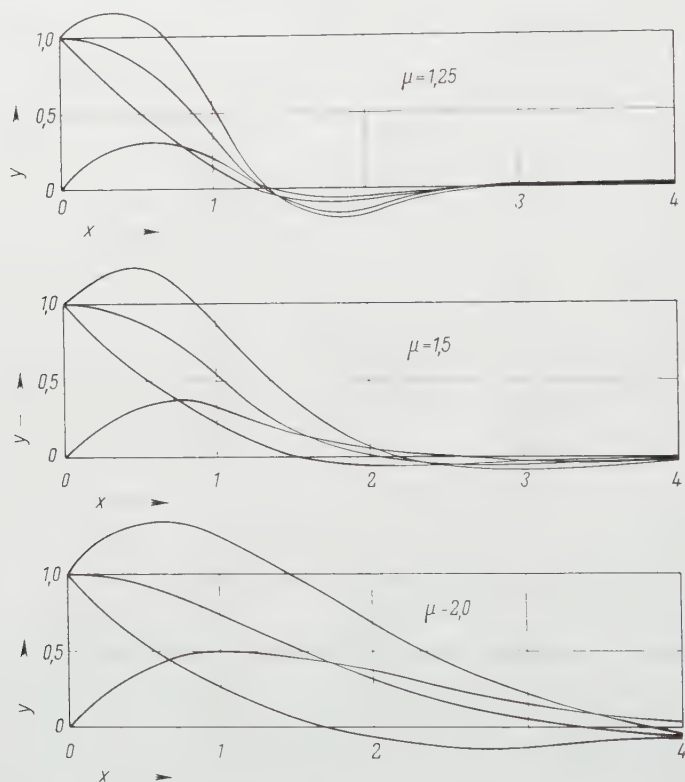
Prinzip der gedämpften parabolischen Interpolation. Erläuterungen im Text.

Trotz ihrer Einfachheit sind diese Formeln für eine umfassende theoretische Analyse des Verfahrens über mehrere Teilbogen äusserst umständlich, weil sie beim Übergang von einem Teilbogen zum nächsten zu immer längeren und undurchsichtigeren Ausdrücken führen. Es erweist sich daher als zweckmässiger, eine Anzahl typischer konkreter Fälle durchzurechnen. Wird dabei systematisch vorgegangen, so können die Ergebnisse hinsichtlich ihres praktischen Wertes denen einer rein theoretischen Analyse gleichgestellt werden.

Zunächst wird der bereits erwähnte Fall einer äquidistanten Punktfolge auf der Abszissenachse betrachtet. Dabei genügt für einen vollständigen Überblick die Variation der drei Parameter μ , y_0 und y'_0 . Wie aus Figur 2 ersichtlich, spielt μ die Rolle eines Dämpfungskoeffizienten, der selbst bei ungünstigsten Anfangsbedingungen ein rasches «Einschwingen» auf den Sollwert gestattet und etwa von $\mu = 1,5$ an einen praktisch aperiodischen Verlauf sicherstellt. Damit sind alle Voraussetzungen für eine vollständige Beherrschung der Verhältnisse gegeben.

Die Durchleuchtung des vorliegenden Falles ist trotz seiner Einfachheit sehr wertvoll, da der Gültigkeitsbereich der gewonnenen Resultate durch die fol-

genden Betrachtungen ganz wesentlich erweitert werden kann: Liegt die Punktfolge nicht auf der Abszissenachse, sondern auf einer beliebigen quadratischen Parabel, so lässt sich leicht zeigen, dass die Differenzen zwischen den Ordinaten der interpolierten Funktion und der durch die Punktfolge gehenden Parabel –



Figur 2

Einschwingen aus verschiedenen charakteristischen Anfangsbedingungen für verschiedene Werte des Dämpfungskoeffizienten μ .

abgesehen von einer sinngemässen Transformation der Anfangsbedingungen – identisch sind mit den Ordinaten der interpolierten Funktion im oben behandelten Fall. Mit anderen Worten: Das rasche Einschwingen auf vernachlässigbare Fehlerwerte und die wirksame Dämpfung bleiben auch dann in vollem Umfang erhalten, wenn die Punktfolge in einem über einige Teilstücke gehenden Bereich auf einer quadratischen Parabel liegt.

Damit ist das Verhalten des Verfahrens für alle diejenigen Fälle abgeklärt, in denen die Fehler nur durch die Anfangsbedingungen entstehen, während

bei richtiger Wahl dieser letzteren die interpolierte Funktion vollständig mit dem durch die Punktfolge gehenden höchstens quadratischen Polynom übereinstimmt. Dagegen bleibt die Frage nach der Güte des Verfahrens bei der Interpolation beliebiger anderer Funktionen noch offen. Für die praktische Beurteilung genügt dabei die Untersuchung des Falles einer kubischen Parabel. In der Tat lässt sich jede beliebige Funktion in einem gewissen Bereich stets um eine Grössenordnung besser durch eine kubische als durch eine quadratische Parabel approximieren.

Die etwas umständliche Berechnung der Fehler bei der Interpolation einer kubischen Parabel kann im Rahmen dieser Abhandlung nicht in extenso behandelt werden. Dagegen seien hier die Ergebnisse einer solchen Untersuchung in knapper Form zusammengestellt:

1. Folgt die zu interpolierende Funktion über mehrere Teilstücke einer kubischen Parabel, so streben die Fehler in den Punkten Q_i rasch gegen einen konstanten Wert Δy_∞ , der durch die Beziehung

$$\Delta y_\infty = y''' \frac{\Delta^3 x}{6} \mu \left(\mu - \frac{1}{2} \right) (\mu - 1) \quad (4)$$

gegeben ist. Diese Fehler haben somit systematischen Charakter, was die Bezeichnung «systematische kubische Fehler» rechtfertigt.

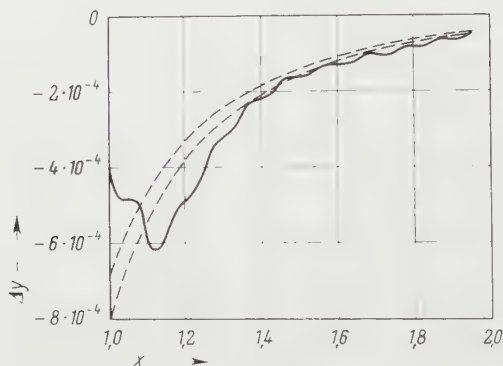
2. Innerhalb jedes Teilbogens überlagert sich dem systematischen kubischen Fehler ein weiterer Fehler δy , der ebenfalls rasch einem für jeden Teilbogen gleichförmigen Verlauf zustrebt und daher als «periodischer kubischer Fehler» bezeichnet werden darf. Dieser Fehler verschwindet für $\xi = 0$ und $\xi = \Delta x$ und erreicht zwei Extremwerte etwa bei $\xi = 0,21 \Delta x$ und $\xi = 0,79 \Delta x$. Der Absolutwert dieses Fehlers an den bezeichneten Stellen kann durch die Formel

$$|\delta y_{\infty \max}| \cong 0,008 y''' \Delta^3 x \quad (5)$$

ausgedrückt werden.

Es überrascht keineswegs, dass beide Fehler – der systematische wie der periodische – der dritten Ableitung der interpolierten Funktion proportional sind; ist doch eben das Vorhandensein dieser Ableitung das Unterscheidungskriterium zwischen der quadratischen und der kubischen Parabel. Dagegen ist es bemerkenswert, dass der periodische Fehler vom «Dämpfungsfaktor» μ unabhängig ist. Im übrigen ist die Amplitude des periodischen Fehlers für die in Frage kommenden Werte von μ in der Grössenordnung von 1,5 stets beträchtlich kleiner als der systematische Fehler. Das Pendeln um diesen letzteren darf als durchaus harmlos bezeichnet werden (für $\mu = 1,5$ ist $\Delta y_\infty \cong 15,6 |\delta y_{\infty \max}|$). Sehr wesentlich ist schliesslich die Abhängigkeit beider Fehler von der dritten Potenz der Schrittlänge Δx , die – bei wenigstens approximativem Kenntnis der dritten Ableitung von y – ein einfaches Mittel zur Beherrschung der Fehlergrössen darstellt.

Im Rahmen der Untersuchung von Punktfolgen, die in x äquidistant sind, bleibt nur noch die Frage offen, wie sich die Interpolation von Funktionen gestaltet, deren dritte Ableitung nicht konstant ist, und zwar insbesondere dann, wenn für die Wahl der Anfangsbedingungen nur die Kenntnis des Funktionswertes und der ersten Ableitung im Anfangspunkt vorausgesetzt wird. Aus einer grösseren Anzahl von Funktionen, die zur Abklärung dieser Frage untersucht wurden, sei als besonders ungünstiger Fall die Hyperbel $y = 1/x$ im Bereich $1 < x < 2$, also unweit der Singularität in $x = 0$, herausgegriffen. Wie



Figur 3

Fehlerverlauf bei Interpolation einer auf der Hyperbel $1/x$ liegenden Punktfolge. Schrittgrösse $\Delta x = 0,1$, Dämpfungskoeffizient $\mu = 1,5$. Anfangsbedingungen durch Funktionswert und erste Ableitung im Punkt $x = 0,9$ gegeben.

Figur 3 zeigt, erreicht auch hier der Fehler sehr rasch Werte, die annähernd im Rahmen der theoretisch vorausbestimmten Grenzen $\Delta y \sim \pm |\delta_{\infty \max}|$ (gestrichelte Kurven in der Abbildung) liegen. Übrigens wird man beachten, dass die Fehler trotz der verhältnismässig grossen Schrittlänge $\Delta x = 0,1$ bereits ausserordentlich klein sind.

Damit darf festgestellt werden, dass das Verfahren – wenigstens für in x äquidistante Punktfolgen – den eingangs formulierten Bedingungen entspricht und insbesondere folgende Eigenschaften besitzt:

1. Weitgehende Unempfindlichkeit gegenüber ungünstiger Wahl der Anfangsbedingungen.
2. Verhältnismässig leichte Bestimmbarkeit der zu erwartenden Fehler.
3. Einfache Mittel zur Reduktion der Fehler auf beliebig kleine Werte (durch Reduktion der Schrittlänge).
4. Möglichkeit zur Glättung zufälliger Unregelmässigkeiten (Streuungen) der Punktfolge (durch Wahl des Dämpfungsfaktors μ).

Ist die Punktfolge in x nicht äquidistant, so sind keine wesentlichen Überraschungen zu erwarten, wenn die Schrittlänge sich nach einem stetigen Gesetz

ändert. Immerhin ist bei der Fehlerabschätzung einige Vorsicht am Platze, da die oben dargelegten Beziehungen nur unter gewissen Umständen in vollem Umfang anwendbar sind. In der Praxis wird man bei zweidimensionalen Problemen allerdings sehr oft eine Parameterdarstellung $x(i)$, $y(i)$ wählen, in der die Ordnungszahl i als gemeinsame unabhängige Veränderliche auftritt und die Schrittlänge mit $h = 1$ konstant ist. Diese Darstellung gestattet zudem die Beherrschung gewisser Fälle, die der expliziten Form $y(x)$ bei parabolischer Interpolation nicht zugänglich sind (Durchgang durch vertikale Tangenten, geschlossene Kurven usw.).

Die technische Verwirklichung

Das Gerät muss offenbar aus zwei Hauptteilen bestehen, nämlich einem Digital-Analog-Umformer und dem eigentlichen Interpolator, an den dann die entsprechenden Registrier- oder Arbeitsgeräte angeschlossen werden.

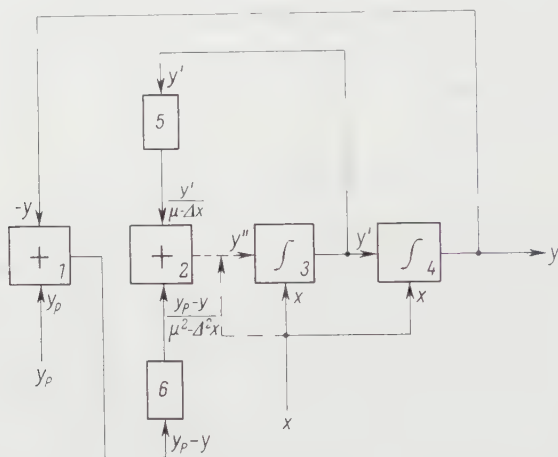
Die technischen Mittel der *Digital-Analog-Umformung* sind bekannt und bedürfen keiner weiteren Erklärungen. Als digitalen Eingang wird man normalerweise nicht den Rechenautomaten selbst, sondern einen geeigneten Zwischenträger (Lochkarte, Magnetband usw.), bei einfacheren Geräten sogar nur eine Tastatur benützen. Da es sich meist um die Steuerung mechanischer Vorrichtungen (Registriergeräte, Werkzeugmaschinen usw.) handeln und in vielen Fällen eine sehr hohe Genauigkeit verlangt werden dürfte, kommt als Analogiegrösse wohl nur der Umdrehungswinkel einer Welle in Betracht, der als einzige leicht verarbeitbare Analogiegrösse durch Wahl eines genügend grossen Übersetzungsverhältnisses eine beliebige Genauigkeit auf beschränktem Raum gestattet.

Der Aufbau des eigentlichen *Interpolators* ergibt sich in einfachster Weise durch Anwendung der Schaltungstechnik für Integrieranlagen: Durch zweimalige Differentiation und anschliessende zweimalige Integration der Beziehung (1) erhält man

$$y = 2 \iint \left(\frac{y_{Pi} - y_{Qi-1}}{\mu^2 \cdot 1^2 x} - \frac{y'_{Qi-1}}{\mu \cdot 1 x} \right) dx^2,$$

woraus ersichtlich ist, dass zur Darstellung von y zwei Integratoren 3 und 4 in der Schaltung gemäss Figur 4 erforderlich sind. Das Schema bedarf nur weniger Bemerkungen zu seiner Erläuterung: Während der Berechnung eines Teilbogens ist y'' konstant, und die Integratoren rechnen daraus bei kontinuierlicher Eingabe von x laufend die interpolierten y -Werte. Die Verbindung zwischen dem Summentrieb 2 und dem Integrator 3 ist während dieses Vorganges unterbrochen (gestrichelte Linie). In einem beliebigen Zeitpunkt wird der nächste Wert für y_P am Summentrieb 1 eingegeben, so dass beim Erreichen des nächsten Punktes der Q -Reihe am Ausgang des Summentriebes 2 der neue Wert für y'' bereitsteht. In diesem Augenblick wird der Antrieb nach x unter-

brochen und durch eine (gemäss der strichpunktierten Linie gemeinsam mit x gesteuerte) geeignete Nachlaufsteuerung die Verbindung zum Integrator 3 hergestellt. Damit ist das Gerät zur Berechnung des nächsten Teilbogens bereit. Die Getriebe 5 und 6 dienen zur Einführung der Konstanten μ und Δx .



Figur 4

Interpolationsschaltung mit stufenlosen Getrieben (Integratoren).

Am Rande sei erwähnt, dass das System von Teilbogen zu Teilbogen selbstkorrigierend wirkt, weshalb die Rechenelemente nur bescheidenen Genauigkeitsforderungen zu genügen brauchen. Ferner ist zu bemerken, dass bei genügend rascher Arbeit der Nachlaufsteuerung für y'' gegebenenfalls mit kontinuierlich fortlaufendem Antrieb nach x gearbeitet werden kann.

Anwendungsmöglichkeiten

Der Analoginterpolator kann in erster Linie zwei Aufgaben erfüllen: Die Veranschaulichung der Resultate digitaler Berechnungen und die Automatisierung gewisser Produktionsvorgänge.

Im ersten Fall wird man das Gerät direkt mit einem geeigneten Registrierapparat koppeln, wobei gegenüber anderen Verfahren vor allem die hohe Genauigkeit ausgenutzt werden dürfte, die es gestattet, hochpräzise Kurvenblätter für nomographische und ähnliche Rechen- und Auswertungsarbeiten herzustellen.

Noch nützlicher dürfte der Einsatz des Analoginterpolators für die Automatisierung von Produktionsvorgängen sein. Insbesondere bei der Herstellung kleiner Stückzahlen (Prototypen und Nullserien) von Leitkurven, Nocken, Schaufelprofilen und ähnlichen Körpern, wo die Anfertigung von Modellen für

Kopierfräsmaschinen sich nicht lohnt, steht ein wesentliches Betätigungsfeld offen. Dabei kann der Interpolationsvorgang entweder einmal durchgeführt und das Resultat in kontinuierlicher Weise (etwa mittels hochpräziser polydromer Funktionsdarstellung) auf einem analog arbeitenden Zwischenträger registriert werden, worauf es bei der Herstellung jedes Stückes durch eine mit der Werkzeugmaschinensteuerung verbundene geeignete Abtastvorrichtung abgetastet wird. Oder aber der Analoginterpolator wird selber zu einem Teil der Werkzeugmaschinensteuerung und führt die Interpolation – gesteuert von einem digitalen Zwischenträger (etwa einem Stoss Lochkarten) – bei der Herstellung jedes Stückes von neuem durch. Angesichts der zahlreichen Argumente, die sich zugunsten beider Lösungen anführen lassen, wird die Praxis zeigen müssen, welche die grösseren Aussichten auf einen dauernden Erfolg besitzt.

Summary

The paper deals with a new method for transforming digital data tables into continuous shaft rotations. The method is characterized by a special type of parabolic interpolation incorporated into the analog part of the machine and conceived in a way to allow for perfect stability and smoothness of output. Formulae are given for predetermining the errors of the system for interpolating any desired function.

(Eingegangen: 8. Dezember 1958.)

The Dynamics of Turbo-Flow

By FAUSTO G. GRAVALOS, Philadelphia, USA¹⁾

Foreword

This work is essentially a dynamic analysis of the steady, axially symmetric flow of an inviscid, incompressible fluid through a turbo-machine.

From the point of view of dynamics, the condition of axial symmetry makes it necessary to assume a field of forces physically equivalent to the presence of the blade row. This concept of force field appears – through rather vaguely – first in LORENZ' [1]²⁾. VON MISES [2]¹⁾ defined the axial symmetric turbo-flow model by means of purely kinematic concepts; his equation has been quoted often in recent literature, but only MEYER [3] and MARBLE [4] show a true understanding of its meaning.

¹⁾ Consulting Engineer, MSVD General Electric Company, Philadelphia, Pa., USA. (This work, finished in August 1953, was done while the author was at the Aircraft Gas Turbine Division of the General Electric Company, Cincinnati, Ohio.)

²⁾ Numbers in brackets refer to References, page 380.

From a physical point of view, the turbo-flow problem under the above hypothesis – is reduced to the proper definition of the force field, \mathbf{F} , so as to represent a blade row.

From an analytical standpoint, the problem is to set down the conditions of compatibility between the equation of continuity and the three Euler equations.

In the last years many attempts have been made to solve this problem. The writer showed [5], that if the component of \mathbf{F} along the normal to the streamlines is zero, the problem reduces to the solution of STOKES' stream function and the integration of a set of ordinary differential equations. Naturally, this hypothesis cannot represent the general case.

What has been missing is a clear-cut formulation of the problem. This is accomplished in part 4; to do so, it is necessary to analyze the geometric structure and the dynamic characteristics of potential force flows. This is done in part 3. From this study, there result two possible generalizations of potential force flows:

- (1) *von Mises flows;*
- (2) *quasi-potential flows.*

This classification results from the manner in which a 'blade' is defined. When the flow is Lorenz – i. e. when the constant in EULER'S integral does not vary with ψ – both types of flows coincide. Therefore, the solution of quasi-potential force fields given here implies the solution of VON MISES' equation.

The study of flows with the initial assumption that \mathbf{F} be equal to $\alpha(r, z) [\text{grad } \theta - f(r, z)]$ appears in GOLDSTEIN [6], who deals with the direct problem for radial blades and in MONROE'S [7] thesis. These authors are, however, not concerned with the problem as stated here.

Parts 1 and 2 are of an introductory nature. Part 2, however, is essential to the understanding of the vorticity field.

In part 5, where an illustrative example is worked out, the important role that numerical analysis plays in modern technology is brought to the surface.

Nomenclature

Symbol		Dimensions
a	a constant	$L^2 T^{-2}$
B	blade surface	0
\mathbf{C}	velocity vector	LT^{-1}
C	speed	LT^{-1}
C_a	average axial velocity	LT^{-1}
d	diameter	L
\mathbf{F}	force per unit mass	LT^{-2}
f	blade shape function	0

Symbol		Dimensions
g	angular momentum per unit mass ($g = C_\theta r$)	$L^2 T^{-1}$
h	blade height	L
H	$= \frac{1}{2} C^2 + \int \frac{dp}{\rho}$ BERNOULLI's constant (stator)	$L^2 T^{-2}$
H^*	$= \frac{1}{2} C^2 + \int \frac{dp}{\rho} - \omega C_\theta r$ BERNOULLI's constant (rotor)	$L^2 T^{-2}$
k	a constant	$L^2 T^{-2}$
K	a parameter	$L^{-1} T^{-1}$
p	pressure	$ML^{-1} T^{-2}$
r	radius, distance from axis	L
R_0	outer radius	L
R_i	hub or inner radius	L
s	arc length	L
t	time	T
\mathbf{u}	a unit vector	depending on use
\mathbf{W}	relative velocity	LT^{-1}
α	load function	$L^2 T^{-2}$
Γ	family of surfaces	0
δ	a parameter	0
ζ	r -component of vorticity	T^{-1}
η	θ -component of vorticity	T^{-1}
θ	angle or direction	0
κ	a parameter	0
ξ	z -component of vorticity	T^{-1}
π	the number	0
ρ	density	ML^{-3}
Φ	a function	$L^{-1} T^{-1}$
φ	direction or angular coordinate in rotors	0
ψ	stream function	$L^3 T^{-1}$
ω	angular velocity	T^{-1}
$\boldsymbol{\Omega}$	vorticity vector	T^{-1}
Ω	vorticity	T^{-1}

The subscripts on C , W , and F indicate components of \mathbf{C} , \mathbf{W} , and \mathbf{F} along the corresponding directions. Use has been made of $C_r = W_r$, $C_z = W_z$. Subscripts on \mathbf{u} indicate the direction of the unit vector. Subscripts on any other letter indicate the derivative with respect to the subscript, with the exception

of the subscripts $o, i, 1$, and 2 , the meaning of which is specified in the text. The total time derivative, d/dt is sometimes referred to as material derivative. This unnecessary terminology has been avoided.

1. Geometric Preliminaries

1.1 Cylindrical Coordinates

A stationary $-r, \theta, z-$ and a moving $-r, \varphi, z-$ system of cylindrical coordinates will be used. The space orientation is defined by the cyclic order $r, \theta, z-$ or $r, \varphi, z-$ so that from r the positive sense of rotation is from θ to z ; from θ , the positive sense of rotation is from z to r , etc.

These two systems of coordinates are related by

$$\theta = \varphi + \omega t, \quad \omega = \text{angular velocity} \quad (1.1)$$

and the homologous components of any vector \mathbf{A} in space are the same in both systems.

With this convention, the components of $\boldsymbol{\Omega} = \text{curl } \mathbf{C}$ are given, in the axially symmetric case, by

$$\xi = -\frac{1}{r} g_z, \quad (1.2)$$

$$\eta = \frac{\partial C_r}{\partial z} - \frac{\partial C_z}{\partial r}, \quad (1.3)$$

$$\zeta = \frac{1}{r} g_r. \quad (1.4)$$

Since the choice of sign in the definition of the stream function

$$C_r = \frac{1}{r} \psi_z, \quad (1.5)$$

$$C_z = -\frac{1}{r} \psi_r \quad (1.6)$$

is essentially arbitrary and it determines the sign in the Stokes' equation

$$\psi_{rr} - \frac{1}{r} \psi_r + \psi_{zz} = r \eta \quad (1.7)$$

obtained by expressing η in terms of ψ , it will be shown that this arbitrariness is only apparent.

At the outset the sense of flow, a physical data, from left to right or from right to left, determines uniquely the sign of the stream function ψ . If the system is clockwise, ψ is positive (Figure 1a). For the other case ψ is negative

(Figure 1*b*). In both cases, the sense of increasing ψ , given by \mathbf{u}_ψ , is obtained by a negative $\pi/2$ rotation of the vector \mathbf{C}_M , i. e.,

$$\mathbf{u}_\psi: \left(-\frac{C_z}{C_M}, \quad 0, \quad -\frac{C_r}{C_M} \right). \quad (1.8)$$

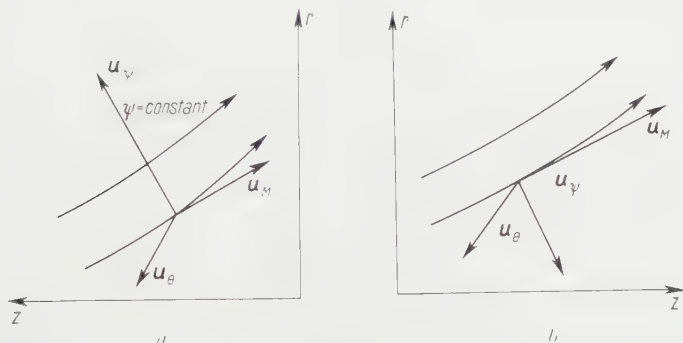


Figure 1

(a) Clockwise; (b) counterclockwise.

This can be proven easily. If ds_ψ indicates the lineal element along the \mathbf{u}_ψ direction, the differential of ψ along \mathbf{u}_ψ is given by

$$d_\psi \psi = [\psi_r \cos(u_\psi, r) + \psi_z \cos(u_\psi, z)] ds_\psi$$

and use of (1.5), (1.6) and (1.7) yields,

$$\text{grad}_\psi \psi = r C_M \quad (1.9)$$

an essentially positive quantity.

The positive sense corresponding to η in both cases, (a) and (b), is shown in Figure 2, and it is seen that the choice of orientation in space and the selection

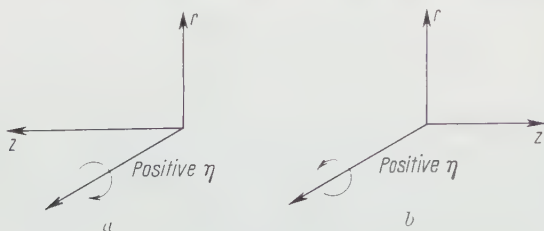


Figure 2

of sign in (1.5) and (1.6) are irrelevant and, therefore, (1.7) relates ψ and η in a unique manner, where both ψ and η have definite physical meaning as to sign, direction of flow and sense of rotation.

1.2 Natural Coordinates

In this system the coordinate lines in the meridional planes, $\theta = \text{const}$, are given by $\psi(r, z) = \text{const}$ and the family of curves $M(r, z) = \text{const}$ normal to ψ . The third direction θ is the normal to $\theta = \text{const}$; unit vector $\mathbf{u}_\theta: (0, 1, 0)$.

Taking for positive sense along the ψ -curves that of the flow, the corresponding unit vector is

$$\mathbf{u}_M: \left(\frac{C_r}{C_M}, \quad 0, \quad \frac{C_z}{C_M} \right) \quad (1.10)$$

and for positive sense along the M -curves that of increasing ψ , the unit vector is \mathbf{u}_ψ of (1.8) and the cyclic order $\mathbf{u}_M, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{u}_\psi$ gives the same orientation of the space as r, θ, z in all cases.

In this system

$$\mathbf{C}: (C_M, C_\theta, 0), \quad (1.11)$$

$$\mathbf{W}: (C_M, W_\theta, 0) \quad (1.12)$$

and the components of $\mathbf{\Omega}: (\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta})$ in this system are easy to obtain from (1.2), (1.3), (1.4), (1.8) and (1.10)

$$\bar{\xi} = \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{u}_M = \frac{1}{r} \text{grad}_\psi g = -C_M g_\psi, \quad (1.13)$$

$$\bar{\eta} = \eta, \quad (1.14)$$

$$\bar{\zeta} = \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{u}_\psi = \frac{1}{r C_M} \cdot \frac{d}{dt} g. \quad (1.15)$$

As it is shown in Figure 1, the selection of sense in a natural system determines the sense that must be given to the corresponding system of cylindrical coordinates.

2. The Force Field

2.1 General Properties

If an axially symmetric flow is to provide a model of the flow through a turbo-machine, it is necessary to assume the existence of a field of forces \mathbf{F} , acting upon the fluid and replacing a given blade row. The angular component F_θ of \mathbf{F} must naturally be different from zero.

From a physical point of view the problem is then to define adequately the force field \mathbf{F} so as to represent a blade row.

Since the fluid is assumed inviscid, the force field must be non-dissipative, i. e., it must do no work in the absolute motion through a stator-field, or in the relative motion through a rotor-field.

Since

$$\mathbf{C} \times \boldsymbol{\Omega} - \mathbf{W} \times \boldsymbol{\Omega} = \omega \operatorname{grad} g, \quad (2.1)$$

the vectorial equation of motion is, for both stators and rotors,

$$\operatorname{grad} H^* = \mathbf{W} \times \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{F}. \quad (2.2)$$

However, for the motion through a stator field it is more convenient to write

$$\operatorname{grad} H = \mathbf{C} \times \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{F}. \quad (2.2a)$$

By dot multiplication in (2.2) and (2.2a) by \mathbf{W} and \mathbf{C} respectively, there results

$$\mathbf{W} \cdot \operatorname{grad} H^* = 0$$

and

$$\mathbf{C} \cdot \operatorname{grad} H = 0.$$

Consequently

$$H^* \equiv H^*(\psi) \quad (2.3)$$

and

$$H \equiv H(\psi). \quad (2.3a)$$

The converse is also true, and it may be proven by retracing the above steps, so that the following statement holds:

In the motion through a rotor, $H^ \equiv H^*(\psi)$, and in the motion through a stator, $H \equiv H(\psi)$ represent the necessary and sufficient conditions for the force field to be non-dissipative.*

2.2 The Force Field and the Vorticity Field

First the case of rotors will be considered and (2.2) will be written in scalar form.

$$0 = W_{\varphi} \bar{\xi} + F_M, \quad (2.4)$$

$$0 = -C_M \bar{\xi} + F_{\theta}, \quad (2.5)$$

$$\operatorname{grad}_{\psi} H^* = C_M \bar{\eta} - W_{\varphi} \bar{\xi} + F_{\psi}. \quad (2.6)$$

Then, take the tangent plane to a streamsurface at a point O . Evidently, this plane is determined by the tangent to the meridional streamline through O and the whirl direction, as it is shown in Figure 3 below.

The vorticity field and the force field may be decomposed into two parts, along \mathbf{u}_{ψ} and on the tangent plane,

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}_{\psi} + \boldsymbol{\Omega}_t, \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}_{\psi} + \mathbf{F}_t.$$

In natural coordinates,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega}_t &: (\xi, \eta, 0), \quad \boldsymbol{\Omega}_\psi: (0, 0, \bar{\zeta}); \\ \mathbf{F}_t &: (F_M, F_\theta, 0), \quad \mathbf{F}_\psi: (0, 0, F_\psi).\end{aligned}$$

From (2.4) and (2.5), it follows immediately that if $F_\theta \neq 0$, then $\bar{\zeta} \neq 0$ and consequently $F_M \neq 0$, so that both components of \mathbf{F}_t are different from zero if $\bar{\zeta}$ is different from zero. This relation will be termed 'physical equivalence' since the presence of one implies the other, and conversely. *It is clear that \mathbf{F}_t and $\boldsymbol{\Omega}_\psi$ are physically equivalent.* $\boldsymbol{\Omega}_\psi$ will be termed the *normal component of vorticity*. The relation between the other two vectors, \mathbf{F}_ψ and $\boldsymbol{\Omega}_t$, is not so

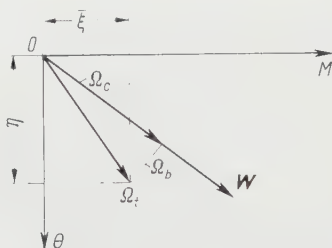


Figure 3

simple. In the tangent plane, $\boldsymbol{\Omega}_t$ (Figure 3) may, in turn, be decomposed along and in the normal direction to the relative velocity,

$$\boldsymbol{\Omega}_t = \boldsymbol{\Omega}_c + \boldsymbol{\Omega}_b$$

and since $\mathbf{W} \times \boldsymbol{\Omega}_c = 0$, equation (2.6) may be rewritten,

$$\text{grad}_\psi H^* = W \boldsymbol{\Omega}_b + F_\psi, \quad (2.6')$$

where $\boldsymbol{\Omega}_b$ has a sign, positive or negative, depending on the sense of the trihedron $\mathbf{u}_\psi, \mathbf{u}_b, \mathbf{u}_c$ with respect to $\mathbf{u}_M, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{u}_\psi$. The component $\boldsymbol{\Omega}_c$ of the vorticity along the relative velocity does not enter into the equations of motion and will be termed *The Beltrami Component of $\boldsymbol{\Omega}$* . The component $\boldsymbol{\Omega}_b$ will be called the *binormal component* of $\boldsymbol{\Omega}$. These directions are not parallel to the normal and binormal of the streamlines, except in exceptional cases.

In regard to $\boldsymbol{\Omega}_b$ and F_ψ two cases are possible.

- (I) If $H^* \equiv 0$, *Lorenz flows*, then $\boldsymbol{\Omega}_b$ and F_ψ are physically equivalent.
- (II) If $H_\psi^* \neq 0$, a *first binormal component* of $\boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{\Omega}_{b_1}$, is defined such that,

$$W \boldsymbol{\Omega}_{b_1} = H_\psi^*$$

which is 'free' vorticity and requires the presence of no forces, and a *second binormal component* of $\mathbf{\Omega}$, $\mathbf{\Omega}_{b_2}$, such that

$$\nabla \mathbf{\Omega}_{b_2} = -F_v \quad \text{with} \quad \mathbf{\Omega}_{b_1} + \mathbf{\Omega}_{b_2} = \mathbf{\Omega}_b,$$

physically equivalent to F_v .

This analysis may now be summarized, and free and bound vorticity properly defined:

If the flow is a Lorenz flow, $H^ \equiv 0$, the field of forces \mathbf{F} is physically equivalent to a system of bound vorticity along the normal and binormal directions. In this case, the free vorticity is the Beltrami component of $\mathbf{\Omega}$.*

If the flow is not a Lorenz flow, $H^ \neq 0$, the field of forces \mathbf{F} is physically equivalent to a system of bound vorticity made up of the normal and the second binormal components of $\mathbf{\Omega}$. The free vorticity is the sum of the Beltrami and the first binormal components of $\mathbf{\Omega}$.*

In both cases the free vorticity represents the initial values for HELMHOLTZ' equation

$$\frac{d}{dt} \mathbf{\Omega} = (\mathbf{\Omega} \nabla) \mathbf{C}$$

ruling the variation with time of $\mathbf{\Omega}$ outside the force field.

In a stator field the same analysis applies if the Beltrami component is defined as the component of $\mathbf{\Omega}$ along \mathbf{C} , H is substituted for H^* , and the so called binormal components are along the normal to \mathbf{C} , instead of \mathbf{W} , on the tangent plane.

3. Dynamic Classification of Turbo-Flows

3.1 Potential Force Fields

As in classical mechanics, turbo-flow fields may be classified as *potential* and *non-potential*. Taking the curl in both sides of equation (2.2) or (2.2a), there results

$$\text{curl}(\mathbf{C} \times \mathbf{\Omega}) + \text{curl} \mathbf{F} = 0 \quad (3.1)$$

in both cases. If \mathbf{F} is a potential field,

$$\text{curl}(\mathbf{C} \times \mathbf{\Omega}) = 0. \quad (3.2)$$

That (3.2) is the characteristic vectorial equation of potential force flows may be easily proven. The direct theorem, 'if a fluid mass moves steadily under the influence of a potential force field, then (3.2) holds', has been proven above.

The converse, 'if (3.2) holds and $\partial \mathbf{C} / \partial t = 0$, the fluid motion defined by the velocity \mathbf{C} takes place under the influence of a potential force field', will be proven immediately.

Taking the curl on both sides of the identity

$$\frac{d}{dt} \mathbf{C} = \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{1}{2} C^2 \right) - \mathbf{C} \times \boldsymbol{\Omega}$$

it follows that

$$\text{curl} \left(\frac{d}{dt} \mathbf{C} \right) = 0,$$

i. e., the curl of the acceleration is zero. Hence, the resultant of the forces acting on the fluid is a potential force field. Since the pressure forces per unit mass are given by $-\text{grad} \int dp/\rho$, the remaining forces, i. e., the force field \mathbf{F} , must also be potential.

Consequently, from the three scalar equations corresponding to (3.1), which in cylindrical coordinates read

$$-\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{d}{dt} g \right) = \text{curl}_r \mathbf{F}, \quad (3.3)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\eta}{r} \right) - \frac{2}{r^4} g g_z + \frac{1}{r} \cdot \text{curl}_\theta \mathbf{F}, \quad (3.4)$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{d}{dt} g \right) = \text{curl}_z \mathbf{F}, \quad (3.5)$$

the characteristic equations of potential-force fields are found to be

$$\frac{d}{dt} g = a, \quad (3.6)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\eta}{r} \right) = \frac{2}{r^4} g g_z, \quad (3.7)$$

where a is a spatial constant. Thus, (3.6) and (3.7) are the characteristic equations of potential force flows in kinematic terms.

For the axially symmetric case, from the condition $\text{curl} \mathbf{F} = 0$, the characteristic conditions in scalar terms will now be deduced.

From $\text{curl}_\theta \mathbf{F} = 0$ it follows that there must exist a function, $f(r, z)$, such that,

$$F_r = f_r \quad \text{and} \quad F_z = f_z.$$

From $\text{curl}_r \mathbf{F} = 0$ and $\text{curl}_z \mathbf{F} = 0$ it follows that

$$\frac{\partial}{\partial r} (r F_\theta) = 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial}{\partial z} (r F_\theta) = 0$$

so that

$$r F_\theta = k \quad (k = \text{const}).$$

Since, in cylindrical coordinates, $\text{grad}_\theta \Gamma = \Gamma'_\theta / r$, there exists a family of surfaces of the form,

$$\Gamma \equiv k [\theta - f(r, z)] \quad (3.8)$$

such that

$$\mathbf{F} = \text{grad} \Gamma. \quad (3.9)$$

Inasmuch as $\theta = \varphi + \omega t$, for rotors Γ will be taken in the form

$$\Gamma \equiv k [\varphi - f(r, z)] \quad (3.10)$$

and (3.9) will be reserved for stators. The converse is also true, if the force field is given by (3.9) with Γ as in (3.10), or as in (3.8), the force field is potential and axially symmetric, (3.10) and (3.9), or (3.9) and (3.8), are the characteristic conditions, in dynamic terms, for the flow to be a potential force flow. The k in (3.10) is the same constant as the a in (3.6).

3.2 Properties of Potential Force Flows

To investigate the different properties of potential force flows, the scalar equations corresponding to (2.2) will be written in cylindrical coordinates.

$$H_r^* = \frac{W_\varphi}{r} g_r - \eta C_z - a j_r, \quad (3.11)$$

$$0 = -\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dt} g + \frac{a}{r}, \quad (3.12)$$

$$H_z^* = \frac{W_\varphi}{r} g_z + \eta C_r - a j_z. \quad (3.13)$$

(3.12) simply says that

$$\frac{d}{dt} g = \text{const.}$$

Since for axially symmetric flows the value of $2\pi g$ at any point P of the field is the circulation about the circle through P normal to and with center at the axis, the difference in the time rate of circulation about any two such circles is zero. These circles are circuits of the second kind, i. e., not reducible to a point within the field. For a circuit of the first kind, reducible to a point within the field, KELVIN's theorem holds in its standard form, i. e., the time rate of circulation about a circuit of the first kind is zero.

By use of these results, it is proven in standard text books that, if the force field is potential, the vortex lines move with the fluid.

It will be shown that to have the a of equation (3.12) equals a constant is a characteristic property of axially symmetric potential force flows. Other properties of this type of flow will now be investigated.

(A) *The Γ -Family of Curves*: The equation of motion (2.2), with \mathbf{F} from (3.9) and (3.10) reads

$$\text{grad } H^* = \mathbf{W} \times \boldsymbol{\Omega} + a \text{ grad } [\varphi - f(r, z)]. \quad (2.2')$$

$$\mathbf{W} \cdot \text{grad } H^* = \frac{d}{dt} H^* = 0 \quad (2.3)$$

therefore, dot multiplication by \mathbf{W} in (2.2') yields

$$\frac{d}{dt} [\varphi - f(r, z)] = 0,$$

i. e., the surfaces $\varphi - f(r, z) = \text{const}$ contain the relative streamlines. The whirl components of the relative and the absolute velocity are, therefore, given by the following expressions,

$$W_\varphi = (f_r C_r + f_z C_z) r, \quad (3.14)$$

$$C_\theta = (f_r C_r + f_z C_z) r + \omega r. \quad (3.15)$$

Since, in potential force flows, the vortex lines move with the fluid, the Γ -surfaces will be made up of vortex lines if they contain one. From (2.2) it is clear that the surfaces

$$B \equiv H^* - \Gamma = \text{const} \quad (3.16)$$

contain both the vortex and the streamlines. However, only when $H_\psi^* = 0$ the surfaces Γ will also contain the vortex lines. Evidently, the condition

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \text{grad } \Gamma = 0$$

implies, from equation (2.2), that

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \text{grad } H^* = \boldsymbol{\Omega} \cdot a \text{ grad } [\varphi - f(r, z)].$$

Since $a = \text{grad } \psi \cdot \boldsymbol{\Omega}$ and $\text{grad } H^* = H_\psi^* \cdot \text{grad } \psi$, it is clear that $\boldsymbol{\Omega} \cdot a \text{ grad } \Gamma$ can only be zero when $H_\psi^* \equiv 0$.

The structure of a potential force flow field may be described as follows:

(i) *If the flow is Lorenz, there exists a family of surfaces Γ made up of vortex and streamlines. Furthermore, these surfaces are the equipotential surfaces of the force field \mathbf{F} .*

(ii) *If the flow is not Lorenz, the family of equipotential surfaces of the force field \mathbf{F} is made up of streamlines. However, the family of surfaces made up of both the vortex and the streamlines is given by the family B of (3.16).*

For a stator field the same conclusions hold if in the above statements the absolute velocity is written instead of the relative, and the I' -family is given by (3.8) instead of (3.10).

(B) *Analytical Properties*: If in (3.7) the differentiation as to t is carried out, and use is made of (1.5) and (1.6), there results

$$\frac{1}{r^2} (\eta_{lr} \psi_z - \eta_z \psi_r) - \frac{1}{r^3} \eta_l \psi_z = \frac{2}{r^4} g \bar{g}_z. \quad (3.17)$$

Changing independent variables from r, z , to r, ψ ,

$$\psi = \psi(r, z), \quad r = r \quad (3.18)$$

a transformation³⁾ with discriminant

$$\frac{D(\psi, r)}{D(r, z)} = -\psi_z$$

and, therefore, valid for all non-cylindrical flows, $C_r = \psi_z/r = 0$. Use of (3.16) on any function, say η , gives

$$\eta_{lr} = \bar{\eta}_{lr} + \bar{\eta}_{l\psi} \psi_r, \quad \eta_z = \bar{\eta}_{l\psi} \psi_z$$

so that, in the new variables z and ψ , (3.17) becomes

$$\bar{\eta}_{lr} - \frac{1}{r} \bar{\eta}_l - \frac{2}{r^2} \bar{g} \bar{g}_\psi = 0,$$

the general solution of which is given by

$$\bar{\eta}_l = r \left[K(\psi) - \frac{1}{r^2} \bar{g} \bar{g}_\psi + \int \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (\bar{g} \bar{g}_\psi) dr \right]. \quad (3.19)$$

If to (3.13) is applied the transformation (3.16) — i. e., using (1.5) and dividing by ψ_z — there results

$$H^* = \frac{1}{r^2} g \bar{g}_\psi - \omega \bar{g}_\psi + \frac{\eta_z}{r} - a f_\psi. \quad (3.20)$$

It is easy to show that (3.19) and (3.20) are identical if $K(\psi) = H_\psi^*$. To prove this, it is enough to show that

$$\int \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (\bar{g} \bar{g}_\psi) dr \equiv \omega \bar{g}_\psi + a \bar{f}_\psi. \quad (3.21)$$

³⁾ This is a variation of a transformation first used by von Mises in viscous flow problems. See *Bemerkungen zur Hydrodynamik*, Z. angew. Math. Mech. 7 (1927). This type of transformation will be used later on and plays an essential part in the reduction of the equation for the blade.

Taking derivatives with respect to r in both sides

$$\frac{1}{r^2} [\bar{g} \bar{g}_{r\psi} + \bar{g}_r \bar{g}_\psi] \equiv \omega \bar{g}_{r\psi} + a \bar{f}_{r\psi}. \quad (3.22)$$

Writing \bar{g} in terms of \bar{f}

$$\bar{g} = \bar{f}_r \bar{C}_r r^2 + \omega r^2$$

and taking derivatives with respect to ψ

$$\bar{g}_\psi = \bar{f}_{r\psi} \bar{C}_r r^2 + \bar{f}_r r^2 \frac{\partial \bar{C}_r}{\partial \psi}, \quad (3.23)$$

$\bar{f}_{r\psi}$ may be eliminated between (3.22) and (3.23). There results, taking into account that $a = g_r \bar{C}_r$,

$$g_r \bar{C}_r \left[g_\psi - \bar{f}_r r^2 \frac{\partial \bar{C}_r}{\partial \psi} \right] - \bar{C}_r [g \dot{g}_{r\psi} + \bar{g}_r \dot{g}_\psi] = [g - \bar{f}_r \bar{C}_r r^2] \bar{C}_r \dot{g}_{r\psi}.$$

This equation may be reduced to

$$\bar{f}_r \frac{\partial}{\partial \psi} (\bar{C}_r \bar{g}_r) \equiv 0$$

which is an identity. Therefore, in an axially symmetric flow field with H^* — or H — a given function of ψ , the condition that the time rate of the angular momentum be everywhere constant is sufficient for the force field to be potential.

This characteristic property holds without any change for potential flows through a stator.

3.3 Non-Potential Force Flows

It was seen that if the flow is a potential force flow, there exist two one-parameter families of surfaces dynamically significant. The Γ -surfaces,

$$\Gamma \equiv a [\varphi - f(r, z)] = \text{const}$$

made up of streamlines, and to which the force field is normal; and the B -surfaces,

$$B \equiv [H^* - I^*] = \text{const}$$

made up of vortex and streamlines. If H_ψ^* is zero, i. e., if H^* is everywhere constant, then both families of surfaces coincide.

Consequently, in the general case, $H_\psi^* \neq 0$, for a potential force flow, one is at a loss as to what family of surfaces should be taken as the set of 'blades' in

the axially symmetric flow pattern. Since these two properties are not individually characteristic, potential force flows may be generalized in two directions.

(A) *von Mises Flows*: In 1909 — see reference [2] — VON MISES defined the 'blade' in the axially symmetric flow pattern by the condition that it should be made up of vortex and streamlines.

The conditions for a family of surfaces

$$B \equiv \varphi - f(r, z) = \text{const}$$

to exist and verify VON MISES' definition of 'blades' may be obtained — see reference [3] — from equation (2.2) as follows:

Dot multiplication by \mathbf{W} equals zero gives

$$\mathbf{W} \cdot \text{grad } B = -C_r f_r + \frac{W_\varphi}{r} - C_z f_z = 0$$

and dot multiplication by $\mathbf{\Omega}$ equals zero gives

$$\mathbf{\Omega} \cdot \text{grad } B = \frac{1}{r} g_z f_r + \frac{\eta}{r} - \frac{1}{r} g_r f_z = 0,$$

two equations which may be solved for f_r and f_z . The condition

$$\frac{\partial}{\partial r} f_z - \frac{\partial}{\partial z} f_r = 0,$$

from which is derived the name of 'integrability condition', using (1.5) and (1.6), yields VON MISES' equation for rotors

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{(g - \omega r^2) g_r - r^2 \eta \psi_r}{r (g_r \psi_z - g_z \psi_r)} \right] = \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{(g - \omega r^2) g_z - r^2 \eta \psi_z}{r (g_r \psi_z - g_z \psi_r)} \right]. \quad (3.24)$$

VON MISES proved that the converse is true, if the angular momentum verifies (3.24) there exists a family of surfaces, $\varphi - f(r, z) = \text{const}$, containing both the vortex and the streamlines. Since (3.24) is an equation for the angular momentum g in terms of ψ and r there results an automatic ordering of the boundary conditions. These boundary conditions are well ordered in the sense that the meridional flow pattern, defined by equation (1.7), can be determined first.

The boundary conditions are:

- (i) Casing shape.
- (ii) Ring vorticity.
- (iii) Distribution of axial velocity at the entrance and the outlet to the rotor.
- (iv) The function $H^*(\psi)$ — or $H(\psi)$ — for stators.
- (v) An *adequate* distribution of g and its derivatives over one stream surface⁴).

⁴) Inasmuch as equation (3.24) is non-linear this problem is rather delicate and will not be discussed here. See VON MISES' original paper [2].

VON MISES' equation for the flow through stators can be obtained in the same manner, multiplying (2.2a) by \mathbf{C} and \mathbf{Q} . The final equation is

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{g}{r} \frac{g_r + r^2 \eta \psi_r}{(g_r \psi_z - g_z \psi_r)} \right] = \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{g}{r} \frac{g_z + r^2 \eta \psi_z}{(g_r \psi_z - g_z \psi_r)} \right], \quad (3.24a)$$

which may be obtained directly from (3.24) by setting $\omega = 0$.

It is simple to verify that if

$$\frac{d}{dt} g = \frac{1}{r} (g_r \psi_z - g_z \psi_r)$$

equals a constant, both (3.24) and (3.24a) become equation (3.7), i. e., *potential force flows are a subclass of von Mises flows*.

Using exactly the same reasoning as for potential force flows, it will be shown that the force field — which in VON MISES' theory is determined as a consequence of the knowledge of the flow pattern — can only be normal to the surface containing the vortex and the streamlines if $H_\psi^* = 0$ or $H_\psi = 0$.

(B) *Quasi-Potential Force Flows*: These flows will be defined by the condition that \mathbf{F} be of the following form,

$$\mathbf{F} = \alpha \text{grad} [\varphi - f(r, z)] \quad (3.25)$$

and represent, therefore, a generalization of potential force flows, whenever α is a function of r and z with α_r and α_z not simultaneously equal zero. The surfaces $\varphi - f(r, z) = \text{const}$ will represent the 'blades' for quasi-potential force flows.

Equation (2.2) with \mathbf{F} as in (3.25) shows that

$$\mathbf{W} \cdot \text{grad} [\varphi - f(r, z)] \equiv 0$$

and, therefore, the surfaces of the family $\varphi - f(r, z) = \text{const}$ contain the streamlines. It follows then that W_φ and C_θ are given by (3.14) and (3.15).

These 'blades' will contain the vortex lines only if $H_\psi^* \equiv 0$.

Furthermore, since

$$\text{grad} \{ \alpha [\varphi - f(r, z)] \} \neq \alpha \text{grad} [\varphi - f(r, z)] \quad (3.25a)$$

it is no longer possible to assume that there exists a family of surfaces containing both the vortex and the streamlines.

The study of these quasi-potential force flows, the main goal of this paper, will be made in the next part.

It should be noted that if $H_\psi^* \equiv 0$, the condition that \mathbf{F} be as in (3.25) is equivalent to VON MISES' equation. Evidently, for F_r and F_z to be of the form

$$F_r = -\alpha f_r, \quad F_z = -\alpha f_z$$

it is necessary — and sufficient — that

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{F_r}{\alpha} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{F_z}{\alpha} \right). \quad (3.26)$$

If in (3.26) α , F_r , F_z are substituted for their expressions in EULER's equations, (3.26) becomes VON MISES' equation.

Consequently, and this has some historical importance, the solution of the problem of quasi-potential force flows implies the solution of a very important class of von Mises flows.

It will be seen that the equations for the flow through stators are a special form — $\omega = 0$ — of those for rotors; the flow field has the same geometric structure as in the rotor field, depending now on the form of H_η instead of H_η^* .

4. Quasi-Potential Force Flows

It has been shown that the determination of an axially symmetric turbo-flow depends entirely, for non-potential force flows, on the definition of 'blade'. The adequacy of this model to represent actual turbo-flows is therefore dependent on that definition.

The 'blades' of a quasi-potential force flow, for rotor fields, are the surfaces of the family

$$\varphi - f(r, z) = \text{const} \quad (4.1)$$

containing the streamlines and such that the force field \mathbf{F} is given by

$$\mathbf{F} = \alpha(r, z) \text{grad} [\varphi - f(r, z)]. \quad (4.2)$$

EULER's equations are (3.11), (3.12), and (3.13) with α instead of a .

The hydrodynamic problem may now be stated:

'What are the set of equations and the corresponding boundary conditions which give a unique solution satisfying Euler's equations, and the equation of continuity,

$$\text{div } \mathbf{C} = 0.'$$
(4.3)

Furthermore, *'it will be required that the meridional flow pattern can be determined first'*.

With these requirements, (1.7) is the first equation to be solved and the corresponding, complete boundary conditions are:

$$(i), (ii) \text{ and } (iii)$$

of (3.3). The components of the velocity are given by (1.5) and (1.6), and the equation of continuity is automatically satisfied.

It will now be proven that 'if $H^* \equiv H^*(\psi)$ and two Euler equations are satisfied, the third equation holds also. Furthermore, if in these two equations, say the second and third, $F_r = -\alpha f_r$ and $F_\varphi = \alpha/r$, where both α and f are functions of r and z (f_r and f_z , and α_r and α_z not simultaneously zero), then there exists a family of curves such as (4.1) which contains the streamlines and \mathbf{F} is given by (4.2).'

If $H^* \equiv H^*(\psi)$, then $d/dt H^* = 0$, i. e.,

$$C_r \frac{dC_r}{dt} + C_\theta \frac{dC_\theta}{dt} + C_z \frac{dC_z}{dt} + \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{d\rho}{dt} - \omega C_\theta C_r - \omega r \frac{dC_\theta}{dt} = 0.$$

Multiplying (3.12) and (3.13) by W_φ and c_z respectively, adding and subtracting the sum from the above equation, there results

$$C_r \left(\frac{dC_r}{dt} - \frac{C_\theta^2}{r} \right) = -\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial r} C_r - \left(\frac{\alpha}{r} W_\varphi - \alpha f_z C_z \right)$$

which is the first Euler equation with

$$F_r = -\alpha \frac{\frac{1}{r} W_\varphi - f_z C_z}{C_r}. \quad (4.4)$$

Since $H^* \equiv H^*(\psi)$ implies that

$$F_r C_r + F_\varphi W_\varphi + F_z C_z = 0 \quad (4.5)$$

and $W_\varphi = r d\varphi/dt$, using (4.4), (4.5) becomes

$$\alpha \left(\frac{d\varphi}{dt} - \frac{df}{dt} \right) = \alpha \left(f_r C_r + f_z C_z - \frac{d\varphi}{dt} \right) = 0$$

or

$$2\alpha \left(\frac{d\varphi}{dt} - \frac{df}{dt} \right) = 0$$

and, therefore, the family of curves

$$\varphi - f = \text{const}$$

contains the streamlines and F_r is given by $-\alpha f_r$, i. e., \mathbf{F} is given by (4.2). The statement is proven. This proof is independent of which two equations are selected.

Consequently, once the solution of (1.7) is known, a set of two Euler equations should be chosen and the boundary conditions for the set be defined so that the solution is unique and compatible with the meridional flow pattern already determined.

In what follows, the variables z and ψ will be used, i. e., the transformation

$$\psi = \psi(r, z), \quad z = z \quad (4.6)$$

will be performed on the chosen equations. This transformation is similar to (3.18) and valid wherever $\psi_r = 0$, i. e., for all flows which are not purely radial. In what follows, however, the bars will be omitted. Naturally, it must be understood that the same symbol, say C_z , does not indicate the same function in r and z as in z and ψ ; of course, both expressions for C_z become identical by use of (4.6). r will indicate the function of z and ψ , obtained by solving for r in the first equation of (4.6).

It will be shown in part 5 that, paradoxically as it may seem, z and ψ are the most adequate variables to express analytically the solution of (1.7) from numerical data.

Equations (3.11) and (3.12), in the variables z and ψ , read

$$H_\psi^* = \frac{W_\psi}{r} g_\psi + \frac{\eta}{r} - \alpha f_\psi, \quad (4.7)$$

$$\alpha = C_z \frac{\partial}{\partial z} (r^2 f_z C_z + r^2 \omega). \quad (4.8)$$

This is a system of two equations for the unknown functions z and f . Elimination of α between (4.7) and (4.8) gives the following equation for f :

$$\left. \begin{aligned} H_\psi^* - \frac{\eta}{r} &= C_z \left(f_z \frac{\partial}{\partial \psi} - f_\psi \frac{\partial}{\partial z} \right) [r^2 f_z C_z + r^2 \omega] \\ &= r^2 C_z^2 [f_z f_{z\psi} - f_\psi f_{zz}] + f_z C_z [f_z (r^2 C_z)_\psi - f_\psi (r^2 C_z)_z] \\ &\quad + \omega C_z [f_z (r^2)_\psi - f_\psi (r^2)_z]. \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

The above equation for f is a non-linear partial differential equation of second order, the coefficients of which are all known, either from the original data, as H^* and η , or from the solution of equation (1.7). The determination of α , to be made in equation (4.8), is done directly in terms of f and known quantities.

In physical terms, this may be interpreted as follows:

For a predetermined meridional flow pattern, the differential equation for the function f of (4.1), giving the blade shape, is obtained by elimination of the function z — load function — between the equations of motion along the ψ^5 and θ -directions. The working load⁶, given by the function α , corresponding to that blade is then given directly in the equation of motion along the θ -direction.

⁵ Equation (4.7) is the equation of motion along the ψ -direction, changed to the derivatives with respect to ψ from those with respect to s_ψ — by use of (1.9).

⁶ The term 'working load' applied to α is justified inasmuch as the change in angular momentum per unit mass is given in terms of α only, i. e., does not depend on F_r and F_z . See reference [4], Chapter I.

Consequently, the following statement is proven: *In the axially symmetric model of turbo-flows, with quasi-potential force fields, the meridional flow pattern is independent of the motion along the whirl direction. And, evidently, this is no longer true for potential force flows; for, the α in (4.8) will be a constant only 'accidentally'.*

The manner in which (4.7) and (4.8) are obtained is simple: (4.7) is obtained from (4.11) by division by ψ_r .

From (4.1) it follows that

$$\frac{d\varphi}{dt} = f_z C_z, \quad g = r^2 f_z C_z + r^2 \omega, \quad \frac{d}{dt} g = g_z C_z,$$

and substitution in (4.12) gives (4.8).

The remaining question is, then, what are the boundary conditions giving a unique solution for (4.9).

The differential equation of the characteristics of (4.9) is

$$f_z dz d\psi + f_\psi d\psi^2 = 0 \quad (4.10)$$

or

$$d\psi (f_z dz + f_\psi d\psi) = 0$$

and, therefore, the equation is of hyperbolic type and the characteristics are

$$\psi = \text{const}, \quad f = \text{const}. \quad (4.11)$$

Consequently, the reduction of (4.9) to normal form is accomplished by interchanging f, z, ψ , so that z be the dependent variable, i. e., (4.9) is, up to a factor, the differential equation in normal form defining the function

$$z = z(f, \psi). \quad (4.12)$$

Taking (4.12) as a transformation, the following formulae hold:

$$z_f = \frac{1}{f_z} (\psi = \text{const}), \quad z_\psi = -\frac{f_\psi}{f_z} (f = \text{const}). \quad (4.13)$$

From either one of (4.13)

$$z_{f\psi} = \frac{f_{zz} f_\psi - f_z \psi f_z}{f_z^3}. \quad (4.14)$$

Using (4.13) and (4.14), (4.9) becomes

$$\left. \begin{aligned} z_{f\psi} = & \left(\frac{\eta}{\psi} - H_\psi^* \right) r^{-2} C_z^{-2} z_f^3 + [(r^2 C_z)_\psi + (r^2 C_z)_z z_\psi] C_z^{-1} r^{-2} z_f \\ & + \omega [(r^2)_\psi + (r^2)_z z_\psi] C_z^{-1} r^{-2} z_f^2 \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

an equation which will be written symbolically,

$$z_{f\psi} = \Phi(z, \psi, z_f, z_\psi). \quad (4.15')$$

In this form — see reference [7] — a set of boundary conditions, complete from a mathematical standpoint and admissible from the point of view of applications, is the following:

$$\left. \begin{aligned} \text{(I)} \quad f &= h_1(\psi) \quad \text{at} \quad z = 0, \\ \text{(II)} \quad f &= h_2(z) \quad \text{at} \quad \psi = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

As shown in Figure 4, a cartesian representation of $z = z(f, \psi)$, the first condition above is the equation for the leading edge (assuming the entrance to the rotor field at $z = 0$). The second condition gives the blade form at one streamline.

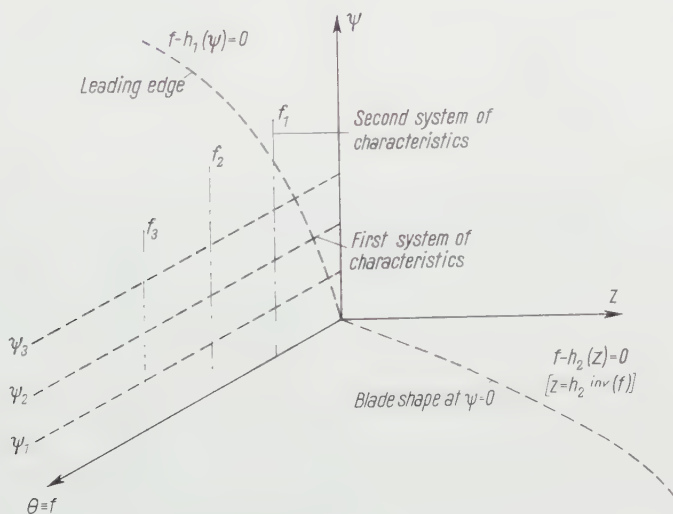


Figure 4

Cartesian representation of the characteristics and the boundary conditions.

In mathematical terms, these conditions give the value of z over one characteristic, $z = h_2^{\text{inv}}(f)$ at $\psi = 0$, and the value of z , $z = 0$, over a non-characteristic line, $f = h_1(\psi)$. PICARD proved that for these conditions the solution is unique and may be obtained by repeated iterations, if $\Phi(z, \psi, z_f, z_\psi)$ is adequately bounded. See again reference [7] for a precise definition of these terms.

From (4.15), taking into account (4.16), condition II, integration with respect to ψ gives⁷⁾

$$z_f = h_2^{inv'}(f) + \int_0^{\psi} \Phi [z(f, \psi_0), z_f(f, \psi_0), z_\psi(f, \psi_0), \psi_0] d\psi_0.$$

Integrating again with respect to f , and taking into account condition I,

$$z = \int_{h_1(\psi)}^f \left\{ h_2^{inv'}(f_0) + \int_0^{\psi} \Phi [z(f, \psi_0), z_f(f, \psi_0), z_\psi(f, \psi_0), \psi_0] d\psi_0 \right\} df_0. \quad (4.17)$$

Since

$$\int_{h_1(\psi)}^f h_2^{inv'}(f_0) df_0 = h_2^{inv}(f) - h_2^{inv}[h_1(\psi)].$$

Calling $h_2^{inv}(f) = A(f)$ and $h_2^{inv}[h_1(\psi)] = B(\psi)$, (4.17) may be rewritten

$$z = A(f) - B(\psi) + \int_{h_1(\psi)}^f \left\{ \int_0^{\psi} \Phi [z, z_f, z_\psi, \psi_0] d\psi_0 \right\} df_0, \quad (4.18)$$

where the first approximation, z_1 , is given by

$$z_1 = A(f) - B(\psi),$$

i. e., by the boundary conditions. Because this process is convergent, the non-linearity of the equation is no longer relevant. (If the iteration is carried out locally, the non-linearity of the equation restricts the validity of the process. This will be seen in part 5.)

For stators, the stream function is the same as for rotors. Equation (4.1) reads

$$\theta - f(r, z) = \text{const}.$$

(4.2) is the same — with α instead of a , of course. (3.11) reads

$$H_r = \frac{C_\theta}{r} g_r - \eta C_z - \alpha f_r. \quad (3.11a)$$

(3.12) is also the same. Applying the transformation (4.6) to (3.11a) and (3.12) there results the system

$$H_\psi = \frac{C_\theta}{r} g_\psi + \frac{\eta}{r} - \alpha f_\psi, \quad \alpha = C_z \frac{\partial}{\partial z} [r^2 f_z C_z],$$

⁷⁾ h_2^{inv} is the inverse function of h_2 , that giving z as a function of f . $h_2^{inv'}$ is simply the derivative of h_2^{inv} with respect to f .

The subscript θ indicating the variable of integration.

and the result of eliminating α is

$$H_\psi - \frac{\eta}{r} = C_z \left(f_z \frac{\partial}{\partial \psi} - f_\psi \frac{\partial}{\partial z} \right) [r^2 f_z C_z],$$

i. e., the equation for the stator blade is obtained from (4.9) by setting $\omega = 0$, and changing H^* to H .

In the form of an answer to the formulation of the problem given at the beginning of this part, a summary of these results is given below.

'The hydrodynamic problem for quasi-potential force flows is reduced to the solution of STOKES' equation for the stream function ψ , and the hyperbolic equation for the function f giving the blade shape that results from elimination of the load-function α between the equations of motion along the ψ and θ -directions.' The boundary conditions defining uniquely the flow are:

- (I) *The distribution of energy, $H^*(\psi)$ — or $H(\psi)$.*
- (II) *η , the vorticity along the tangential direction.*
- (III) *The casing shape.*
- (IV) *The distribution of axial velocity at the entrance and outlet of the blade row.*
- (V) *The leading edge of the blade.*
- (VI) *The intersection of the blade and one stream surface.*

5. An Example

5.1 The Meridional Flow Pattern

Boundary conditions II, III, and IV determine uniquely the meridional flow [9].

In regard to III, the casing shape was selected with $R_0 = \text{const}$ and the inner radius from the general expression

$$\frac{r}{R_{i_1}} = 1 + \frac{z - 1}{1 - 6\delta + 6\delta^2} [6\delta(3\delta - 2)z^2 + (4 - 12\delta^2)z^3 + (6\delta - 3)z^4] \quad (5.1)$$

giving a family of curves with zero tangent at R_{i_1} and R_{i_2} ; z varying from zero to one; and such that $z = 0$, $r = R_{i_1}$, and for $z = 1$, $r = R_{i_2}$; $z = R_{i_2}/R_{i_1}$; δ is the z -coordinate of the inflection point.

Figure 6 is a casing for the following specifications:

$$z = 2, \quad \delta = 0.5, \quad R_{i_1} = 2, \quad R_0 = 5.$$

The geometric configuration is determined by the ratio of any one radius to the axial length. This ratio was chosen,

$$\frac{R_{i_0}}{L} = \frac{3}{4}, \quad L = \frac{16}{3}.$$

That the concrete specification of this ratio is necessary is seen by inspection of equation (5.5).

η was selected from experimental work in the following manner. From HOWELL's measurements [8] of the axial velocity distribution through an axial compressor, taking differentials in

$$r = r_i + m \frac{h}{d}$$
$$\frac{\partial \left(\frac{C_z}{C a} \right)}{\partial \left(\frac{h}{d} \right)} \text{ is transformed into } \frac{\partial \left(\frac{C_z}{C a} \right)}{\partial r}.$$

By graphical differentiations, and assuming that HOWELL's five curves of Figure 5 correspond to $z = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1$, there results a distribution of

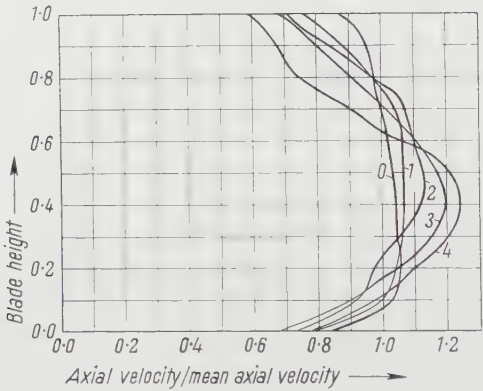


Figure 5

Distribution of axial velocity through a four-stage compressor (from HOWELL). Curve 0 after entry guide; 1 after first stage; 2 after second stage; 3 after third stage; 4 after fourth stage.

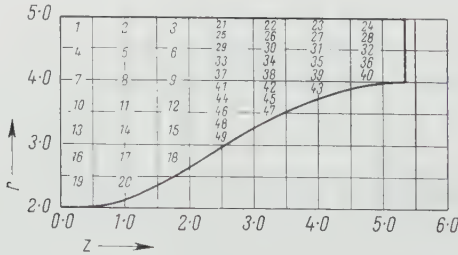


Figure 6

Case shape and net code arrangement.

meridional vorticity, η , throughout the casing as shown in Figure 9. This vorticity distribution was obtained under the assumption

$$\frac{\partial C_r}{\partial z} = 0 . \tag{5.2}$$

Physically, η/r has more meaning than η , for it represents the strength of the vortex ring [11]. Consequently, three cases are possible:

- Case I: $\eta = 0$.
- Case II: $\eta/r = \text{function of } r \text{ and } z$.
- Case III: $\eta/r = \text{function of } \psi$.

To obtain η/r as a function of ψ , curve 2 of Figure 5 was used under the assumption (5.2). This function is shown in Figure 7.

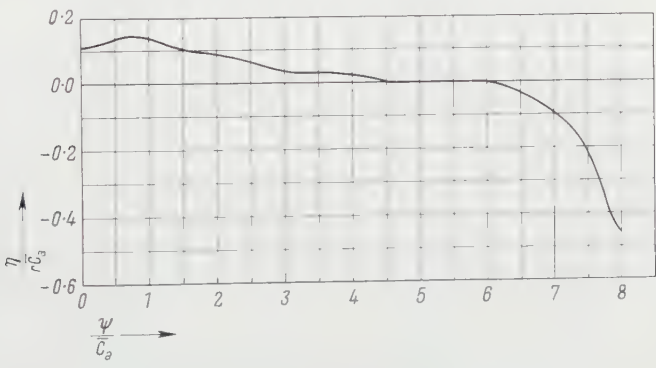


Figure 7
Vortex ring intensity corresponding to curve 2 of Figure 5.

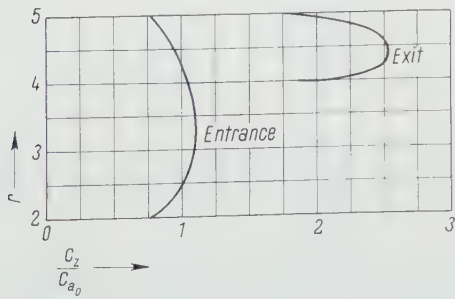


Figure 8
Entrance and exit-velocity distribution corresponding to the vorticity above.

Although (5.1) is given in dimensionless z , it is necessary to determine the ratio of one radius to the axial length, L . This chosen ratio, R_{i0}/L , was set equal to $4/3$, giving $L = 16/3$.

For $\eta = 0$, the axial velocity was assumed constant with r , at the entrance and the outlet.

For cases II and III, the axial velocity distributions at the entrance and the outlet are given in Figures 10 and 8, respectively.

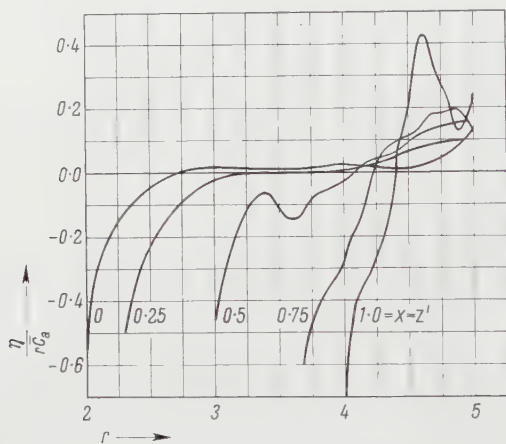


Figure 9

Vorticity distribution as derived from Figure 5.

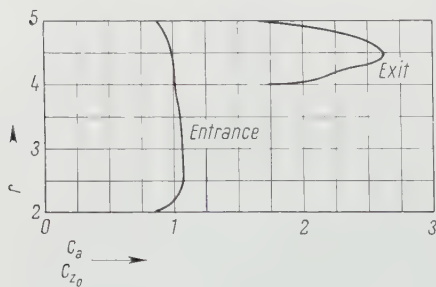


Figure 10

Entrance and exit-velocity distribution corresponding to the vorticity above.

For the net code arrangement shown in Figure 6, the numerical values of η' are given in Table 1. These values are used as a means to obtain analytical expressions for the solutions.

Table 1

Case I		Case II		Case III	
Pt. No.	ψ -values	Pt. No.	ψ -values	Pt. No.	ψ -values
1	0.0356	1	0.0318	1	0.0270
2	0.0381	2	0.0326	2	0.0292
3	0.0418	3	0.0346	3	0.0329
4	0.1023	4	0.0965	4	0.0892
5	0.1094	5	0.1017	5	0.0966
6	0.1199	6	0.1116	6	0.1081
7	0.1629	7	0.1576	7	0.1510
8	0.1736	8	0.1686	8	0.1624
9	0.1895	9	0.1856	9	0.1801
10	0.2173	10	0.2137	10	0.2098
11	0.2303	11	0.2282	11	0.2240
12	0.2499	12	0.2504	12	0.2455
13	0.2655	13	0.2637	13	0.2625
14	0.2793	14	0.2796	14	0.2780
15	0.2999	15	0.3037	15	0.3004
16	0.3073	16	0.3073	16	0.3087
17	0.3209	17	0.3226	17	0.3236
18	0.3477	18	0.3512	18	0.3505
19	0.3427	19	0.3442	19	0.3460
20	0.3570	20	0.3589	20	0.3595
21	0.0245	21	0.0190	21	0.0199
22	0.0284	22	0.0215	22	0.0237
23	0.0337	23	0.0248	23	0.0289
24	0.0388	24	0.0270	24	0.0336
25	0.0710	25	0.0600	25	0.0617
26	0.0833	26	0.0700	26	0.0747
27	0.0990	27	0.0817	27	0.0912
28	0.1142	28	0.0879	28	0.1067
29	0.1154	29	0.1048	29	0.1051
30	0.1358	30	0.1235	30	0.1266
31	0.1617	31	0.1473	31	0.1541
32	0.1868	32	0.1663	32	0.1808
33	0.1575	33	0.1498	33	0.1478
34	0.1856	34	0.1786	34	0.1780
35	0.2217	35	0.2176	35	0.2168
36	0.2572	36	0.2543	36	0.2546
37	0.1972	37	0.1933	37	0.1895
38	0.2326	38	0.2325	38	0.2278
39	0.2790	39	0.2858	39	0.2773
40	0.3257	40	0.3308	40	0.3268
41	0.2343	41	0.2342	41	0.2293
42	0.2766	42	0.2832	42	0.2748
43	0.3336	43	0.3409	43	0.3348
44	0.2687	44	0.2710	44	0.2665
45	0.3174	45	0.3252	45	0.3186
46	0.3003	46	0.3017	46	0.3009
47	0.3548	47	0.3585	47	0.3565
48	0.3290	48	0.3316	48	0.3315
49	0.3549	49	0.3571	49	0.3570

By cross-plotting the values of $\psi(r, z)$, a set of streamlines — or stream-surfaces — are obtained for all three cases, Figures 11, 12, and 14.

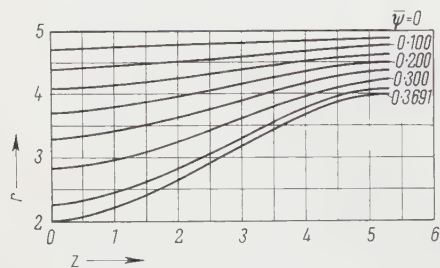


Figure 11

Irrotational meridional flow pattern (case I).

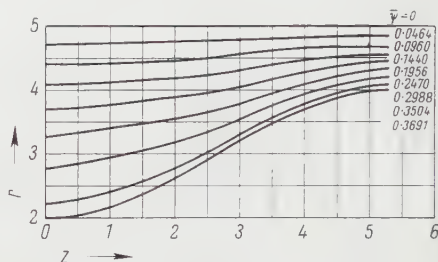


Figure 12

Rotational meridional flow pattern (case II).

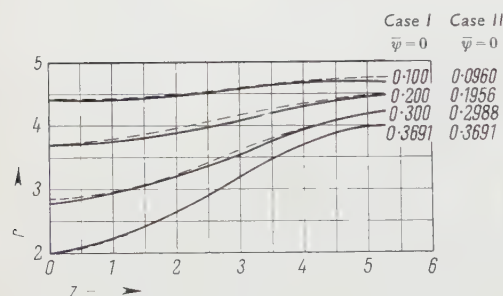


Figure 13

Comparison of meridional flow patterns (cases I and II). --- case I; — case II.

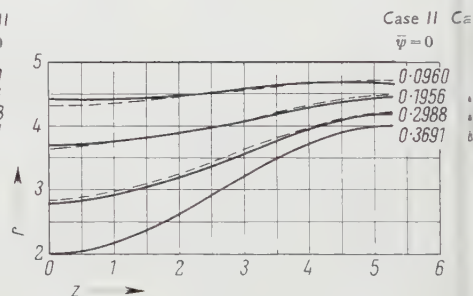


Figure 14

Comparison of meridional flow patterns (cases II and III). — case II; --- case III.

For the first two cases, along these streamlines r as a function of z is expressed in Fourier series. Then, the coefficients are functions of ψ , and are expressed as polynomials. These analytical expressions are given below.

Case I

$$\left. \begin{aligned}
 r = & (5.002 - 4.203 \bar{\psi} - 0.0125 \bar{\psi}^2 - 8.857 \bar{\psi}^3) \\
 & + (0.004 - 1.879 \bar{\psi} + 2.121 \bar{\psi}^2 - 11.571 \bar{\psi}^3) \cos \frac{\pi z}{L} \\
 & + (-0.136 \bar{\psi} + 0.494 \bar{\psi}^2 - 0.553 \bar{\psi}^3) \cos \frac{3\pi z}{L}
 \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

Case II

$$\left. \begin{aligned}
 r = & (5.0 - 5.148 \bar{\psi} + 4.011 \bar{\psi}^2 - 12.84 \bar{\psi}^3) \\
 & + (-1.365 \bar{\psi} - 0.5067 \bar{\psi}^2 - 8.484 \bar{\psi}^3) \cos \frac{\pi z}{L} \\
 & + (0.1740 \bar{\psi} - 3.414 \bar{\psi}^2 + 7.959 \bar{\psi}^3) \sin \frac{\pi z}{L} \\
 & + (0.3709 \bar{\psi} - 3.996 \bar{\psi}^2 + 8.096 \bar{\psi}^3) \cos \frac{3\pi z}{L} \\
 & - (-0.1363 \bar{\psi} - 3.170 \bar{\psi}^2 - 7.613 \bar{\psi}^3) \sin \frac{3\pi z}{L}
 \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

$$\bar{\psi} = \frac{\psi}{C_a L^2}, \quad L = 5 \frac{1}{3} \text{ units},$$

r, z real coordinates, C_a average axial velocity at the entrance.

In reality (5.3) and (5.4) are the solutions of the equation into which

$$\psi_{rr} - \frac{1}{r} \psi_r + \psi_{zz} = r \eta \quad (5.5)$$

transform when z and ψ are taken as independent variables, i. e., (5.3) and (5.4) are the solutions of

$$r r_{\psi\psi} + r_{\psi}^2 + r r_{zz} r_{\psi}^2 - 2 r r_{\psi} r_z r_{z\psi} + r r_z^2 r_{\psi\psi} + r^2 r_{\psi}^3 \eta = 0 \quad (5.6)$$

for the specific boundary conditions.

The advantages of such conversion of the numerical data to analytical form are manifold:

It avoids graphical differentiations which, if of second order, can be so inaccurate as to be almost meaningless.

It provides the solution in the needed form for the blade equation.

Finally, (5.6) may be interpreted — after division by $r^2 r_{\psi}^3$ — as an error function. This error function has dimensions of cycles per second per unit of average axial entrance velocity. It should be noted that, having only the numerical values, it would be impossible to estimate the error. A map of this error function is shown in Figure 19.

In Figure 13, the flow patterns for cases I and II, as obtained from (5.3) and (5.4), are compared. All the velocity distributions, Figures 15, 16, 17 and 18, are derived from (5.3) and (5.4).

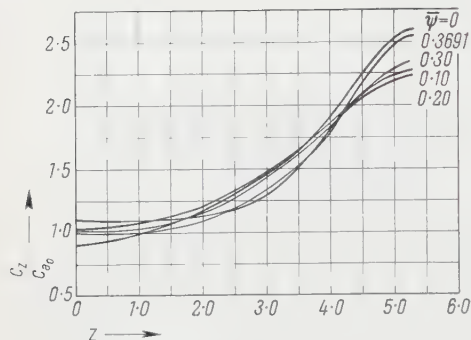


Figure 15

Axial velocity corresponding to flow pattern of Figure 11.

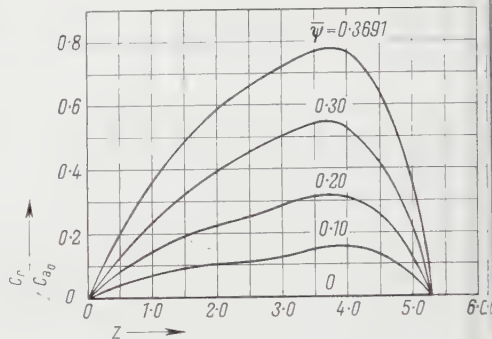


Figure 16

Radial velocity corresponding to flow pattern of Figure 11.

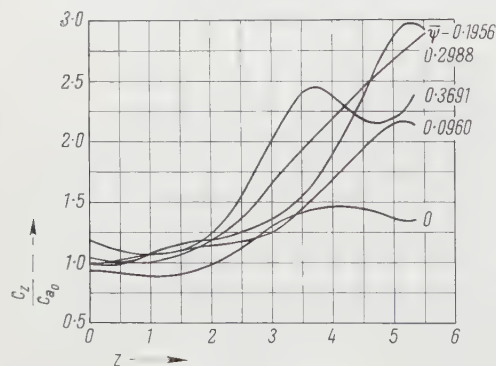


Figure 17

Axial velocity corresponding to flow pattern of Figure 12.

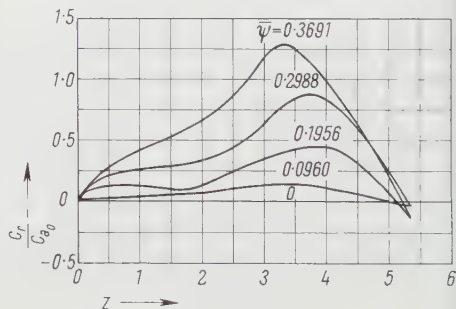


Figure 18

Radial velocity corresponding to flow pattern of Figure 12.

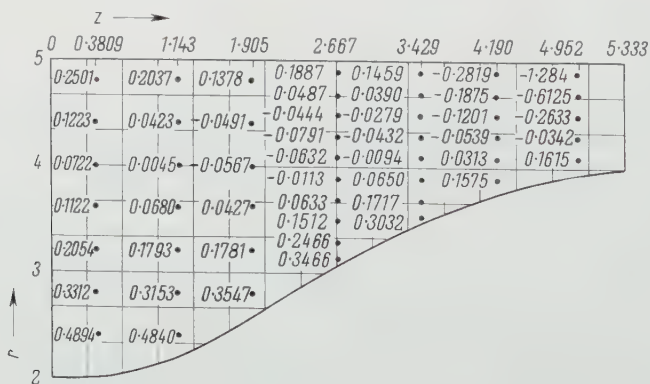


Figure 19

Map of error function with the same dimensions as $\eta/C_{a0} L^2$.

5.2 The Blade Shape

To illustrate the method and to simplify computations, it is only necessary to consider a stationary 'blade'. The boundary conditions V and VI of part 4 are specified as follows:

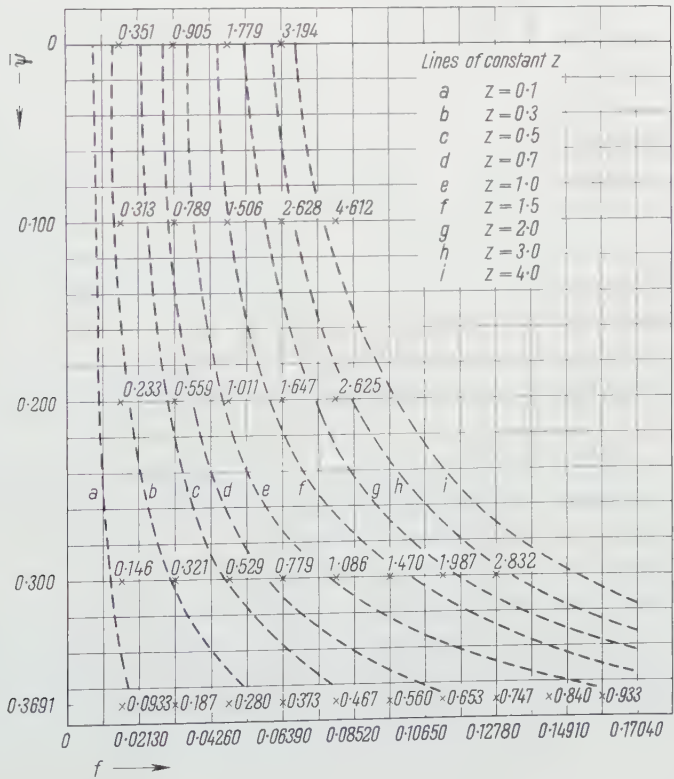
Over the hub, i. e., in the (f, z) -plane of Figure 4, the distribution of turning is given by

$$f = 0.1713 z^2 - 0.009532 z^3. \tag{5.7}$$

The leading edge is taken along the ψ -axis at the entrance, which for case I coincides with the radial direction.

Table 2 gives the values of z over the (f, ψ) -plane as obtained directly, by iterative use of equation (4.18). This map shows why the blade, as given in the final drawing, Figure 23, does not go over the whole axial length of the hub.

Table 2
Values of z on the $(\bar{\psi}, f)$ -Plane as Computed Directly



From the numerical values obtained, the curves of f versus z for different ψ -values are given in Figure 20. To illustrate the results, a 'blade', assembled from these data, is shown in Figure 23.

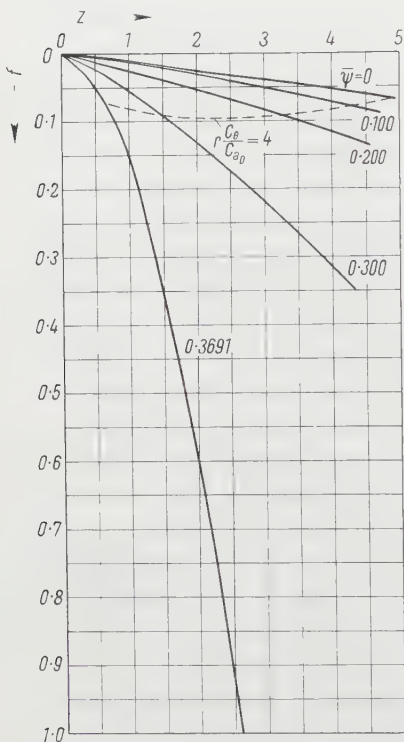


Figure 20
Angle variation through the blade.

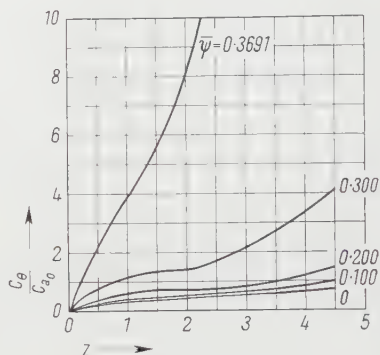


Figure 21
Angular velocity distribution.

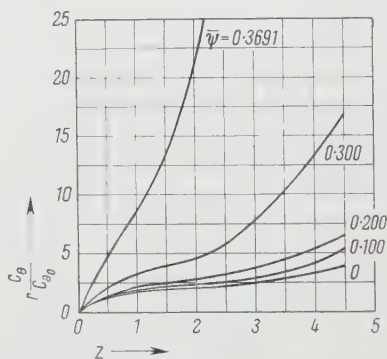


Figure 22
Angular momentum distribution.

Once the 'blade' is known, the distribution of C_θ and of the angular momentum, $C_\theta r$, can be calculated. This distribution is given in Figures 21 and 22, having been calculated as explained in part 4.

The flow pattern then is completely determined.

The pressure distribution depends, naturally, on the physical conditions at the entrance as described by $H(\psi)$, which in the example under consideration is assumed constant, i. e., $H_\psi(\psi) \equiv 0$. The actual values are to be obtained by substitution of C_r , C_θ , C_z in

$$\frac{1}{2} C^2 + \frac{p}{\rho} = \text{const.}$$

In Figure 23 the 'blade' is shown as assembled from all the computed data. The medium heavy lines are the lines of constant z and constant η making up the blade. The heaviest line is the vortex line corresponding to

$$\frac{r}{C_a} = 4$$

drawn as if the computational errors, evident in Figure 20, were absent. The vorticity along this line is made up of free and bound vorticity. If the 'blade'

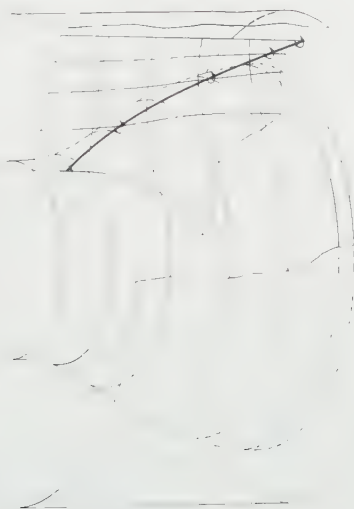


Figure 23
Trimetric projection of blade.

were to be cut along this line, the 'free vorticity' shed would be the Beltrami component, i. e., the projection of Ω on the streamlines.

Finally, these computational results show the inadequacy of choosing a radial entrance edge for the distribution (5.7). That is, the interrelationship of the different boundary conditions defining the flow through a turbo-machine is made evident.

Acknowledgments

The writer wants to acknowledge his gratitude to Mr. CHARLES CONCORDIA, of the Analytical Group of the General Electric Company in Schenectady, New York, and his assistants for their careful and ingenious work in carrying out the numerical computations presented in this paper.

REFERENCES

- [1] H. LORENZ, *Technische Hydrodynamik* (München 1910).
- [2] R. VON MISES, *Theorie der Wasserräder*, Z. Mech. Phys. 57, No. 1, 2 (1909).
- [3] R. MEYER, *Beitrag zur Theorie feststehender Schaufelgitter* (Zürich 1946).
- [4] F. E. MARBLE, *The Flow of a Perfect Fluid Through an Axial-Flow Turbo-machine with Prescribed Blade Loading*, J. aeron. Sci. 15, 473-485 (1948).
- [5] F. G. GRAVALOS, *A Laminar Theory of the Flow Through a Turbo-Machine* ([Engineering and Science Series, No. 62], Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, N. Y., 1950).
- [6] A. GOLDSTEIN, *Axi-Symmetric Supersonic Flow in Rotating Impellers*, N. A. C. A., T. N. 2388 (1951).
- [7] G. M. MONROE, Doctor's Thesis (California Institute of Technology, Pasadena, California 1953).
- [8] A. R. HOWELL, The Institution of Mechanical Engineers. Proceedings 153, 441-452 (London 1945).
- [9] E. GOURSAT, *Cours d'analyse mathématique*, vol. III, chapter 27 and 28 (Paris 1927).
- [10] E. PICARD, *Leçons sur quelques types simples d'équations aux dérivées partielles*, chapter 15 and following (Paris 1927).
- [11] H. LAMB, *Hydrodynamics*, chapter 7, especially sections 161 to 166, 4th ed. (Cambridge 1916).

Zusammenfassung

Ausgehend von der Tatsache, dass eine Schaufelreihe äquivalent ist einem Kraft- und damit auch einem Wirbelfeld, wird der Begriff der Potential-Kraft-Strömung erweitert. Diese schliesst den «von Mises-Fall» ein, wenn das Euler-Integral im ganzen Feld konstant ist.

Die Struktur des Wirbelfeldes, sowohl des freien als auch des gebundenen, wird analysiert. Das Problem der Turbinenströmung reduziert sich auf die Lösung von zwei partiellen Differentialgleichungen, für die ein vollständiger Satz von Randbedingungen gegeben ist; die Rechnung wird auf bekannte numerische Methoden zurückgeführt.

Während die üblichen Rechenmethoden nur Eintritts- und Austrittsdiagramme liefern, erhalten wir hier die vollständige Geschwindigkeitsverteilung im ganzen Kraftfeld. Die Schaufelform wird angegeben, und es ist möglich, das Zusammenwirken verschiedener Entwurfsparameter zu untersuchen.

(Received: September 20, 1958.)

Der Hagelversuchskanal

VON ROLAND LIST, Weissfluhjoch-Davos¹⁾

1. Einleitung

Das Problem jeder Hageltheorie besteht darin, sämtliche bekannten Phänomene der Hagelbildung in ein mehr oder weniger geschlossenes System zusammenzufassen und zu erklären. Als Musterbeispiel sei hiefür die noch heute gültige Theorie erwähnt, die TRABERT 1899 aufstellte [1]²⁾. Die darin gemachten prinzipiellen Angaben genügten den Bedürfnissen bald nicht mehr, wollte man doch verschiedene Einzelprobleme mathematisch darstellen. Mit der Entwicklung der Aerodynamik und der Thermodynamik wurden daher grössere Studien über Wärmeübergänge und Strömungsverhältnisse [2, 3] angepackt. FOSTER und BATES [4], MASON [5] und LUDLAM [6] – um nur einige zu nennen – übernahmen die zum Teil weitgehend idealisierten Grundlagen und bauten die Theorien weiter aus. – Im Schosse der Eidgenössischen Kommission zum Studium der Hagelbildung und der Hagelabwehr reifte indessen der Entschluss, das physikalische Grundproblem unabhängig von den bestehenden, mehr theoretischen Arbeiten von der experimentellen Seite her anzupacken. Man hoffte, durch geeignete Messungen bessern Einblick in die Vorgänge des Wachstums der Eiskernkerne zu Hagelkörnern zu erhalten. Als Hauptzweck ist dabei die Abklärung der Bedingungen in einer Gewitterwolke zu nennen, die zu schwerem Hagel führen. Diese Problemstellung ist, abgesehen vom reinen Forschungsinteresse, speziell für die Hagelabwehr von Bedeutung, soll doch damit abgeklärt werden, wo am ehesten Ansatzpunkte für eine Hagelbekämpfung zu finden sind.

Als Untersuchungsmethode fällt die direkte aviatische Messung an Ort und Stelle der Hagelbildung infolge der ausserordentlichen Gefährlichkeit solcher Flüge sowie der ungenügend entwickelten Messmethodik dahin. Es soll daher versucht werden, auf Grund von Untersuchungen an natürlichen Hagelkörnern Rückschlüsse auf die ursprüngliche Gewitterwolke zu erhalten. Studien an atmosphärischen Eiskernen [7–9] zeigen die ausserordentliche Vielfalt der Hagelkornstrukturen. Diese stellen prinzipiell das Produkt ihrer Entstehungsgeschichte dar. Eine Interpretation derselben ist jedoch höchstens in qualitativer Richtung möglich; sichere und genaue Angaben sind nur über verglei-

¹⁾ Forschungsstelle der Eidgenössischen Kommission zum Studium der Hagelbildung und der Hagelabwehr am Eidgenössischen Institut für Schnee- und Lawinenforschung.

²⁾ Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 413.

chende Experimente zu erwarten. Zur Erklärung des Aufbaues natürlicher Hagelkörner sollen daher bei messbaren, den atmosphärischen Verhältnissen analogen Bedingungen künstliche Eiskörner erzeugt werden. Die Apparatur, die diese Nachbildung gestattet, ist der *Hagelversuchskanal*, ein im Messteil vertikaler, künstlich klimatisierbarer Windkanal mit geschlossenem Kreislauf.

2. Bedingungen zur Schaffung einer «atmosphärischen» Umgebung für ein Test-Eiskorn

2.1 Zur Berechtigung der Betrachtung eines einzelnen Eiskornes

Die Möglichkeiten zur Nachbildung der Atmosphäre im Laboratorium sind in erster Linie raummässig beschränkt; sobald aber nur ein Hagelkorn als für sich isoliert betrachtet werden kann, eröffnen sich Wege zur Verwirklichung der Nachbildung im Experiment. Diese Annahme scheint genügend gerechtfertigt zu sein, wenn man die nach schweren Hagelfällen meist geringe Bedekung des Bodens mit Eisschlossen in Betracht zieht. In die gleiche Richtung weisen auch die vielfach zu beobachtenden, erstaunlichen Symmetrien der Hagelkörner [9].

2.2 Wahl der Experimentparameter

Das Wachstum eines Hagelkornes wird bestimmt durch seine Umgebung. Diese lässt sich charakterisieren durch Lufttemperatur, Luftfeuchte, Luftdruck, den freien Wassergehalt in Form von Tropfen oder Eisteilchen, deren Grössenverteilung und Temperatur sowie das Eisbildungs- und Kondensations-Kernspektrum. Unter Vernachlässigung allfälliger Beschleunigungen kann weiter eine Relativ-Geschwindigkeit zwischen Korn und Umgebung von der Grösse der freien Fallgeschwindigkeit der Eispartikel angenommen werden. Die Umgebungsverhältnisse können sich dadurch zeitlich rasch ändern; mit Gleichgewichten von Temperatur und Wasserdampfdruck zwischen Korn und Umgebung ist nur in wenigen Fällen zu rechnen.

Von verschiedenen Autoren wurde vermutet, dass auch elektrische Effekte das Wachstum von Hagelkörnern wesentlich beeinflussen. Da aber die Hagelbildung nicht unbedingt an Gewitter mit Blitz und Donner gebunden ist (siehe Hagelschlag vom 29. Juli 1958 in Luzern mit Hagelkörnern von über 10 cm Durchmesser), soll diese Möglichkeit als sekundär aufgefasst und vorläufig nicht als Parameter vorgesehen werden.

2.3 Dimensionierung der Experimentparameter

Die Dimensionierung der Experimentparameter soll so geschehen, dass die Versuche im Laboratorium auch bei noch extremeren Bedingungen durchgeführt werden können, als sie in der Natur zu erwarten sind. Da die Wolken-

gipfelhöhe selten über 10000 m über Meer liegt, ergeben sich folgende Parameterbereiche:

Der *Druck* variere zwischen 760 und 200 mm Hg.

Die *Temperatur* liege zwischen $+25^{\circ}$ und -40°C .

Der maximale freie *Wassergehalt* betrage 10 g/m^3 .

Die *Tropfengrösse* bewege sich von $1\text{ }\mu$ bis $200\text{ }\mu$.

Unter der Beschränkung, im Experiment an einem zur Beobachtung günstigen Ort Eisteilchen von maximal 2,5 cm Durchmesser zu untersuchen, dürfte eine *Luftgeschwindigkeit* von maximal 25 m/s angemessen sein.

Ein Ausschweben der Testobjekte wäre erwünscht, wird aber nicht zur Bedingung gemacht, zeigten doch die Versuche am Aerodynamischen Institut der ETH die ganze Schwere dieses Unterfangens [10]. BLANCHARD, der schon früher Schwebversuche mit Wassertropfen im offenen Windkanal machte [11], gelangte infolge der Selbststabilisierung durch Anpassung der Tropfenform und allfällige innere Ausgleichsströmungen des Wassers leichter zum Erfolg, als es für feste Körper zu erwarten ist.

Auf die Festlegung der restlichen Grössen sei zum vornherein verzichtet, da nur das Experiment die im Laboratorium mit vernünftigen Mitteln erreichbaren Eiskern-Charakteristiken und Unterkühlungs- sowie Übersättigungsgrade aufzeigen kann. Gewisse Vorversuche zeigten aber bereits, dass Wassertropfen in Form von Nebel vorläufig bis -17°C unterkühlt werden konnten [12], und dass eine Variation der Gefrierkernkonzentrationen innerhalb weitester Grenzen möglich ist [13]. Unter diesen Voraussetzungen ist zu hoffen, dass auch hier atmosphärische Bedingungen angenähert werden können. Die Gewissheit hierzu wird jedoch erst durch einen Vergleich zwischen künstlich erzeugten und natürlichen Eispartikeln erbracht werden können.

2.4 Der Verzicht auf die Druckvariation im Experiment

An und für sich wäre es vorteilhafter, die Druckvariation im Experiment zu verwirklichen. Infolge des damit verbundenen, unverhältnismässig grossen finanziellen Aufwandes wird aber darauf verzichtet und versucht, die Verhältnisse für alle möglichen Drucke mit Hilfe von Ähnlichkeitsgesetzen auf Grund des Laborluftdruckes (entsprechend 2665 m über Meer) zu berechnen.

Wie aus der Strömungslehre bekannt ist, besteht die Möglichkeit, aus Messungen an einem Versuchsobjekt auf die Verhältnisse an einem andern geometrisch ähnlichen Körper zu schliessen – die Bedingung ist nur, dass die Reynolds-Zahl Re in beiden Fällen dieselbe ist.

Solche Ähnlichkeitsgesetze bestehen ebenfalls für Wärme- und Stoffübergänge – Vorgänge, die das Wachstum von Hagelkörnern wesentlich mitbeeinflussen – und werden durch die Nusselt-Zahl Nu , beziehungsweise durch die Analog-Nusselt-Zahl Nu' charakterisiert.

Die Druckabhängigkeit dieser Kennzahlen kann nach den zusammenfassenden Arbeiten von RANZ und MARSHALL [14, 15] für glatte Kugeln wie folgt implizit dargestellt werden:

$$Nu = 2,0 + 0,60 Pr^{1/3} Re^{1/2}, \quad (1)$$

$$Nu' = 2,0 + 0,60 Sc^{1/3} Re^{1/2}. \quad (2)$$

Dabei sind:

$Nu = \alpha d/\lambda$, Nusselt-Zahl;

$Pr = \nu/a$, Prandtl-Zahl;

$Re = v d/\nu$, Reynolds-Zahl;

$Nu' = \frac{k_m \bar{M} d p}{k \varrho_L}$, Nusselt-Zahl zweiter Art oder Analog-Nusseltzahl; oder

$Nu' = \beta d/k$;

$Sc = \nu/k$, Schmidt-Zahl;

α Wärmeübergangszahl [$\text{kcal/m}^2 \text{ h } ^\circ$];

d Länge [m];

λ Wärmeleitzahl von Luft [$\text{kcal/m h } ^\circ$];

ν kinematische Zähigkeit [m^2/h];

a Temperaturleitzahl [m^2/h];

v Luftgeschwindigkeit [m/h];

k_m Massenübergangszahl [$\text{kg/m}^2 \text{ h } \Delta p M$];

Δp Partialdruckdifferenz des Wasserdampfes längs dem Transferweg [mm Hg];

M Molekulargewicht des übergehenden Stoffes;

\bar{M} mittleres Molekulargewicht des Gasgemisches im Transferweg;

p Mittelwert aus der Differenz Totaldruck minus Partialdruck des diffundierenden Dampfes im Transferweg [mm Hg];

k Diffusionszahl von Wasserdampf in Luft [m^2/h];

ϱ_L Dichte des Luft-Gas-Gemisches im Transferweg [kg/m^3];

β Stoffübergangszahl [m/h oder $\text{kg/m}^2 \text{ h } \Delta C$];

ΔC Konzentrationsänderung [kg/m^3].

Wenn wir aerodynamische Versuche machen mit einem Testobjekt, das einen Durchmesser d_0 aufweise, so können wir Schlüsse ziehen auf ein geometrisch ähnliches bei anderem Druck. Soll die Reynolds-Zahl gleich bleiben, so wird dadurch der Durchmesser d_1 des letzteren bestimmt. Da für die gewünschte physikalische Ähnlichkeit der Wärme- und Stoffübergänge die Kennzahlen Nu und Nu' konstant bleiben müssen, hat dies zur Folge, dass im einen Fall die Prandtl-Zahl Pr , im andern die Schmidt-Zahl Sc durch eine Druckvariation gemäss Abschnitt 2.3 nicht beeinflusst werden dürfen. – Die Berechnung

dieses Einflusses auf die Kennzahlen Pr und Sc ergibt Schwankungen, die kleiner als 1% sind. Das heisst, dass unsere Forderung praktisch erfüllt ist – die Berechtigung für Extrapolationen von Experimenten aus dem Labor in die natürliche Atmosphäre ist damit für glatte Kugeln gegeben. Es sei hier noch speziell vermerkt, dass es sich hierbei nur um Luft-Luft-Transformationen handelt! Aus Form-Betrachtungen (siehe zum Beispiel [9, 16]) wissen wir aber, dass Hagelkörner höchst selten durch glatte Kugeln zu charakterisieren sind; wir müssen also auf die allgemeinen Gleichungen für beliebige Körper zurückgreifen. Diese lauten wie folgt:

$$Nu = f(Pr, Re), \quad (3)$$

$$Nu' = f'(Sc, Re). \quad (4)$$

Oben erwähnte Überlegungen sind damit ebenso gültig für den allgemeinen Fall; die Nusselt-Zahl Nu und die Analog-Nusselt-Zahl Nu' bleiben gleich bei gleichem Re und Druckvariationen in dem von uns geforderten Bereich.

Die physikalische Ähnlichkeit gilt damit auch für den allgemeinen Körper.

Neben den Problemen der Strömung, des Wärme- und des Stoffaustausches, die durch die Kennzahlen Re , Nu und Nu' charakterisiert werden, spielt auch das Einfangen freien Wassers durch das Hagel- oder Testkorn eine Rolle bei der Betrachtung des Wachstums einer Eispartikel. Wie weit diese Einfangwahrscheinlichkeit druckabhängig ist, kann nicht entschieden werden, es besteht jedoch die Hoffnung, dass sie bei gleicher Reynolds-Zahl ebenfalls gleich bleibt.

3. Standort des Hagelversuchskanals

Im Programm der Eidgenössischen Kommission zum Studium der Hagelbildung und der Hagelabwehr war von allem Anfang an die Forschungsstelle am Eidgenössischen Institut für Schnee- und Lawinenforschung zur Bearbeitung der Probleme über die künstliche Erzeugung hagelbildender Verhältnisse vorgesehen. Eine längere Tradition dieses Institutes in den Untersuchungen an festen Niederschlagspartikeln sowie grössere praktische Erfahrungen über atmosphärische Vereisungen in der Natur und im Windkanal waren die Gründe hierzu.

Durch eine wesentliche Vergrösserung des Institutes auf Weissfluhjoch wurde der Laboratoriumsraum zur Aufnahme der geplanten Anlage geschaffen; Kälteräume zur Eisuntersuchung standen bereits mehrere zur Verfügung.

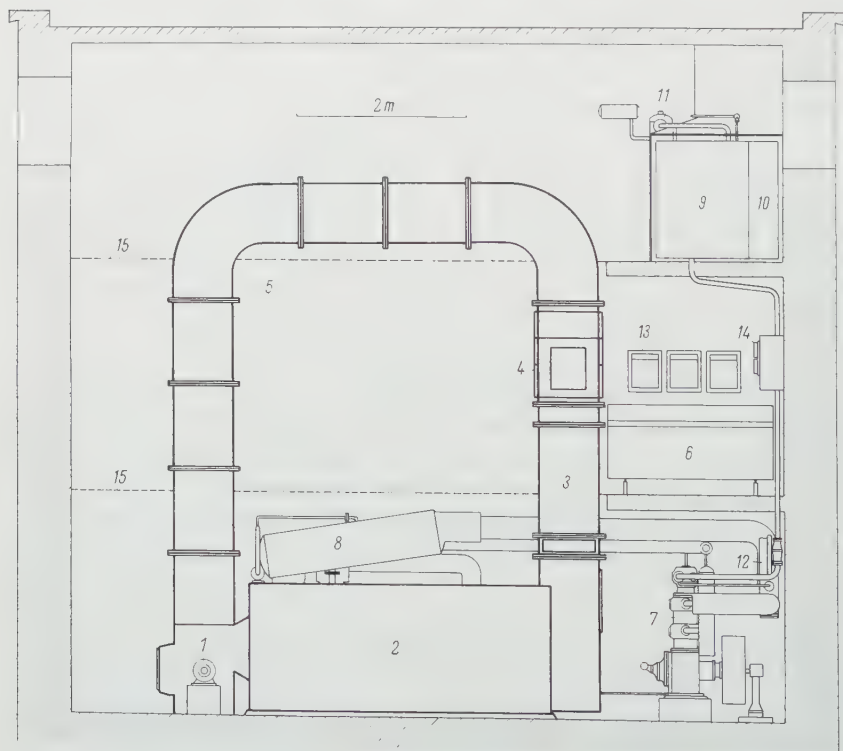
Die Wahl des Standortes ist auch günstig, da zufolge der Höhe dieser Forschungsstation (2665 m über Meer) mindestens zehnmal pro Jahr Graupelfälle zu beobachten sind. Die Untersuchung der Reif- und Frostgraupeln – Ursprungspartikeln der meisten Hagelkörner – brachte im Laufe der vergangenen Jahre eine wesentliche Klärung dieser speziellen Entwicklungsstufen des häu-

figsten Hagelkornwachstums. Die Ansetzung des Versuchsprogrammes mit dem Hagelkanal wurde damit wesentlich erleichtert.

4. Aufbau und Wirkungsweise des Hagelversuchskanals

4.1 Übersichtsschema

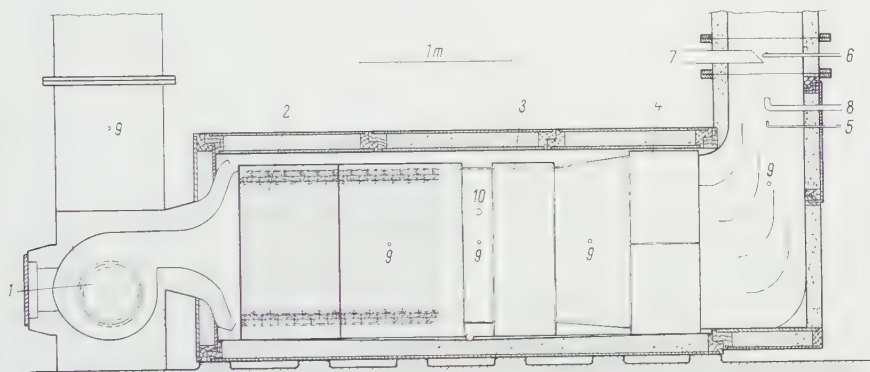
Die Hauptcharakteristik des Hagelversuchskanals ist der Darstellung in Figur 1 zu entnehmen: Ein Ventilator 1 treibt die Luft durch den Temperierungs- und Filterteil 2 in ein Winkelstück, dem die 2 m lange Befeuchtungs- und Ausgleichsstrecke 3 folgt. Dieser angebaut ist die eigentliche Meßstelle 4, in der die einzelnen Experimente stattfinden. Der Luftstrom gelangt hernach durch einen Diffusor in die eigentliche Rückführung 5 und zurück zum Venti-



Figur 1

Der Hagelversuchskanal (1:90). 1 Ventilator; 2 Temperierungs- und Filterteil; 3 Befeuchtungs- und Ausgleichsstrecke; 4 Meßstelle; 5 Rückführung; 6 Steuerpult; 7 Kältekompressor; 8 Flüssigkeitsabscheider; 9 Ammoniak Kondensor; 10 Kompressorkühler; 11 Ölabscheider; 12 Motorventil; 13 Kompensationsschreiber; 14 Temperaturregelanlage; 15 Rostböden.

lator, womit der Kreislauf geschlossen ist. Die gewünschten Feuchtebedingungen werden durch Einspritzen von Dampf oder Wasser im Anfang der Ausgleichsstrecke 3 erzeugt; am gleichen Ort geschieht auch die Zugabe der Eiskbildungskerne, die die Vereisungs-Charakteristik der an die Versuchsobjekte angeströmten Feuchte bestimmen. Die Steuerung der Anlage erfolgt von einem Pult 6 aus, wo auch sämtliche wichtigen Grössen angezeigt und registriert werden. 7 stellt den Kältekompressor dar, 8 bis 12 dessen Zubehörteile.



Figur 2

Der Temperierungs- und Filterteil einschliesslich Befeuchtungsstrecke (1:50). 1 Gebläse; 2 Ammoniakverdampfer; 3 Heizelement; 4 elektrostatisches Luftfilter; 5 Eiskbildungskerneinführung; 6 Wassereinführung; 7 Wassereinführung; 8 Dampfeinführung; 9 Temperaturkontrollmessstellen; 10 Temperaturfühler für Kompressorsteuerung.

Figur 2 zeigt den Temperierungs- und Filterteil einschliesslich der Befeuchtungsstrecke etwas ausführlicher. 1 bedeutet hier das Gebläse, 2 den Ammoniak-Verdampfer oder Luftkühler, 3 ein Heizelement und 4 das elektrostatische Luftfilter. Durch die Leitung 5 werden die Eiskbildungskerne eingespritzt, währenddem 6 und 7 für Wasser-, 8 für Dampfeinführung bestimmt sind. Die mit 9 bezeichneten Punkte bedeuten Temperaturkontrollmessstellen, währenddem am Orte 10 ein Temperaturfühler für ein Regelgerät liegt. Es sei noch vermerkt, daß Anlage und Labor nach dem Baukastenprinzip errichtet sind und leicht demontiert oder umgebaut werden können.

4.2 Zur Konstruktion des Windkanals

Die Bedingungen an den Kanalquerschnitt wurden gegeben durch die Forderung eines Meßstellenquerschnittes von 25×25 cm; dies führte zu einer lichten Weite von 50×50 cm, die nur im Temperierungsteil verdoppelt wurde, um durch Vergrösserung der Luftkühler-Übergangsflächen sowie der Verweilzeiten

bessere Wärme- bzw. Kälteauschswerte zu erreichen. Die Höhe des Kanalsystems wurde bedingt durch die notwendige Länge der Ausgleichsstrecke, soll doch das darin eingespritzte Wasser bis zur Meßstelle die Temperatur der umgebenden Luft praktisch angenommen haben.

Von der Kanalwandung wurde gefordert: gute Isolation, geringe Wärmekapazität sowie durchgehend praktisch gleicher Ausdehnungskoeffizient. Die erste Bedingung resultierte aus dem Wunsch, auch bei tiefsten Betriebstemperaturen von -60°C nur geringe Wärmeverluste decken zu müssen, die zweite aus dem Bedürfnis, rasche Temperaturänderungen vornehmen zu können, währenddem die dritte allzu grosse Spannung innerhalb der Kanalwand ausschliessen soll. Nach verschiedenen Material- und Bauversuchen wurde auf 10 cm dicke Zublanit-Kunststoffplatten gegriffen. Sie bewährten sich in der Folge ausgezeichnet. Die mechanischen Eigenschaften liessen es zudem zu, die Platten zu einer selbsttragenden Konstruktion zu verleimen. Zum Schutz gegen Beschädigungen sowie zur Schaffung einwandfreier Verbindungsstellen wurden allerdings die Kanten mit Holzleisten geschützt und aus Holz bestehende Flansche aufgeklebt.

Zur Glättung der Oberfläche sowie zu ihrem weiteren Schutze wurde der Kanal in- und auswendig mit Araldit-Spachtelharz 880 AB bearbeitet. Dieser Überzug, der speziell für diesen Zweck von der CIBA entwickelt wurde, zeigte auch bei den tiefsten Temperaturen noch eine gewisse Elastizität, die der sonst allgemein zu beobachtenden Rissbildung entgegenwirkt. Allerdings scheint eine extrem starke Strapazierung mit ständigen Temperaturwechseln und Vereisungen eine Durchweichung des Anstriches und eine Verminderung seiner Haftfähigkeit an den Platten zur Folge zu haben. Die Unterteilung des Kanals erfolgte meist in 1 m lange Stücke, die mit aufklappbaren Schrauben leicht getrennt und wieder zusammengesetzt werden können. Zur Einführung von Meßsonden und Einspritzdüsen oder auch zu Beobachtungszwecken sind verschiedene Deckel und Klappen angebracht.

4.3 Das Gebläse

Die Erzeugung der verlangten Luftgeschwindigkeit geschieht mittels eines Sulzer-Radialgebläses, das durch einen Gleichstrom-Nebenschlussmotor angetrieben wird. Die variable Feldspannung wird über eine Tyratrongruppe produziert. – Zur Vermeidung von Druckstößen wurde eine Drehzahlpräzision von besser als 1% über den ganzen Drehzahlbereich von 100 bis 3000 U/min gefordert, unabhängig von der Belastung des Motors. Diese Bedingung konnte mit einem elektronischen Regelverstärker eingehalten werden, der den Befehl des Präzisionspotentiometers (zur Sollwert-Drehzahleinstellung) vergleicht mit dem gebläsegekuppelten Tachodynamo. Eine allfällige Abweichung zwischen Soll- und Istwert wird sofort auskorrigiert (Lieferfirma Sprecher & Schuh AG).

4.4 Die Kälteanlage

Der prinzipielle Aufbau des Hagelversuchskanals hat zur Folge, dass die geforderte Feuchte der Kanalluft stetig beigegeben werden muss. Im Extremfall ist daher anzunehmen, dass sämtliches eingespritzte Wasser in fester oder flüssiger Phase während eines Kreislaufes im Kanal oder am Luftkühler niedergeschlagen wird. Der Wasserdampf selber dürfte bis auf den Dampfdruck über dem kältesten Teil kondensieren oder sublimieren. – Die aufzuwendende Kälteenergie ist aus diesem Grunde verhältnismässig gross und steigt proportional mit dem Wassergehalt pro Kubikmeter Luft und der Luftgeschwindigkeit. – Der Vorteil der Methode liegt im einfachen Aufbau der Versuchsanlage sowie der grossen Variabilität der Versuchsatmosphäre.

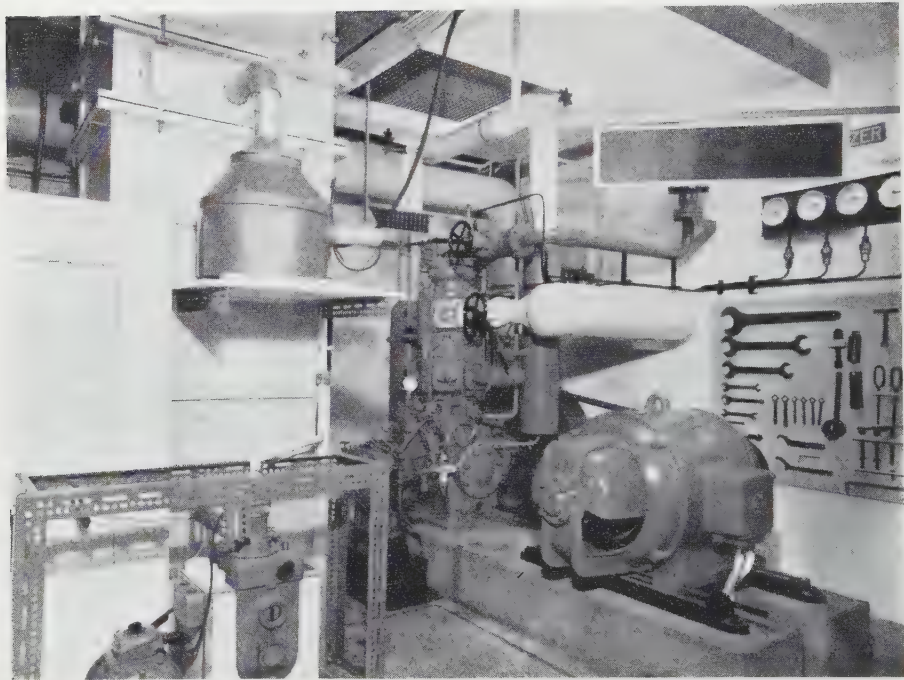
Nachstehend in Abschnitt 4.7 besprochene Eigenheiten der Tropfenerzeugung verlangen eine Heissdampfeinspritzung in den Kanal, die allein gewisse kleinste Tropfengrössen bei noch einigermaßen vernünftigen Apparatebedingungen garantiert. Der Kältebedarf wird aber damit gegenüber einer direkten Wassereinspritzung um einen Faktor von rund 7 vermehrt! Daher rührt das Verlangen, mit der Kälteanlage Temperaturen von -60°C zu erreichen, damit das resultierende Wasser-Luft-Gemisch eine tiefste Temperatur von -40°C erreiche (gemäss Bedingungen in Abschnitt 2.3).

Auf Grund des dadurch vorgeschriebenen Kältebedarfes – er wird später explizit berechnet – plante die Firma Sulzer die Kälteanlage. Als Maschinentyp konnte sie einen 2stufigen Serientyp CV 180 (Figur 3) verwenden, der durch Aufbau einer speziellen dritten Stufe ein besonders auch bei tiefsten Temperaturen vorteilhaftes Leistungsdiagramm aufweist. Als Arbeitsmedium wurde Ammoniak gewählt, das direkt im Luftkühler verdampft. Der Kältekompressor wird durch einen 25-PS-Motor wahlweise auf 360 oder 720 U/min betrieben.

Eine gewisse Komplizierung der Kälteanlage ergab sich durch den Standort und die damit verbundene Unmöglichkeit einer Wasserkühlung des Ammoniakkondensors sowie des Kompressors selber. So wurde auf eine Aussenluftkühlung gegriffen, die sich auch bei leicht stürmischem Wetter bewährte (Figur 1, Positionen 9 und 10).

Um eine allzu grosse Überhitzung der Ammoniakdämpfe in den einzelnen Verdichtungsstufen zu verhindern, wurden zusätzlich zwei Zwischenkühler eingebaut, die nach Bedarf automatisch zum Einsatz kommen. Der Luftkühler oder Verdampfer (Figur 2, Position 2) im eigentlichen Windkanal ist als Rippenrohrsystem ausgebildet, durch das die Luft mit einer rund 8mal kleineren Geschwindigkeit als durch die Meßstelle streicht.

Die Steuerung der Kälteleistung kann auf zwei Arten geschehen: die erste Art ist von Bedeutung, wenn tiefere Temperaturen auf schnellstem Wege erreicht werden sollen. Sie besteht in einer Leistungssteuerung, die eine Einstellung eines Motorventils (Figur 1, Position 12) in der Ammoniaksausleitung so



Figur 3
Der Kältekompressor.

wählt, dass die Kompressormotorleistung mit dem eingestellten Sollwert übereinstimmt. Insbesondere kann damit bei Maximalleistung durch das Temperaturgebiet gefahren werden, bei dem der Kompressor mehr Energie aufnehmen kann, als der Motor abgibt. Dies kann der Fall sein bis zu Verdampfertemperaturen von rund -5°C bei Tourenzahl I und -30°C bei Tourenzahl II; diese Werte werden aber auch durch die Kondensationstemperatur des Ammoniaks beeinflusst, das heisst durch die Aussenlufttemperatur.

Die zweite Steuerart erlaubt ein Erreichen und die Einhaltung einer gewählten Verdampfertemperatur. Der Regelfühler befindet sich dabei allerdings nicht direkt am Verdampferelement, sondern im Luftstrom gemäss Position 10 von Figur 2. Die Regelung geschieht wiederum über das gleiche Motorventil in der Ammoniaksaugleitung, das bei Erreichen der Luftkühler-Sollwerttemperatur die Kälteleistung des Kompressors der Kälteabgabe am Verdampfer anpasst. Diese Steuermethode ist speziell von Vorteil bei der Einhaltung gleicher Ausgangsbedingungen einzelner Versuchsreihen. Als Regelsystem beliebte eine Rheoflex-Anlage der Firma Sauter AG.

4.5 Steuerung und Regelung der Meßstellentemperatur

In der Natur muss damit gerechnet werden, dass Eiskpartikeln in einer Gewitterwolke mit mehr oder weniger Aufwind laufend in kältere oder wärmere Zonen gelangen. Die Versuchsbedingungen bezüglich der Temperatur müssen daher auch im Hagelversuchskanal relativ rasch variiert werden können. Dieser Bedingung wirkt aber die Wärmekapazität der rund 1,2 t schweren Verdampferelemente entgegen, die den Hagelversuchskanal in dieser Hinsicht sehr träge gestalten. – So wurde denn das energetisch etwas unsinnige Prinzip angewendet, am Verdampfer mehr Kälte bei tieferen Temperaturen zu erzeugen, als im jeweiligen Versuch gebraucht wird. Der Kälteüberschuss wird mittels einer im Kanal eingebauten 19-kW-Heizung vernichtet (Figur 2, Position 3).

Da die durch den Luftstrom des Kanals geführten Heizdrähte praktisch trägheitslos eingesetzt werden können, ist damit zu rechnen, dass die Temperatur genügend rasch variiert werden kann, wenn auch der Verdampfer seine Temperatur praktisch beibehält. Da jedoch das Ausmass der Temperaturänderung wesentlich durch die Trägheit des Kanalstückes zwischen Heizung und Meßstelle beeinflusst wird, können nähere Daten nur durch entsprechende Messungen ermittelt werden (siehe Abschnitt 6.3).

Die Heizleistung kann auf jeden Zwischenwert eingestellt werden, nachdem die Lieferfirma (Sprecher & Schuh), ähnlich wie bei der Ventilatorsteuerung, auf eine Gleichstromspeisung gegriffen hat. Je nach den Impulsen eines elektronischen Steuerdispositivs werden Schalttyratrons eingesetzt, die in der Folge drei Ignitronröhren zünden. Die damit produzierten Gleichströme werden überlagert und der Kanalheizung zugeführt.

Der Einsatz der Heizung kann auf folgende Art geschehen:

a) *Handsteuerung*. An einem Potentiometer kann die gewünschte Heizleistung direkt in Kilowatt eingestellt werden.

b) *Temperaturregelung I*. Wird eine bestimmte Meßstellentemperatur gewünscht, so kann diese an einem Ferngeber eingestellt werden. Über einen Temperaturfühler sorgt ein elektronisches PID-Regelsystem (Fabrikat Hartmann & Braun, Frankfurt) für raschestes Erreichen des Sollwertes durch entsprechende Befehlsabgabe an das Steuerdispositiv der Kanalheizung. Infolge der vorteilhaften Konstruktion des Reglers «Regelux 3» kann durch eine dosierte, separate Einstellung der Proportionalregelung, des Vorhaltes und der Nachhaltezeit die optimalste Regelung entsprechend den Anlage- und Betriebsbedingungen erreicht werden.

c) *Temperaturregelung II*. Anstatt auf die Meßstellentemperatur kann auf die Verdampfertemperatur geregelt werden, was speziell beim Abtauen des Verdampfers, wo die Kälteanlage stillgelegt wird, von Vorteil ist.

d) *Temperatur-Programmsteuerung*. Ein Programmgeber ersetzt den Ferngeber der Temperaturregelung I und gestattet damit ein zum voraus gewähltes

Temperaturprogramm ablaufen zu lassen. (Die Planung des gesamten Temperaturregelteiles wurde in Zusammenarbeit mit der Firma Camille Bauer AG, Basel, ausgeführt.)

4.6 Die Filterstrecke

Die Reinigung der Luft, insbesondere von den eingespritzten Eisbildungskern-Substanzen, obliegt dem elektrostatischen Luftfilter, Fabrikat Trion AG, Zürich. Dessen vorteilhafte Eigenschaften wurden bereits früher beschrieben [13], so dass auf eine Wiederholung verzichtet werden kann.

4.7 Die Befeuchtungs- und Ausgleichsstrecke

Die Befeuchtungs- und Ausgleichsstrecke übernimmt trockene und gereinigte Luft einer bestimmten Temperatur aus dem Temperierungs- und Filterteil und schafft durch Zugabe von Feuchtigkeit flüssigen oder dampfförmigen Charakters innerhalb der Ausgleichsstrecke das gewünschte Klima. Die Länge der Ausgleichsstrecke wird, wie schon erwähnt wurde, bestimmt durch die Zeit, in der eine Anpassung der Temperaturen der erzeugten Wassertropfen an die der Umgebungsluft erfolgt. Eine theoretische Berechnung dieser Verhältnisse zeigte in der Folge, dass eine Ausgleichsstrecke von 2 m Länge genügt, sofern nur Tropfen eingespritzt werden. Praktische Versuche zeigten sogar auch stationäre Mischtemperaturen bei Dampfeinspritzung und nachfolgender Kondensation und Abkühlung.

Die Produktion von Tropfengesamtheiten verschiedener Tropfendurchmesser und Konzentrationen stellt eines der schwierigsten Probleme der Erzeugung atmosphärischer Verhältnisse dar. Im Gegensatz zu den grossräumigen Gewitterwolken komplizieren sich die Verhältnisse in einem Laboratoriums-Experimentierraum durch das Vorhandensein von Wänden. Meist ist es da nicht möglich, Wasser in flüssiger Phase durch Expansion nahezu gesättigter Luft zu erhalten. Die entsprechenden apparativen Bedingungen sind zu kompliziert, auch spielt der Zeitfaktor eine ungünstige Rolle, müssten wir doch die Kondensation auf kurzen Wegstücken produzieren. Daher ist es nicht verwunderlich, dass auf verschiedene andere denn beim Wettergeschehen vorkommende Tropfenproduktionsvarianten gegriffen werden musste.

Als Hauptbedingungen an die Erzeugungsmethodik sind zu erwähnen:

1. Keine merkliche Beimischung kanalfremder Luft.
2. Die eingespritzten Tropfen dürfen keine allzu hohe Geschwindigkeit haben; es soll der Impuls der eingespritzten Feuchte nur ein Bruchteil des Impulses der dazugehörigen Luftmenge sein. (Damit sollten die Störungen, die sich auf die Strömung übertragen, auf ein erträgliches Mass reduziert werden.)

Diese beiden Einschränkungen liessen verschiedene sonst gebräuchliche Methoden als unbrauchbar erscheinen, so zum Beispiel jegliche Tropfenerzeu-

gung mit Beimischung von Pressluft an der Düse. Die zur Produktion kleinster Wasserpartikeln ohne Pressluft notwendigen hohen Drucke (einige 100 kg/cm²) mussten ebenfalls fallengelassen werden. So ergaben sich schliesslich noch folgende brauchbaren Erzeugungsarten:

a) Für Tropfen mit Durchmessern der Grössenordnung 1 μ : Einführung von kondensierendem Heissdampf in die Kaltluft des Kanals.

b) Für Tropfen von 5 bis 20 μ : Einführung eines in einem mechanischen Zerstäuber erzeugten Tropfen-Luft-Gemisches (die beigemischte Luftmenge ist hier relativ klein).

c) Für Tropfen mit Durchmessern von 20 μ und mehr: Einspritzung von Wasser durch konische Schleuderdüsen.

Die entsprechenden Apparate sind:

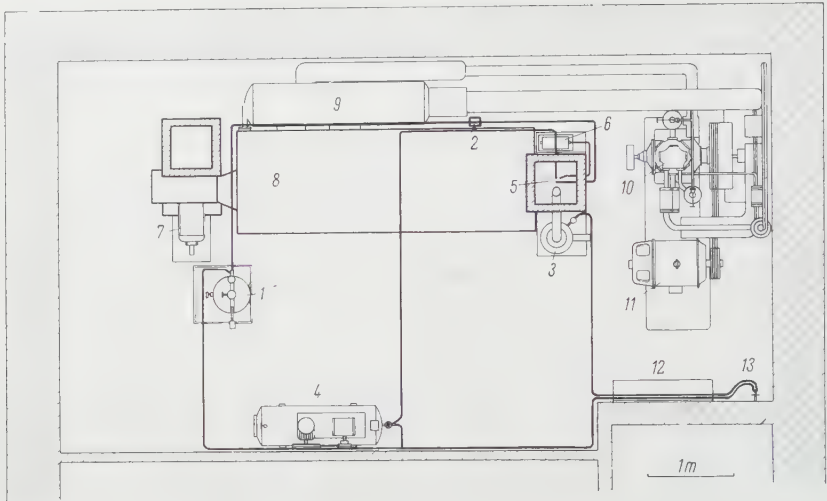
ad a) *Dampfkessel*: Der Heissdampf wird in einem Elektrodendampfkessel mit einer Stundenleistung von 20 bis 40 kg bei einstellbarem, konstantem Druck erzeugt. Die Beimischung zur Kanalluft erfolgt über ein fernsteuerbares Motorventil, das geeichte Dampfmenge ausströmen lässt.

ad b) *Zerstäuber*: Eine energetisch interessante Produktion kleiner Tropfen kann über eine rotierende Schleuderscheibe geschehen. Durch stetige Wasserzuführung wird auf dieser Scheibe ein abgleitender Wasserfilm erzeugt, der laufend auf ein umrahmendes Kammsystem aufprallt. Die Wasserhaut zerplatzt darauf zu nicht benetzenden Tröpfchen, die in hohen Konzentrationen von einer geringen, automatisch mit angesogenen Luftmenge mitgenommen und der zu befeuchtenden Kanalluft beigemischt werden. Der Wassernachschub geschieht vollautomatisch über ein schwimmergesteuertes Magnetventil.

ad c) *Schleuderdüsen*: Durch einen Luftkompressor, dessen Vorratsgefäss zum Teil mit Wasser gefüllt ist, kann letzteres über ein Magnetventil in eine Schleuderdüse geführt werden. Das Wasser wird in dieser tangential eingeleitet und zerspritzt direkt in die Kanalluft. Durch Variation des angewendeten Druckes kann die Wassermenge dosiert werden. Für speziell konstante Bedingungen wird anstelle des Kompressors eine Pressluftflasche über ein Reduzierventil auf das Luftkissen im Wasservorratsgefäss geschaltet. – Die Einspritzdüse ist zudem heizbar und kann ebenfalls fernbedient werden.

Der Aufbau dieser Anlagen geht aus Figur 4 hervor, die als Grundriss die Anordnung von Dampfkessel 1, Motorventil 2, Zerstäuber 3, Luftkompressor 4 und Befeuchtungsstrecke 5 darstellt.

Der Charakter der künstlich erzeugten Atmosphäre wird aber ausser durch Temperatur und Feuchte (und dem umgebenden, aber nicht variablen Luftdruck) weiter bestimmt durch die Art und Konzentration der Luftverunreinigungen, die speziell für die Einsatztemperatur des Gefrierprozesses verantwortlich sind, das heisst durch die Eisbildungskerne. Die Erzeugung derselben erfolgt nach der bereits früher beschriebenen Methode [13] durch Verdampfen spezieller Substanzen in einem Hochtemperatur-Rohröfen (Figur 4, Position 6).



Figur 4

Die Aufstellung der Feuchteproduktionsanlagen (Ansicht des untersten Stockwerkes von oben) (1:90). 1 Dampfkessel; 2 Dampfmotorventil; 3 Zerstäuber; 4 Luftkompressor; 5 Befeuchtungsstrecke; 6 Hochtemperaturofen; 7 Ventilatormotor; 8 Temperierungs- und Filterteil; 9 Flüssigkeitsabscheider; 10 Kältekompressor; 11 Kompressormotor; 12 elektrische Hauptverteilung; 13 Wasserzuleitungen.

Eine Sublimation dieser Dämpfe in durchströmender Luft ergibt Teilchen mit Durchmessern von $0,02$ bis $0,05 \mu$, die der Kanalluft beigegeben werden können.

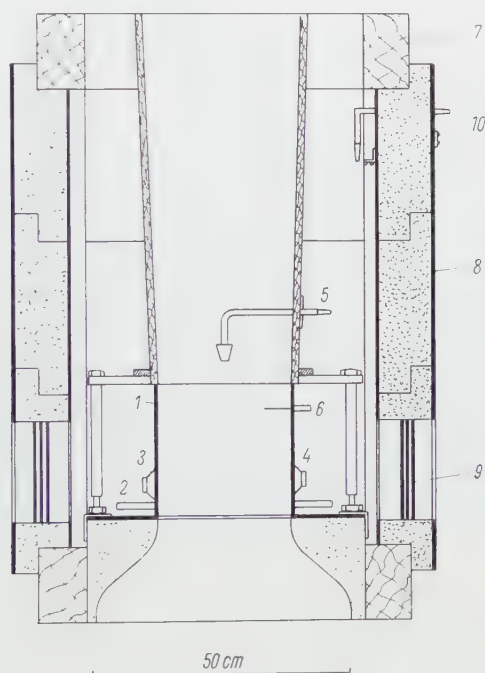
Über die Zusammenhänge zwischen Substanz und Gefriereinsatztemperatur sei zum Beispiel auf die Veröffentlichungen von PRUPPACHER und SÄNGER [17, 18] verwiesen.

Aus all diesen Ausführungen geht hervor, dass die Meßstellentemperatur nichts anderes darstellt als die Mischtemperatur, die sich ergibt, wenn der trockenen, kalten Luft des Temperierungsteiles Feuchte irgendwelcher Form beigegeben wird. Aber auch die Eisbildungskerne können diese resultierende Temperatur beeinflussen, sofern sie einen Phasenübergang flüssig-fest ganz oder teilweise vor der Meßstelle zur Folge haben. Die Untersuchung dieses letzten Falles ist besonders interessant für einen Vergleich des Wachstums eines Objektes in einem Aufwind mit angeströmten kleinern Partikeln flüssiger, fester oder gemischter Phase.

4.8 Die Meßstelle

Der Raum, in dem die eigentlichen Experimente stattfinden, wird als Meßstelle (Figur 5) bezeichnet. In ihr wird die Vereisung von aufgehängten oder frei im Luftstrom ausgeschwebten Objekten studiert. Im Gegensatz zu den andern

Kanalstücken, wo gleiche Elemente Luftstrombegrenzung und Isolation übernehmen, sind diese Funktionen bei der Meßstelle getrennt. Die direkte Begrenzung des Luftstromes ist, um diese Vorgänge sichtbar zu machen, aus Plexiglas 7 gehalten. Ein allfälliges Vereisen desselben kann durch Einschalten und



Figur 5

Schnitt durch die Meßstelle (1:15). 1 Plexiglasrahmen; 2 Strahlungsheizung; 3 Lautsprecher; 4 Mikrophon; 5 Feuchtesonde; 6 Temperaturfühler; 7 Meßstellenrahmen; 8 auswechselbare Abdeckplatten; 9 Fenster; 10 Durchführungen.

Leistungsregulierung der angebrachten zwei Strahlungsheizungsrohren 2 verhindert werden. Prinzipiell dienen zwei Gegenseiten zur Beobachtung, währenddem die gekreuzten Gegenseiten verschiedene Meßsonden aufzunehmen haben.

Ein äusserer Rahmen, unterteilt in einzelne, vertauschbare und teilweise mit Glasfenstern versehene Platten reduziert die Wärmeverluste. Dies hat den Vorteil, dass die Meßsonden nur durch das dünne Plexiglas eingeführt werden müssen, wobei zwischen diesem und der Isolation noch genügend Raum zum Auf- und Ausbau derselben besteht.

Zur Erleichterung einer Ausmessung des Luftstromes innerhalb des geraden Plexiglaskanals sind auf zwei einander gegenüberliegenden Platten zwei Rasternetze eingeritzt, die eine rasche Einstellung der Meßsonden auf die bezeichneten

Positionen ermöglichen. Zur Einführung der Sonden sind auf den gekreuzten Gegenseiten Schlitze im Abstände von 3,5 cm angebracht, so dass im ganzen sieben Ebenen parallel zu den Rasterplatten erfasst werden können. Ein derart abgetasteter Luftstrom dürfte innerhalb der Meßstelle als genügend bekannt gelten. Das gerade Plexiglasstück der Luftstromführung – das Kernstück der Meßstelle – ist auf Schienen senkrecht zum Luftstrom beweglich. Dies ist ein grosser Vorteil, wenn darin aufgehängte, vereiste Objekte aus dem Kanalwind entfernt werden müssen.

4.9 Die Strömungsverhältnisse

Bei der Konstruktion des Windkanals wurde grosser Wert auf möglichst einwandfreie aerodynamische Gestaltung gelegt. Dabei ist speziell zu bemerken, dass eine Vernichtung grösserer Turbulenzen, herrührend vom Radialgebläse, bereits im folgenden Kanalstück mit dem Luftkühler erfolgt. Auch das aus einer Reihe paralleler Platten bestehende elektronische Luftfilter wirkt sich günstig auf die Gleichrichtung des Luftstromes aus. – Die Umlenkung in die Ausgleichsstrecke erfolgt unter Kontraktion durch vier Umlenkschaufeln, die eine gleichmässige Geschwindigkeitsverteilung im Vertikalteil gewährleisten. Vor der Meßstelle wird der Luftstrom nochmals in einem Effusor beschleunigt.

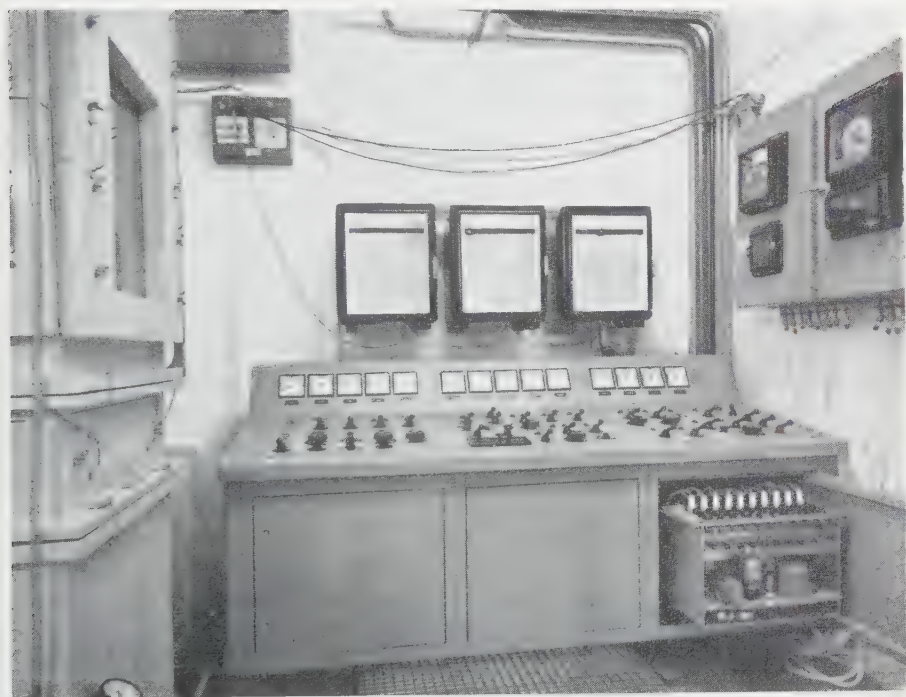
Eine Ausmessung der Geschwindigkeitsverteilung innerhalb der Meßstrecke ergab die Tatsache, dass, abgesehen von einer unwichtigen Randzone von 2,5 cm Mächtigkeit, die Abweichung von der mittleren Geschwindigkeit im Bereich von 1 bis 10 m/s 1% nicht überstieg; im Bereich von 10 bis 28 m/s betrug die maximale Schwankung 1,5%.

Der auf die Meßstelle folgende Diffusor wurde mit einem totalen Öffnungswinkel von 6° konstruiert und bürgt damit für eine möglichst vollständige Rückgewinnung der Druckenergie.

Was die grösste erreichbare Luftgeschwindigkeit anbelangt, so kann erwähnt werden, dass diese ohne weiteres durch Verengung des Meßstellenquerschnittes erhöht werden könnte. Zur Gleichmässigkeit der Luftgeschwindigkeit ist zu vermerken, dass diese nur gewünscht wird bei Experimenten mit fixierten Objekten. Frei ausgeschwebte Partikeln verlangen andere Verhältnisse mit ganz bestimmten Geschwindigkeits- und Druckverteilungen über den Querschnitt und die Länge der Meßstrecke [11], wie sie bis jetzt nur mit Einbauten von Gittern und Stauhauben erreicht werden konnten. Die einzige Ausnahme bilden die Versuche, wie sie am Aerodynamischen Institut der ETH mit Kurzdifusoren unternommen worden sind [10]. Doch soll an dieser Stelle nicht weiter auf diese Punkte eingegangen werden.

4.10 Das Steuerzentrum

Das Nervenzentrum des Hagelversuchskanals ist das Steuerpult (Figur 6). In ihm laufen alle Steuer- und Messleitungen zusammen. Der Aufbau geschah

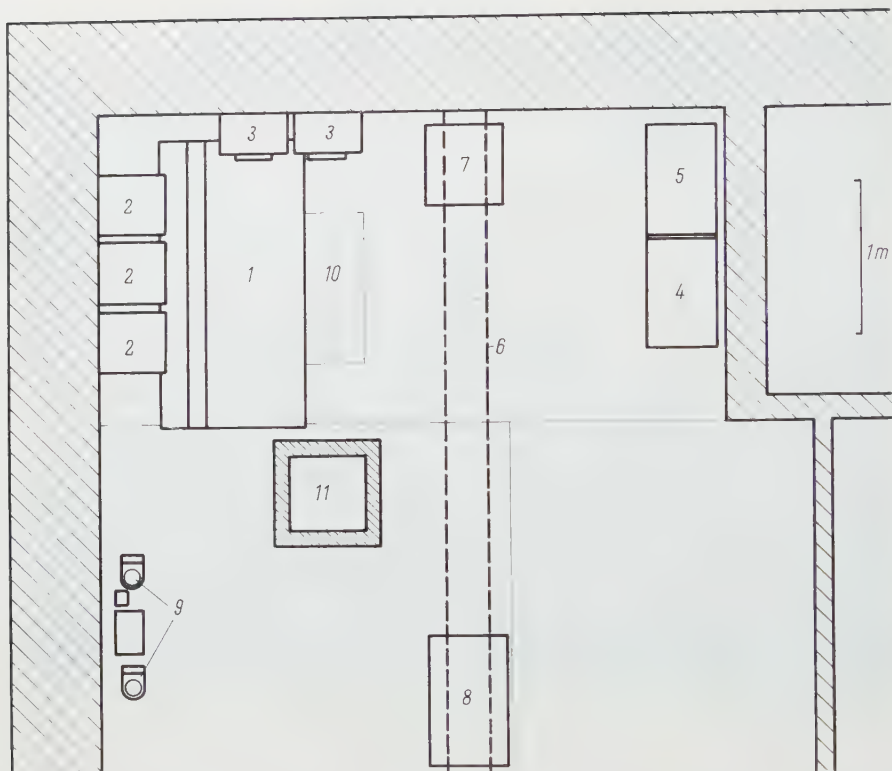


Figur 6
Das Steuerzentrum.

auch nach dem Baukastenprinzip, so dass Umbauten oder Ergänzungen der Verdrahtungen mit Leichtigkeit geschehen können. Die Messungen der verschiedenen Größen erfolgt mit Ausnahme der Strommessungen über Röhrenvoltmeter-Schaltungen. Zehn solche Einheiten mit teilweise separater Basis und teilweise getrennter Speisung sind in einem Kasten untergebracht, wo die zu messenden Gleichspannungen angeschlossen werden können. Wechselspannungen werden zuerst über Steckeinheiten gleichgerichtet. Diese Messgeräte können an alle Spannungen zwischen 0,5 und 500 V so angepasst werden, dass jeder Zwischenwert auf den Anzeigeinstrumenten des Pultes als Maximalausschlag von 100% registriert werden kann.

Das Steuerpult ist fahrbar und wird über 16 Zehnfachkabel mit den übrigen Apparaten verbunden.

Die Anordnung des Messbodens ist aus Figur 7 ersichtlich, die die Lage des Steuerpultes 1 direkt vor der Meßstelle darstellt. Über dem Steuerpult in Augenhöhe liegen auch die drei Kompensationsschreiber 2, die die Protokollführung übernehmen. Der eine dient zur Registrierung der Meßstellentempera-



Figur 7

Apparateanordnung auf dem Messboden (1:50). 1 Steuerpult; 2 Kompensationsschreiber; 3 Verteilerkasten mit Temperaturregelung; 4 elektronische Umformergruppe zu Ventilator; 5 elektronische Umformergruppe zu Heizung; 6 Hängebahn; 7 Temperatur-Schallnessanlage; 8 Feuchte- und Eisbildungskernmessung; 9 elektrische Druckwandler; 10 Rost; 11 Meßstelle.

tur; er ist ausgeführt als Linienschreiber. Die beiden andern Registriergeräte sind 12-Punkt-Schreiber (Fabrikat Hartmann & Braun, Frankfurt), wobei der eine Temperaturen druckt, der andere in Gleichspannungen von 0 bis 10 mV umgewandelte elektrische Größen. Die Umwandlung dieser Größen und ihre Reduktion erfolgt im Verteilerkasten rechts, wo auch die Geräte zur Temperaturregelung und Programmgebung eingebaut sind. Die beiden Gerätekasten 4 und 5 beherbergen die Umformergruppen für Ventilator- und Heizungssteuerung, währenddem die gestrichelten Linien eine Hängebahn 6 andeuten, an der Gestelle mit der Temperaturmessung über die Schallgeschwindigkeit 7 (siehe Abschnitt 7.2), der Feuchte- und Eisbildungskernmessung 8 hängen. 9 weist auf die elektrischen Druckwandler zur Luftgeschwindigkeitsmessung hin.

Als weitere Erleichterung ist im Messzentrums-Boden ein Rost 10 eingelassen, der die Überwachung des Kompressors gestattet; über ein Spiegelsystem lassen sich dessen Arbeitspunkte anhand von Manometern ablesen.

Diese Anordnung und dieser Aufwand hat zur Folge, dass einfachere Messungen gut von einem einzigen Mann ausgeführt werden können. Für kompliziertere Experimente ist eine zweite Kraft einzusetzen.

5. Die Leistung des Hagelversuchskanals bei stationärem Betrieb

Die Bedingungen, die an den Hagelversuchskanal gestellt wurden (siehe Abschnitt 2.3), betreffen eigentlich nur einzelne Arbeitspunkte. Es dürfte daher interessant sein zu verfolgen, erstens wie sie eingehalten werden können und zweitens, wie die Leistungsfähigkeit in den Zwischengebieten verläuft. Die Kenntnisse der Leistungsfähigkeit sind zudem von ausserordentlicher Bedeutung für die Gestaltung des Versuchsprogrammes über die Wachstumsbedingungen von Eispartikeln. Es wird auch auf Grund dieser Messungen möglich sein, abzuschätzen, ob und wie weit extremere Verhältnisse erzeugt werden können, als sie bei der Bildung von schwerem Hagel wahrscheinlich sind.

Die Leistungsmessungen zerfallen prinzipiell in zwei Gruppen:

1. Das Verhalten des Hagelversuchskanals bei stationären Betriebsbedingungen.
2. Das Verhalten des Hagelversuchskanals bei instationären Betriebsbedingungen.

In diesem Abschnitt soll nur von der ersten Gruppe gesprochen werden, währenddem die zweite dem folgenden Abschnitt Inhalt gibt.

Wenn wir eine allgemeinere Energiegleichung für den stationären Fall aufschreiben, so lautet sie prinzipiell wie folgt:

$$K = Q_F + Q_H + Q_V . \quad (5)$$

Dabei sind:

K Kältemenge pro Stunde, zugeführt durch den Kompressor;

Q_F Leistung, zugeführt durch die eingespritzte Feuchte;

Q_H stündliche Wärmemenge, zugeführt durch die Heizung;

Q_V Leistungsverluste durch Wärmezu- und -abfuhr durch die Kanalwand zusätzlich der vom Gebläse und den Wirbelverlusten erzeugten Wärme.

Die Betrachtung der einzelnen Grössen zeigt:

- a) Die Leistung des Kompressors K ist nur theoretisch bekannt und kann leider nicht einfach gemessen werden. Sie ist zudem abhängig von der Kondensationstemperatur des Ammoniaks, die ihrerseits infolge der Luftkühlung von der Aussenlufttemperatur abhängig ist. Eine Rolle spielt ferner der Betriebszustand, das heisst angesammelte Ölmengen in den Zwischenkühlern der Kompressorstufen usw.

b) Die durch Einspritzen von Feuchtigkeit zugeführte Leistung Q_F kann genau errechnet werden.

Die entsprechende Formel für Wassereinspritzung lautet:

$$Q_F = w_f [(t_f - t_M) c_w + S] v_M F_M. \quad (6)$$

Die Dampfeinspritzung ergibt sich zu:

$$Q_F = w_D [(t_D - t_M) c_w + L + S] v_M F_M. \quad (7)$$

Dabei sind:

w_f Menge des eingespritzten flüssigen Wassers [kg/m³];

w_D Menge des eingespritzten Dampfes [kg/m³];

t_f Temperatur des eingespritzten Wassers [°C];

t_D Temperatur des eingeführten Dampfes [°C];

t_M Temperatur an der Meßstelle [°C];

c_w spezifische Wärme von Wasser [kcal/kg °];

S Gefrierwärme des Wassers [kcal/kg];

L Verflüssigungswärme des Wasserdampfes [kcal/kg];

v_M Luftgeschwindigkeit an der Meßstelle [m/h];

F_M Querschnittsfläche der Meßstrecke [m²].

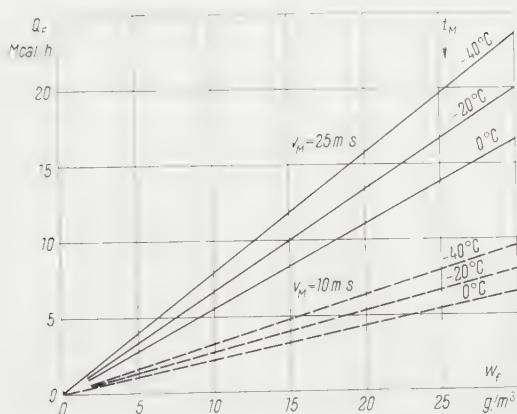
Die mit Formel (6) ermittelten Daten sind für Luftgeschwindigkeiten von 10 und 25 m/s in Figur 8 eingetragen. Als Temperatur des eingespritzten Wassers wurde 10 °C eingesetzt, die Meßstellentemperatur wurde mit 0, - 20° und - 40 °C gewählt ($F_M = 0,0676 \text{ m}^2$). Analoge Werte für Dampf zeigt gemäss Formel (7) Figur 9, wobei als Dampftemperatur 100°C gilt.

Ein Vergleich dieser beiden Darstellungen weist darauf hin, dass bei Wassereinspritzung die Meßstellentemperatur einen relativ grossen Einfluss hat, währenddem dieser bei Dampfeinspritzung nahezu verschwindet.

c) Die durch Heizung zugeführte Wärmemenge Q_H kann durch Messung des Stromes und der Spannung ermittelt werden.

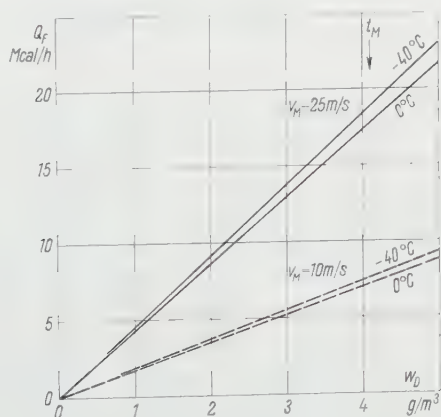
d) Die Verluste Q_L zerfallen in zwei Teile. Der erste umfasst die Wärmeentwicklung durch den Ventilator – sie sind nicht allzu gross, da sich der Antriebsmotor ausserhalb des Windkanals befindet – sowie die Wärmeentwicklung der Luftströmung an und für sich. – Dem Kanal wird auch Wärme von aussen zugeführt durch Wärmeleitung durch die Kanalwände hindurch. Dieser Effekt ist abhängig von der Isolationsfähigkeit der Kanalwandung sowie auch von der Luftgeschwindigkeit, die die Wärmeübergangszahl Kanalwand-Kanalluft bestimmt. Eine Hauptrolle spielt hier natürlich die antreibende Temperaturdifferenz zwischen Labor- und Kanalluft.

Aus diesen Betrachtungen ist zu erschen, dass eine allgemeine, hinreichend genaue Erfassung der Energiebilanz des Kanals viel zu kompliziert wäre. Wir haben jedoch die Möglichkeit, durch günstig ausgelegte Messreihen auf einfache



Figur 8

Dem Kanal zugeführte Leistung Q_F als Funktion der Wassereinspritzung w_f , mit den Parametern Luftgeschwindigkeit und Meßstellentemperatur.

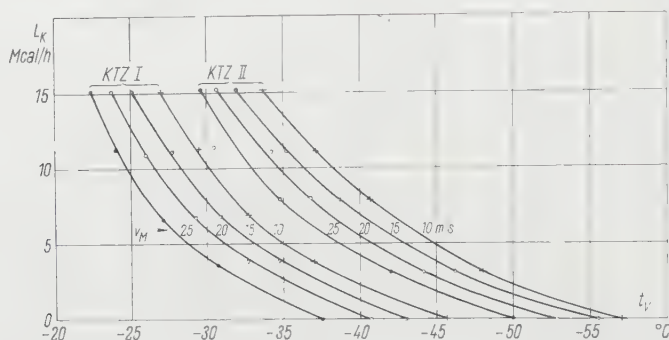


Figur 9

Dem Kanal zugeführte Leistung Q_F als Funktion der Dampfeinspritzung w_D , mit den Parametern Luftgeschwindigkeit und Meßstellentemperatur.

Weise ein zuverlässiges Bild der Leistungsfähigkeit des Hagelversuchskanals zu bekommen. Da es für die Kälteanlage gleich ist, ob Wärme über Feuchtigkeit oder Heizung – nur diese sind auch im allgemeinen Experiment von Interesse – zugeführt wird, können diese Größen ohne weiteres vertauscht werden. Es ist hierbei in erster Linie an die Ersetzung der Feuchteinspritzung durch die einfacher zu handhabende Heizung gedacht. Die Kanalleistungsfähigkeit kann nun direkt gemessen werden, wenn bei einer gegebenen Luftgeschwindigkeit an der

Meßstelle die Heizung einer bekannten Leistung eingeschaltet wird und gleichzeitig der Kältekompressor auf Volleistung läuft. Jetzt braucht man nur ein Gleichgewicht mit konstanten Temperaturen abzuwarten, wo sich die Kälteleistung mit der Heizleistung und den Verlusten die Waage hält. Auf diese Weise kann unter Umgehung einer Messung und Abschätzung der Kanalverluste direkt die dem allgemeinen Experiment bei einer bestimmten Temperatur und einer gegebenen Luftgeschwindigkeit zur Verfügung stehende maximale grösste Leistung gemessen werden. Wird nun die Heizleistung verändert, so



Figur 10

Grösste Kompressorleistung L_K bei verschiedenen Luftgeschwindigkeiten v_M und den beiden Tourenzahlen KTZ I und KTZ II als Funktion der Verdampfer Temperatur t_V .

ergeben sich andere Leistungswerte bei andern resultierenden Temperaturen. Figur 10 zeigt so ermittelte Daten bei der hohen und der niedrigen Kompressortourenzahls für Luftgeschwindigkeiten von 10, 15, 20 und 25 m/s. Die Verschiebung der einzelnen Leistungskurven resultiert aus den unterschiedlichen Verlusten.

Es muss hier noch vermerkt werden, dass die für die Kälteleistung massgebende Temperatur immer die Ammoniak-Verdampfer Temperatur und nicht diejenige der Meßstelle ist! Wir möchten jedoch ein Bild, das zeigt, wie es sich mit der letzteren verhält.

Die Beziehungen zwischen der Temperatur an der Meßstelle und am Verdampfer können am einfachsten über die zwischen dem Verdampfer und der Meßstelle zugeführte Energie erfasst werden, wenn wir diese aufteilen pro durchgeströmten Kubikmeter Luft und mit der zugehörigen spezifischen Wärme und einer mittleren Luftdichte dividieren. So resultiert die Temperaturerhöhung auf Basis der Verdampfer Temperatur.

Die entsprechende Formel lautet:

$$t_M = t_V + \frac{Q_F + Q_H + Q_V}{\varrho_L F_M v_M c_L} \quad (8)$$

Die neu eingeführten Symbole bedeuten:

t_V Temperatur des Verdampfers [$^{\circ}\text{C}$];

Q'_F bis zur Meßstelle durch Feuchte zugeführte Leistung [kcal/h];

Q_H Leistung, zugeführt durch Heizung [kcal/h];

Q'_V Verluste zwischen Verdampfer und Meßstelle [kcal/h];

c_L spezifische Wärme der Luft [kcal/kg $^{\circ}$];

Q_L mittlere Luftdichte [kg/m 3].

Die bis zur Meßstelle durch Feuchte zugeführte Energie Q'_F ist nicht mit der totalen Energie Q_F , gemäss Gleichung (6) oder (7), gleichzusetzen. Normalerweise sind ja die Wassertropfen bis zum Testobjekt nicht vereist. – Da jedoch ein Teil des eingeführten Wassers bereits in der Ausgleichsstrecke an den Wänden abgelagert und ausgefroren wird, kann trotzdem näherungsweise Q'_F durch Q_F (Figur 8) ersetzt werden. In Wirklichkeit sind aber meist günstigere Werte zu erwarten.

Werden der aktuelle Meßstellenquerschnitt von 0,0676 m 2 und eine mittlere Luftdichte von 1 kg/m 3 ($t = -20^{\circ}\text{C}$, $p_{\text{Baro}} = 550$ mm Hg) in Rechnung gesetzt, so ergeben sich Darstellungen der Funktion t_M gemäss den Figuren 11 und 12. Die Figur 11 zugrunde gelegte Luftgeschwindigkeit beträgt 10 m/s, währenddem Figur 12 für 25 m/s gerechnet ist. Die Verluste Q'_V sind direkt aus der Messung ermittelt worden bei $Q_F = Q_H = 0$, ebenso die Grenzleistung des Kompressors bei Tourenzahl II, die aus Figur 10 übernommen worden ist. Das mit der Anlage durchfahrbare Gebiet befindet sich links der Grenzleistungskurve.

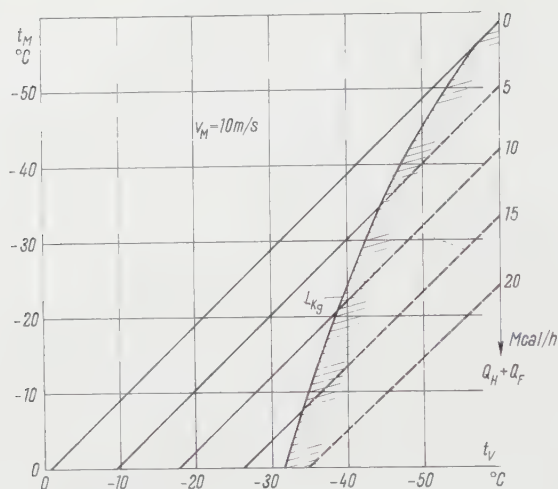
Der Vergleich von Figur 11 mit Figur 12 zeigt, dass die Differenz von Verdampfer- und Meßstellentemperatur bei gleicher zugeführter Energie mit kleinerer Luftgeschwindigkeit grösser wird. Dies ist verständlich, wird doch eine kleinere Luftmenge durch eine gleichbleibende Wärmezufuhr stärker erwärmt als ein grösseres Luftvolumen.

Es muss hier noch auf zwei Punkte hingewiesen werden, die auch für das Folgende Gültigkeit haben:

a) Die Grenzleistungskurve kann sich je nach Witterungsverhältnissen verschieben. Da aber bei einer mittleren Aussenlufttemperatur von $+2^{\circ}\text{C}$ gemessen wurde, dürfte es sich um eine über das Jahr hindurch mittlere Lage handeln. Im Winter sind durchschnittlich grössere Leistungen zu erwarten als im Sommer.

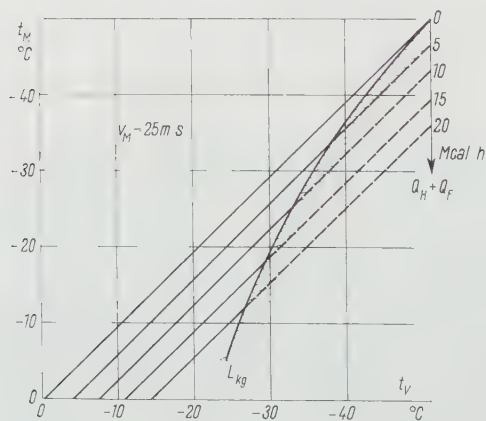
b) Der Fühler zur Ermittlung der Verdampfertemperatur ist am Rippenrohrsystem ausserhalb der Kanalströmung befestigt. Da die Temperaturverteilung am Lufterkühler inhomogen ist und sich je nach Betriebsbedingungen etwas ändern kann, braucht der Meßwert nicht unbedingt mit dem effektiven Wert übereinzustimmen. Bei allen folgenden Darstellungen wird aber der gemessene Wert als Grundlage genommen.

Eine der wichtigsten Fragen, die bei stationärem Betrieb an den Hagelversuchskanal gestellt werden, geht nach dem Ausmass der grösstmöglichen Wassereinspritzung. Als Bezugstemperatur ist dabei die Meßstellentemperatur er-



Figur 11

Abhängigkeit der Meßstellentemperatur t_M von der Verdampfertemperatur t_V als Funktion der zugeführten Leistung $Q_H + Q_F$, zugrunde gelegte Luftgeschwindigkeit $v_M = 10$ m/s. Die Kurve L_{Kg} stellt die Kompressorgrenzleistung bei Tourenzahl II dar.

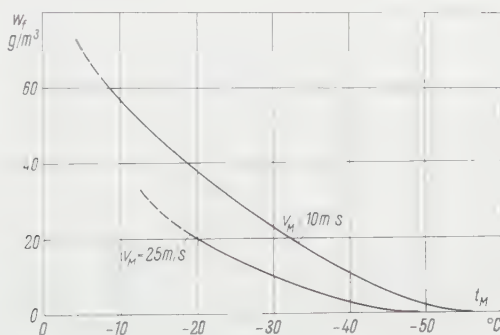


Figur 12

Abhängigkeit der Meßstellentemperatur t_M von der Verdampfertemperatur t_V als Funktion der zugeführten Leistung $Q_H + Q_F$, zugrunde gelegte Luftgeschwindigkeit $v_M = 25$ m/s. Die Kurve L_{Kg} stellt die Kompressorgrenzleistung bei Tourenzahl II dar.

wünscht. Diese Beziehungen können anhand der Grenzleistungskurven des Kompressors gemäss Figur 10 sowie der Formeln (6) und (8) für Wassereinspritzung errechnet werden. Es resultiert damit bei der Bedingung $Q_F = Q_i$ eine Darstellung gemäss Figur 13.

Umrechnungen auf Dampfeinspritzung können über Figuren 8 und 9 geschehen oder zur Ermittlung von Richtwerten durch Division der Wassermengen gemäss Figur 13 durch den Faktor sieben.



Figur 13

Grösstmögliche Wassereinspritzung w_f bei verschiedenen Luftgeschwindigkeiten v_M als Funktion der Meßstellentemperatur t_M (KältekompressortourenzahI II).

Aus all diesen Daten ist ersichtlich, dass den Anforderungen an den Hagelversuchskanal bei stationärem Betrieb vollauf Genüge geleistet wird. Im Gegenteil könnte sogar die Frage aufgeworfen werden, warum die Kälteanlage speziell um 0°C eine so grosse, nicht geforderte Leistungsfähigkeit aufweist. Der Hauptgrund zu dieser Tatsache liegt darin, dass der Kompressor ausgelegt wurde, um auch Temperaturen von -50°C und tiefer zu erreichen. Da seine Leistungskurve jedoch gegen tiefere Temperaturen stark abfällt, resultierte schliesslich eine entsprechende Mehrleistung bei relativ hohen Temperaturen. Dies ist jedoch sehr nützlich, wenn rasch zu tieferen Experimentausgangstemperaturen gefahren werden soll, auch ermöglicht es, wie der folgende Abschnitt zeigen wird, grössere Möglichkeiten beim dynamischen Ausfahren des Hagelversuchskanals.

6. Das dynamische Verhalten des Hagelversuchskanals

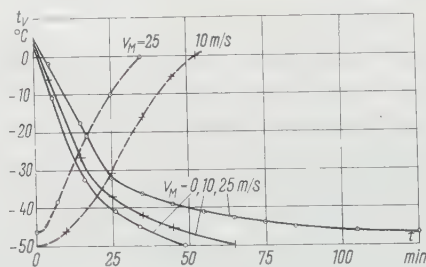
6.1 Allgemeines

Im Unterschied zum stationären Verhalten des Hagelversuchskanals spielt beim Betrieb mit wechselnden Verhältnissen die Wärmekapazität der verschiedenen Apparateteile eine entscheidende Rolle. Die Leistungsbilanz gemäss

Gleichung (5) wäre damit insofern abzuändern, als die Verluste durch Wärme-zuleitung Q_L ihrem Sinne nach erweitert werden müssen und auch die stündliche Energie, die gebraucht wird, die verschiedenen Kanalteile in ihrer Temperatur an die Lufttemperatur anzugleichen, zu umfassen hat. Das Vorzeichen dieses zusätzlichen Betrages hängt jeweils von den Betriebsbedingungen ab. Die Hauptursache für die Wärmeträgheit des Hagelversuchskanals bildet der Verdampfer – er besteht aus rund 1,2 t Eisen – währenddem Heizung und Filter inklusive Übergangsstücken aus etwa 50 kg Aluminium bestehen. Die eigentliche Kanalisolation aus Zublanitplatten dürfte infolge der geringen Dichte und kleinen Wärmekapazität keinen bedeutenden Einfluss auf die Trägheit der Temperaturanpassung haben. Von grösserer Bedeutung ist die direkte Kanalbegrenzung gegen innen, der Aralditharzanstrich.

6.2 Der Einfluss der Kanalträgheit bei stetiger, gleichsinniger Temperaturänderung

Die Wärmeträgheit des Windkanals wird zuerst sichtbar, wenn der Kältekompressor eingeschaltet wird, um zu tieferen Kanaltemperaturen zu fahren. Die dabei zu beobachtende Abhängigkeit der Verdampfertemperatur von der Abkühlungszeit ist für Luftruhe $v_M = 0$ sowie für die Geschwindigkeiten $v_M = 10$ bzw. 25 m/s in Figur 14 aufgetragen (durchgezogene Linien). Durch das Grösser-



Figur 14

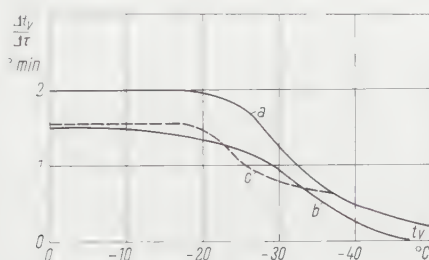
Abkühlungs- und Aufheizkurven, gefahren bei höchster Leistung und verschiedenen Luftgeschwindigkeiten.

werden der Verluste bei ansteigender Luftgeschwindigkeit wächst auch die Zeitspanne, in der eine bestimmte Verdampfertemperatur erreicht werden kann. (Diese Versuche wurden alle bei grösster Leistung auf Kompressortourenzahl II durchgeführt.)

Nach Erreichen einer Verdampfertemperatur von -50° bzw. -47°C wurde der Kompressor jeweils ausgeschaltet, um bei einem Heizeinsatz von 18 kW wieder gegen den Ausgangspunkt zurückzufahren. Die Darstellung dieser Verhältnisse erfolgt ebenfalls in Figur 14, jedoch durch die gestrichelten Linien. –

Im Gegensatz zur Abkühlung wird die Aufheizung durch eine grosse Geschwindigkeit begünstigt, da die mit ihr ansteigenden Kälteverluste im gleichen Sinne wie die Heizung wirken.

Eine Differenzierung gewisser Kurven von Figur 14 gibt uns ebenfalls für zwei Luftgeschwindigkeiten den eigentlichen Abkühlungsgrad gemäss Figur 15.



Figur 15

Abkühlungsgrade in Funktion der Verdampfertemperatur t_v : *a* bei grösster stetiger Temperatursenkung für eine Luftgeschwindigkeit $v_M = 10$ m/s; *b* bei grösster stetiger Temperatursenkung für eine Luftgeschwindigkeit $v_M = 25$ m/s; *c* maximale Abkühlung, ausgehend von stationären Betriebszuständen (praktisch geschwindigkeitsunabhängig).

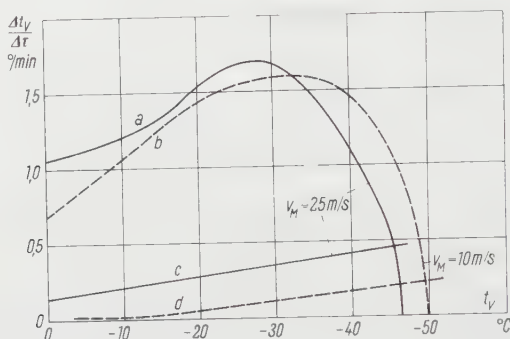
Das Hauptkennzeichen dieser Experimente liegt darin, dass hier die Verzögerung der Temperaturanpassung aller Kanalteile am extremsten ist!

Arbeitet jedoch die Anlage seit längerer Zeit bei der gleichen Verdampfer-temperatur und konstanten Betriebsverhältnissen, so ist anzunehmen, dass sich die Temperaturen der übrigen Kanalteile mit der Zeit ebenfalls auf konstante Werte einstellen. Wollen wir nun von einem solchen stationären Betriebspunkt mit angepassten Temperaturen mit Volleistung nach tieferen Temperaturen fahren, so wären eigentlich grössere Abkühlungsgrade zu erwarten als im weiter oben beschriebenen Falle, wo die Anpassung verzögert stattfindet. Infolge der Anpassungszeit des Kompressors an neue Betriebsbedingungen ist dies nicht der Fall; es ergeben sich für diesen Fall praktisch geschwindigkeitsunabhängige Daten, die im Mittel durch die gestrichelte Kurve von Figur 15 dargestellt werden.

Wird beim Aufheizen aus dem zeitlichen Verlauf der Verdampfertemperatur gemäss Figur 14 auf den Erwärmungsgrad umgerechnet, so ergeben sich die Kurven *a* und *b* von Figur 16. Was dabei sofort in die Augen fällt, ist der Umstand, dass der Erwärmungsgrad bei tiefsten Temperaturen 0 beträgt. Schuld daran dürfte die vorübergehende Weiterproduktion von Kälte durch Verdampfen des Ammoniaks sein, wenn der Kompressor abgeschaltet wird. Erst von einer Verdampfertemperatur, die höher ist als -30°C , stimmt das Bild, dass der Aufwärmungsgrad mit steigender Temperatur abnehmen soll, mit unserer Erwartung überein.

Vergleichsweise zeigt Figur 16 mit den Kurven *c* und *d* auch den Erwärmungsgrad ohne Heizeinsatz. Für diesen sind also nur die Kälteverluste sowie die durch den Ventilator erzeugte Wärme verantwortlich.

Hierbei muss noch erwähnt werden, dass die Differenz der Erwärmungsgrade mit Heizung nicht der Differenz ohne Heizung zu entsprechen braucht. Die Verzögerung des Kanals in der Temperaturanpassung ist ihr nicht ähnlich.



Figur 16

Erwärmungsgrad in Funktion der Verdampfertemperatur: *a* Heizeinsatz 18 kW, Luftgeschwindigkeit $v_M = 25$ m/s, ausgehend von -47°C ; *b* Heizeinsatz 18 kW, Luftgeschwindigkeit $v_M = 10$ m/s, ausgehend von -50°C ; *c* ohne Heizung, Luftgeschwindigkeit $v_M = 25$ m/s; *d* ohne Heizung, Luftgeschwindigkeit $v_M = 10$ m/s.

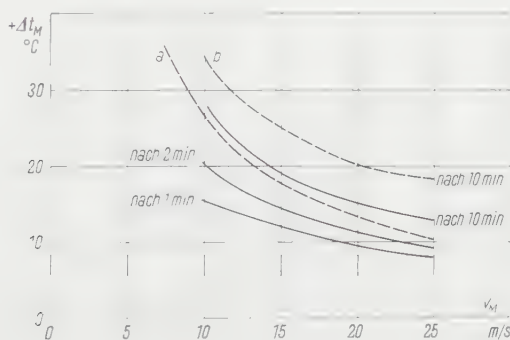
6.3 Die Änderung der Meßstellentemperatur bei gleichbleibender Verdampfertemperatur

Während der vorhergehende Abschnitt die Kanalträchtigkeit und ihren Einfluss auf die experimentbestimmende Verdampfertemperatur beschrieb, sollen an dieser Stelle die Variationsmöglichkeiten der Meßstellentemperatur behandelt werden.

Wie wir aus den Beobachtungen an natürlichen Hagelkörnern wissen [9], sind diese vielfach schalenartig aufgebaut mit einem Wechsel klarer und opaker Schichten. Sobald nun solche Typen im Hagelversuchskanal reproduziert werden sollen, sind periodisch ändernde Wachstumsbedingungen vonnöten. Die Planung sah vor, dass die notwendigen Temperatur- oder auch Feuchteschwankungen bei gleichbleibender Verdampferblocktemperatur nur durch Variation des Heizeinsatzes erzeugt werden sollten. Zu diesem Zwecke kann der Kältekompressor mit Vorteil durch die in Abschnitt 4.4 beschriebene Steuerung betrieben werden, die die Kälteleistung so reguliert, dass der Verdampfer stets die gewünschte konstante Temperatur aufweist.

Die durch die Heizung erreichbare grösste Temperaturerhöhung entsprechend 18 kW Leistung ist in Abhängigkeit der Luftgeschwindigkeit als Kurve *a*

in Figur 17 eingetragen. Diese theoretisch mögliche Differenz stellt sich jedoch nicht augenblicklich ein. Die trägheitsbedingte Anpassung mit der Zeit ergibt sich, wie die durchgezogenen Kurven derselben Figur für Zeitintervalle von 1, 2 und 10 min zeigen. (Die letzte Zeitangabe stellt die Zeitspanne dar, in der mit einer praktisch vollständigen Temperaturanpassung gerechnet werden kann, sofern das experimentelle Vorgehen mit dem hier beschriebenen über-



Figur 17

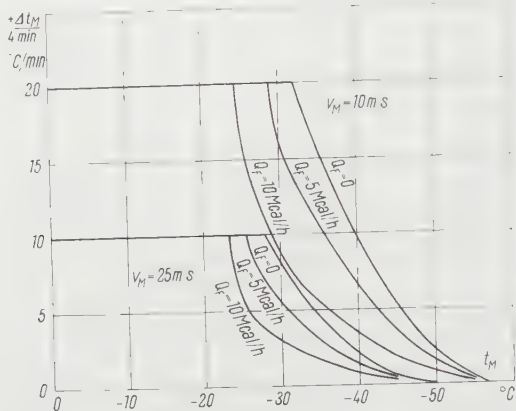
Zeitabhängige, durch Heizeinsatz von 18 kW erzeugte Erhöhung der Meßstellentemperatur t_M in Funktion der Luftgeschwindigkeit v_M (bei jeweils konstant gehaltener Verdampfertemperatur). Kurve *a*, theoretisch berechnete Werte; Kurve *b*, Werte, die erreicht werden mit im Moment der Aufheizung abgeschaltetem Kältekompressor.

einstimmt.) - Wenn der theoretisch mögliche Wert nach 10 min überschritten wird, so rührt das von der Berechnung der umgewälzten Luftmenge auf Grund der zentralen Meßstellengeschwindigkeit, ohne Berücksichtigung der am Rande auftretenden reduzierten Werte, her. Kurve *b* von Figur 17 zeigt die Temperaturen an, die sich bei jeweils abgeschaltetem Kompressor einstellen würden.

Die Abhängigkeit all dieser Werte von der Verdampfertemperatur ist, wie verschiedene Messungen im Bereiche von -5 bis -40°C ergeben haben, nicht von allzu grosser Bedeutung, so dass in Figur 17 Mittelwerte eingesetzt wurden. Es besteht jedoch die erwartete Tendenz, dass die zeitliche Verzögerung bei tieferen Temperaturen zu kleineren Werten strebt.

Da gemäss den vorgenommenen Messungen die Rückkühlung auf den Ursprungswert die gleiche Zeit braucht wie die Aufheizung, ist das Ausmass erzwungener periodischer Temperaturschwankungen bezüglich ihrer Amplitude im Zusammenhang mit der Periodendauer und der Luftgeschwindigkeit bekannt. Es muss jedoch die Einschränkung gemacht werden, dass die Kompressorleistung den jeweiligen Verhältnissen angepasst werden kann. Die Verhältnisse komplizieren sich weiter, wenn auch Feuchtigkeit in den Kanal eingespritzt wird. Diese beeinflusst jedoch, sofern sie konstant bleibt, die Temperaturvariationsmöglichkeiten gemäss Figur 17 praktisch nicht, es sei denn, dass

bei zeitweisen Temperaturen über 0°C eine zusätzliche Trägheit in Rechnung gezogen werden muss, die ihre Begründung in allfälligen Eisansätzen an der Kanalwandung hat. Da aber in Abhängigkeit des Feuchteaufwandes der Arbeitspunkt der Kälteanlage angepasst werden muss, ergeben sich Verhältnisse, die in Figur 18 abgeklärt werden sollen. Sie zeigt die grösste mögliche perio-



Figur 18

Darstellung der grössten, alle vier Minuten erzeugbaren periodischen Erhöhung der Meßstellentemperatur in Funktion der Meßstellentemperatur, bei zwei Luftgeschwindigkeiten und verschiedenen durch Feuchte zugeführten Energiemengen Q_F (Heizeinsatz maximal 18 kW).

dische Temperaturerhöhung bei einer 4 min dauernden Periode in Funktion der tiefsten Meßstellentemperatur. Als Parameter tritt die durch Feuchte eingespritzte spezifische Energie in Megakalorien auf, die Meßstellengeschwindigkeit wurde im einen Fall mit 10 m/s, im andern mit 25 m/s angenommen. Figur 18 demonstriert, dass bei gleicher Luftgeschwindigkeit oberhalb einer Meßstellentemperatur von -20°C das Ausmass der periodischen Temperaturerhöhung einzig durch den Einsatz der Heizung (jeweils 18 kW) bestimmt wird, während unterhalb von -30°C die Kompressorleistung und die Feuchte die Amplitude beschränken.

Weiter kann festgestellt werden, dass sich bei gleicher Heizung die Amplitude nicht umgekehrt proportional zur Luftgeschwindigkeit verändert. Die Trägheit des Kanals wirkt sich bei grösseren Temperaturveränderungen verhältnismässig stärker aus; die Zeit zur Anpassung an den theoretischen Grenzwert steigt.

Aus all diesen Daten sollte nun die Leistungsfähigkeit des Hagelversuchskanals hinreichend bekannt sein, um die Möglichkeiten, die dem Experiment zur Verfügung stehen, erfassen zu können. Ob allerdings die erzeugbaren periodischen Schwankungen der Nachbildung der Natur genügen, lässt sich disku-

tieren. Die Entscheidung auch dieser Frage wird aber erst ein Vergleich entsprechender natürlicher mit künstlich erzeugten Hagelkörnern ergeben.

7. Messmethoden

7.1 Grundsätzliches

Die Messungen der Experimentparameter sind mit Schwierigkeiten verbunden, sobald wir den Charakter einer Atmosphäre mit unterkühlten Wassertropfen ermitteln müssen. Diese Tropfen gefrieren bei den vorkommenden Bedingungen nicht ohne Anwesenheit von Eisbildungskernen. Das gilt jedoch nur für den Fall, wo sie ganz von Luft umgeben sind. Sobald sie auf Oberflächen auftreffen, setzt meist sofort der Gefriervorgang ein. – Das heisst, dass jegliche Sonden, die wir als Messfühler in den Windkanal einführen, sich sogleich mit einem Eisansatz bedecken. Dieser Vorgang könnte wohl bei Temperaturen, die nur wenig unter 0 °C liegen, etwas eingedämmt werden, bei extremeren Temperaturen ist jedoch kein Gegenmittel bekannt. Wie sich diese Tatsache auf die einzelnen Parameter auswirkt, soll in den folgenden Abschnitten dargestellt werden.

7.2 Die Temperaturmessung

Der schlimmste Einfluss des Eisansatzes auf Sonden wirkt sich auf die Temperaturmessung aus. Infolge Freiwerdens der Gefrierwärme wird der Fühler eine gegenüber der Umgebungstemperatur meist zu hohe Temperatur anzeigen. – Es muss hier noch vermerkt werden, dass bei diesen Bemerkungen stillschweigend angenommen wird, dass die Luft zumindest mit Wasserdampf gesättigt, eventuell sogar übersättigt ist, was auf Grund der Tropfenerzeugungsmethodik der Fall sein sollte.

Als beste Abschirmmethode ist der Schutz eines feinen Thermoelementes durch den Windschatten eines dünnwandigen Plexiglasrohres zu erwähnen. Aus der Menge des angelagerten, gefrierenden Wassers sowie der Grenzschichtdicke und der Luftgeschwindigkeit kann die Erwärmung der das Thermoelement umströmenden Luft abgeschätzt und ein entsprechender Korrekturwert angebracht werden.

Diese Methode erlaubt es aber prinzipiell nur, zu einzelnen Zeitpunkten Messungen vorzunehmen, da sonst die Verhältnisse an der Meßstelle allzu stark beeinflusst würden. Sie ist also speziell brauchbar bei Experimenten mit stationären Betriebsbedingungen.

Als weiterer Weg zur Temperaturmessung wird eine über den Kanalquerschnitt integrierende, sondenlose Methode verwendet, die auf der Basis der temperaturabhängigen Schallgeschwindigkeit arbeitet. Ein Ton wird durch einen Lautsprecher quer durch die Meßstelle geschickt und über ein Mikrophon

empfangen (siehe Figur 5). Die Phasendifferenz der Schwingung zwischen Lautsprecher und Mikrophon ist direkt ein Mass für die Laufzeit des Tones und kann in Temperatur umgerechnet werden. Da der Einsatz dieser in Erprobung stehenden Anlage noch nicht ganz befriedigt, sei nicht näher darauf eingetreten.

7.3 Die Feuchtemessung

Als genaueste Methode zur Ermittlung des totalen Wassergehaltes wird ein Absaugen von Kanalluft unter praktisch augenblicklichem Verdampfen der Tropfen betrachtet. Die dazu verwendete spezielle Sonde (siehe Figur 5) ist heizbar ausgeführt und erlaubt es, durch Einbau von Druckmeßstellen an deren Innen- und Aussenwand eine zur Kanalgeschwindigkeit passende Absaugeschwindigkeit zu wählen. Abgesaugt wird mittels einer Vakuumpumpe. Vor derselben befindet sich ein Absorptionsgefäss mit Phosphorpentoxyd. Dieses nimmt allen Wasserdampf auf, so dass sich bei Kenntnis der durchgesetzten Luftmenge der totale Wassergehalt pro Kubikmeter wägen und errechnen lässt.

Bei Kenntnis der Lufttemperatur ist es weiter möglich, unter Annahme einer Wasserdampfsättigung der Kanalluft auf den freien Wassergehalt zu schliessen.

7.4 Die Messung der Luftgeschwindigkeit

Die Geschwindigkeitsmessung, insbesondere ihre Eichung, erfolgt normalerweise mit Prandtl-Rohren. Diese sind aber bei vereisenden Bedingungen nur zu Punktmessungen zu verwenden, währenddem zur Ermittlung laufender Daten der Druckabfall an den Enden des vor der Meßstelle sich befindenden Effusors beigezogen wird. Die Vereisung dieser Stellen ist normalerweise stark reduziert. Es muss aber darauf verwiesen werden, dass infolge von Querschnittsveränderungen durch Eisansatz hin und wieder Eichpunkte mit dem Prandtl-Rohr eingemessen werden müssen. Als Meßsysteme werden ein Präzisions-Wassermikromanometer sowie zwei ebenso genaue Druckwandler mit elektrischer Anzeige verwendet.

7.5 Die Eiskernbildungszählung

Die Aufnahme der Eiskernbildungskerncharakteristik der Kanalluft wird eher nur summarisch vorgenommen. Es ist vorläufig vorgesehen, dass als Fremdkerne nur Silberjodidpartikeln verwendet werden sollen, deren Konzentration Null, wenig (100/l Luft) oder viel (10^5 /l) betragen soll. Die Messung geschieht nach der bereits früher beschriebenen Methode [13], wobei noch erwähnt werden könnte, dass die Proben der zu untersuchenden Kanalluft ebenfalls über die Feuchtesonde abgezapft werden.

Wenn auch verschiedene, hier in Abschnitt 7 beschriebene Messmethoden noch nicht befriedigen, so ist doch zu erwarten, dass im Laufe der Experimente eine weitere Entwicklung zu leistungsfähigeren Apparaten stattfindet.

Mit dem Hagelversuchskanal wurden bereits Vereisungsversuche vorgenommen. Die ersten Experimente zeigten dabei, dass die Anlage den gestellten Anforderungen im grossen und ganzen genügt und dass durch deren Einsatz tatsächlich erwartet werden darf, die Kenntnis über die Hagelbildung merklich erweitern zu können.

8. Nachwort

Der Hagelversuchskanal wurde im Rahmen des Versuchsprogrammes der Eidgenössischen Kommission zum Studium der Hagelbildung und der Hagelabwehr erbaut. Ihrem Präsidenten, Herrn Professor Dr. R. SÄNGER, bin ich verpflichtet für seinen Einsatz zur Verwirklichung des Projektes; Herrn Professor Dr. J. ACKERET möchte ich für seine stete Hilfsbereitschaft und die wertvollen Ratschläge herzlich danken.

Erwähnt sei an dieser Stelle auch die Mithilfe von Herrn Dr. H. SPRENGER vom Aerodynamischen Institut der ETH sowie von Herrn Dr. F. FURRER vom Institut für Hochfrequenztechnik der ETH.

Zum Gelingen des Projektes haben durch ihren grossen Einsatz auch die Firmen Gebrüder Sulzer AG, Winterthur (ihr verdanken wir auch die Unterlagen zu den Figuren 1, 2 und 4); Camille Bauer AG, Basel; und Sprecher & Schuh AG, Aarau, beigetragen. Ihnen wie auch den andern Firmen, die kleinere Aufträge ausführten – es seien dabei erwähnt Trion AG, Zürich; CIBA, Basel; Chemische Werke Neuallschwil; E. und H. Huber AG, Pfäffikon; J. Huber AG, Würenlos; Sauter AG, Basel; H. Siegrist & Co., Winterthur; Elcalor AG, Aarau –, gebührt für die tadellose Arbeit Anerkennung.

Zu grösstem Dank bin ich jedoch meinem Chef, Herrn Dr. M. DE QUERVAIN, verpflichtet, der die beschriebenen Arbeiten leitete und in allen Phasen der Planung und des Aufbaues wesentliches zur Abklärung der einzelnen Probleme beigetragen hat. Gedenken möchte ich auch meiner beiden Mitarbeiter, Herrn F. PETER und Herrn P. RÄSS, die tatkräftig bei den experimentellen Vorarbeiten und der Montage des Kanals mitwirkten.

Der Bau des Hagelversuchskanals wurde ermöglicht, indem der Schweizerische Nationalfonds die benötigten bedeutenden Kredite bereitstellte; das Laboratorium wurde durch die Abteilung für Landwirtschaft des Eidgenössischen Volkswirtschaftsdepartements finanziert. Der Eidgenössischen Inspektion für Forstwesen, Jagd und Fischerei sei bei dieser Gelegenheit dafür gedankt, dass sie die Aufnahme der Hagelforschung in das Arbeitsgebiet des Schneeforschungsinstitutes ermöglicht hat.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] W. TRABERT, *Met. Z.* 10, 433 (1899).
- [2] T. E. W. SCHUMANN, *Quart. J. R. met. Soc.* 64, 3 (1938).
- [3] E. G. BILHAM und E. F. RELF, *Quart. J. R. met. Soc.* 63, 149 (1937).

- [4] D. S. FOSTER und F. C. BATES, *Bull. Amer. met. Soc.* **37**, 135 (1956).
- [5] B. J. MASON, *The Physics of Clouds* (1957).
- [6] F. H. LUDLAM, *Nubila* **1**, 12 (1958).
- [7] R. LIST und M. DE QUERVAIN, *Z. angew. Math. Phys.* **4**, 3 (1953).
- [8] R. LIST, *Z. angew. Math. Phys.* **9a**, 180 (1958).
- [9] R. LIST, *Z. angew. Math. Phys.* **9a**, 217 (1958).
- [10] A. STEIGER und H. SPRENGER, *Bericht über die aerodynamischen Untersuchungen betreffend Ausbildung der Meßstrecke des Hagel-Windkanals* (Institut für Aerodynamik der ETH, 1954; nicht publiziert).
- [11] D. C. BLANCHARD, General Electric Report No. RL 285 (1949).
- [12] R. LIST, *Bericht über die auf Weissfluhjoch ausgeführten Vorarbeiten für die Konstruktion eines Hagelversuchskanals* (1954; nicht publiziert).
- [13] R. LIST, *Helv. Phys. Acta* **29**, 424 (1956).
- [14] W. E. RANZ und W. R. MARSHALL, *Chem. Eng. Progr.* **48**, 141 (1952).
- [15] W. E. RANZ und W. R. MARSHALL, *Chem. Eng. Progr.* **48**, 173 (1952).
- [16] R. LIST, *Z. angew. Math. Phys.* **10**, 143 (1959).
- [17] H. R. PRUPPACHER und R. SÄNGER, *Z. angew. Math. Phys.* **6**, 407 (1955).
- [18] H. R. PRUPPACHER und R. SÄNGER, *Z. angew. Math. Phys.* **6**, 485 (1955).

Summary

In the past the problem of fundamental research into hail formations has been dealt with in a more or less theoretical fashion on the basis of meteorological information. The attempt will now be made to reach an interpretation of how hail forms by an experimental physical method. To this end a wind tunnel has been built in which experiments can be conducted for studying the growth of suspended or floating particles of ice in terms of environmental conditions. Subsequent comparison with natural hailstones suggests that conclusions can be drawn as to how these have come into being and that eventually an explanation of hail formation can be given which comes closer to reality.

For the reproduction of atmospheric conditions in the laboratory the individual parameters of the experiment have been specified as follows: Temperature down to -40°C ; maximum free water content in the air 10 g/m^3 ; size of drops between 1 and $200\text{ }\mu$; highest wind speed 25 m/s ; concentration of ice-forming nuclei of various substances: none, single, multiple. Although variations in pressure have not been employed, the laboratory conditions may be transformed to those of the open atmosphere by using the rules of similarity.

The construction of the hail tunnel (Figure 1) may be described as follows: The blowing apparatus 1 drives the air into a temperature adjuster and filter unit 2; details with an air-cooler 2, 19 kW heater 3 and electrostatic filter 4 are shown in Figure 2. After these units the air is led into a vertical section where it is made humid and homogeneous. The ice-forming nuclei are also added at this point. Immediately next to this comes the actual measuring section 4, where the growth of a suspended or floating object is to be studied. The remaining parts of the tunnel 5 serve only to return the circulated air to the ventilator. Figure 3 shows the refrigerating compressor, Figure 6 the control unit. The arrangement of the drop-producing installations, such as the steam boiler 1, air-water compressor 4, and rotor atomizer 3, can be understood from the plan of the laboratory in Figure 4. Figure 5 shows the construction of the measuring section, while Figure 7 illustrates how the apparatus of the control unit is set up. For a

more detailed account of the way individual parts (particularly the control mechanism) of the equipment work, the reader is referred to section 4.

The performance of the hail tunnel has been measured as follows: Assuming in accordance with the values given in Figures 8 and 9 that injected humidity and added heat are interchangeable, various *stationary operating conditions* in terms of heat production were allowed to develop with the refrigerating compressor running at maximum performance. The maximum performance curves measured in this way can be derived from Figure 10 for the compressor revolution numbers I and II and different air speeds. These curves represent the effective energy available for the experiment as a function of the air-cooler temperature t_V , since all losses from the tunnel are involved in the readings and therefore included in the final result. On the basis of formula (8) and Figures 11 and 12 the fundamental temperature for the output of the refrigeration plant t_V can be correlated with the temperature in the measuring section t_M . The curve L_{K_R} gives in every case the maximum work of the compressor as a function of t_V .

If we convert corresponding energy values and air-cooler temperatures into humidity and measuring-section temperature, the correlations which result are shown in Figure 13. The specification of a free water content of 10 g/m^3 is in fact exceeded over a wide range of temperatures.

Since variations of the different factors play an important part in the imitation of hail-forming atmospheric conditions, the behaviour of the hail tunnel was also recorded during *unstable operation*. Figures 14, 15 and 16 show corresponding sequences in the governing temperature of the air cooler. Even more interesting, however, is the influence of the heat expenditure while the temperature of the vaporizer is kept constant. With a heat input of 18 kW there resulted, depending on the air speed, increases of temperature in the measuring section, as recorded for different time intervals in Figure 17. The observed time dependence is due to the inertia of the tunnel.

As cooling-down takes as long as warming-up, we can calculate even forced periodic temperature fluctuations. Figure 18 gives an example of this for a period lasting 4 min and for air speeds of 10 and 25 m/s. At higher temperatures the largest fluctuation in temperature which can be produced is dependent only on the air speed; at lower temperatures it is limited by the capacity of the compressor. If, however, humidity is introduced under these latter conditions – and this will be the case in the main experiments – then the total energy added increases; adjustment of the cold compressor can only take place at higher temperatures, so that the limiting stability curves are correspondingly displaced. The extent of this displacement for various amounts of additional energy due to humidity Q_F is shown in Figure 18.

The plant was constructed as part of the research programme of the Swiss Federal Commission for the Study of Hail Formation and Prevention. The results already obtained make it possible to expect that the tunnel will lead to a substantial increase in our knowledge of hail formation.

(Eingegangen: 5. Dezember 1958.)

Bemerkung zur Berechnung spezieller Potenzsummen

Von RUDOLF HOFMANN, Berlin, Deutschland¹⁾

Die einschlägigen neueren²⁾ Formeltafeln und Tabellen enthalten unter anderem, soweit dem Verfasser bekannt, nur die Potenzsummen der natürlichen Zahlen in allgemeiner Form. Die Summen der Potenzen der trigonometrischen Funktionen werden jedoch nur für ganzzahlige Exponenten $M = 1, 2, 3, 4$ angegeben. Es erscheint daher der Hinweis angebracht, dass sich die entsprechenden allgemeinen Summenformeln explizit angeben lassen. Dabei wird die Methode zu ihrer Berechnung nur gestreift.

Einen Beitrag zur Aufsummierung unendlicher Reihen in geschlossener Form mit Hilfe der Laplace-Transformation hat WHEELON³⁾ geliefert. Dabei wird davon ausgegangen, dass die Summanden der vorgegebenen Reihe Bildfunktionen von bekannten Originalfunktionen sind.

Es liegt nun nahe, auch den umgekehrten Weg zur Berechnung von Reihen einzuschlagen, und zwar dann, wenn die Summanden der Reihe Originalfunktionen bekannter Funktionen sind, die durch die komplexe Umkehrformel der Laplace-Transformation erhalten werden.

Sei nämlich

$$S = \sum_k A(k) \quad (1)$$

gegeben⁴⁾, ferner $A(k)$ in der Form $B(k) \cdot C(k)$ und

$$B(k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} b(s) e^{sk} ds \quad (2)$$

durch die komplexe Umkehrformel der Laplace-Transformation darstellbar, dann geht (1) über in

$$S = \sum_k C(k) \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} b(s) e^{sk} ds. \quad (3)$$

Das Integral ist dabei über eine Vertikale mit der Abszisse c in der Konvergenzhalbene von $b(s)$ zu erstrecken derart, dass alle Singularitäten von $b(s)$ links der Vertikalen liegen. In allen Fällen, in denen es möglich ist, die Reihenfolge von Summe und Integral zu vertauschen, was zum Beispiel bei endlichen Reihen

¹⁾ Osram Studiengesellschaft.

²⁾ I. M. RYSHIK und I. S. GRADSTEIN, *Summen-, Produkt- und Integraltafeln* (Berlin 1957).

³⁾ A. D. WHEELON, J. appl. Phys. 25, 113 (1954).

⁴⁾ Die Summanden seien als Funktionen der nur für ganzzahlige Werte vorkommenden Grösse k aufgefasst.

stets der Fall ist, geht dann (3) über in

$$S = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty-i\infty}^{\infty-i\infty} b(s) q(s) ds \quad (4)$$

mit

$$q(s) = \sum_k C(k) e^{ks}.$$

Damit ist für die Reihe S – unter den oben angegebenen Voraussetzungen – eine geschlossene Darstellung gefunden.

Im folgenden soll die Methode anhand einiger Beispiele demonstriert werden; es werden mit ihrer Hilfe die Summen der Potenzen der trigonometrischen Funktionen

$$\sum_{k=1}^n \sin^M kx \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^n \cos^M kx$$

sowie die alternierende Potenzsumme der natürlichen Zahlen

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k k^M$$

für beliebige ganze Potenzen $M > 0$ hergeleitet.

1. Mittels der Korrespondenz⁵⁾

$$\sin^{2N} x \sim \frac{(2N)! x^{2N}}{s \prod_{k=1}^N [s^2 + (2kx)^2]} \quad (N = 1, 2, \dots)$$

folgt für die Reihe $\sum_{k=1}^n \sin^{2N} kx$ gemäss (4)

$$\sum_{k=1}^n \sin^{2N} kx = \frac{(2N)! x^{2N}}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{(e^{ns} - 1) e^s}{(e^s - 1) s \prod_{k=1}^N [s^2 + (2kx)^2]} ds. \quad (5)$$

(5) lässt sich leicht auswerten. Die Partialbruchzerlegung

$$\frac{(2N)! x^{2N}}{s \prod_{k=1}^N [s^2 + (2kx)^2]} = \frac{1}{4N} \left\{ \binom{2N}{N} \frac{1}{s} + 2 \sum_{k=1}^N (-1)^k \binom{2N}{N-k} \frac{s}{[s^2 + (2kx)^2]} \right\}$$

und die Anwendung des Residuensatzes liefert

$$\sum_{k=1}^n \sin^{2N} kx = \frac{1}{4N} \left\{ \binom{2N}{N} \psi(0) + \sum_{k=1}^N (-1)^k \binom{2N}{N-k} [\psi(2kx) + \psi(-2kx)] \right\} \quad (6)$$

⁵⁾ Die Bezeichnungsweise ist G. DOETSCH, *Tabellen zur Laplace-Transformation* (Berlin 1947), entnommen.

mit

$$\psi(s) = \frac{(e^{ns} - 1)}{(e^s - 1)} e^s.$$

Es ist

$$\psi(s) + \psi(-s) = -1 + \frac{\sinh(2n+1)\frac{s}{2}}{\sinh\frac{s}{2}},$$

$$\psi(s) - \psi(-s) = 2 \frac{\sinh(n+1)\frac{s}{2} \sinh n\frac{s}{2}}{\sinh\frac{s}{2}}, \quad \psi(0) = n.$$

Damit folgt aus (6)

$$\sum_{k=1}^n \sin^{2N} kx = \frac{1}{2^{2N+1}} \left\{ (2n+1) \binom{2N}{N} + 2 \sum_{k=1}^N (-1)^k \binom{2N}{N-k} \frac{\sin k(2n+1)x}{\sin kx} \right\} \quad (7)$$

und

$$2 \sum_0^N (-1)^k \binom{2N}{N-k} = \binom{2N}{N}. \quad (8)$$

Auf dieselbe Weise bekommt man wegen

$$\sin^{2N+1} x t \circ \bullet \frac{1}{4N} \sum_{k=0}^N (-1)^k \binom{2N+1}{N-k} \frac{(2k+1)x}{[s^2 + (2k+1)^2 x^2]}, \quad N = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sin^{2N+1} kx &= \frac{1}{4N} \sum_{k=0}^N (-1)^k \binom{2N+1}{N-k} \\ &\times \frac{\sin(2k+1)(n+1)\frac{x}{2} \sin(2k+1)n\frac{x}{2}}{\sin(2k+1)\frac{x}{2}}, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

wegen

$$\cos^{2N} x t \circ \bullet \frac{1}{4N} \left\{ \binom{2N}{N} \frac{1}{s} + 2 \sum_{k=1}^N \binom{2N}{N-k} \frac{s}{[s^2 + (2k)^2 x^2]} \right\}, \quad N = 1, 2, \dots,$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n \cos^{2N} kx &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{2N+1}} \\ &\times \left\{ (2n+1) \binom{2N}{N} + 2 \sum_{k=1}^N \binom{2N}{N-k} \frac{\sin k(2n+1)x}{\sin kx} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

mit

$$2 \sum_0^N \binom{2N}{N-k} = 4N + \binom{2N}{N}, \quad (11)$$

und wegen

$$\cos^{2N+1} x \circ - \bullet \frac{1}{4^N} \sum_{k=0}^N \binom{2N+1}{N-k} \frac{s}{[s^2 + (2k+1)^2 x^2]}, \quad N = 0, 1, 2, \dots$$

$$\sum_{k=1}^n \cos^{2N+1} kx = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{2N+1}} \sum_{k=0}^N \binom{2N+1}{N-k} \frac{\sin(2k+1)(2n+1)\frac{x}{2}}{\sin(2k+1)\frac{x}{2}} \quad (12)$$

mit

$$\sum_0^N \binom{2N+1}{N-k} = 4^N. \quad (13)$$

2. Für die alternierende Reihe

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k k^N$$

folgt wegen

$$t^N \circ - \bullet \frac{N!}{s^{N+1}}, \quad N = 0, 1, 2, \dots$$

und

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k e^{ks} = \frac{(-1)^n e^{ns} - 1}{e^s + 1} e^s$$

aus (4) die Beziehung

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k k^N = \frac{N!}{2\pi i} \oint_K \frac{[(-1)^n e^{ns} - 1] e^s}{(e^s + 1) s^{N+1}} ds, \quad (14)$$

da wegen der für N gemachten Voraussetzung der Integrationsweg auf einen Kreis K um den Nullpunkt verlegt werden kann. Zur Auswertung von (14) wird

$$\frac{[(-1)^n e^{ns} - 1]}{e^s + 1} e^s = h(s)$$

entwickelt. Es sei

$$\frac{1}{e^s + 1} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{A_p}{p!} s^p,$$

wobei die A_p der Rekursionsformel

$$A_0 = \frac{1}{2}; \quad A_p + \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} A_j = 0, \quad p = 1, 2, \dots,$$

genügen oder aus der Determinantendarstellung

$$A_p = \frac{(-1)^p}{2^{p+1}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{p-1}{0} & \binom{p-1}{1} & \dots & \dots & \binom{p-1}{p-2} & 2 \\ \binom{p}{0} & \binom{p}{1} & \dots & \dots & \binom{p}{p-2} & \binom{p}{p-1} \end{vmatrix} \quad (15)$$

sehr einfach zu ermitteln sind. Die A_p dürfen somit als bekannt vorausgesetzt werden. Mithin wird

$$h(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{k!} \left(\sum_{\lambda=0}^k \binom{k}{\lambda} A_{\lambda} (-1)^{\lambda} (n-1)^{k-\lambda} - 1 \right),$$

so dass sich schliesslich aus (14)

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k k^N = A_N + (-1)^n \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} A_k (n+1)^{N-k}, \quad N = 1, 2, \dots \quad (16)$$

ergibt.

Summary

Some series can be computed easily if the terms are original functions of known Laplace transforms. The method is briefly outlined, as example the series

$$\sum_{k=1}^n \sin^M kx, \quad \sum_{k=1}^n \cos^M kx \quad \text{and} \quad \sum_{k=1}^n (-1)^k k^M$$

are computed in closed forms for integer exponents $M > 0$.

(Eingegangen: 9. Januar 1959.)

Minimum Weight Design of Circular Plates Under Arbitrary Loading¹⁾

By WILLIAM PRAGER²⁾ and RICHARD T. SHIELD³⁾, Providence, R.I., USA.

To Professor F. K. G. ODQVIST on the occasion of his 60th anniversary

1. Introduction

The direct design procedures developed by DRUCKER and SHIELD [1, 2]⁴⁾ have been used recently [3] to obtain the minimum weight design of circular plates under rotationally symmetric pressure distributions. The sandwich plate and the solid or homogeneous plate were considered and designs for both simply supported and built-in edge conditions were derived. As an extension of this work, the minimum weight design is obtained in the following for a circular sandwich plate loaded by an *arbitrary* distribution of pressure. The deformation modes used to obtain the designs are the same as those used in [3] for rotationally symmetric pressure distributions.

2. Definition of the Problem

The ideal sandwich plate is composed of a core of constant thickness H between two identical face sheets of variable thickness h , where $h \ll H$. The core carries shear stress only while the face sheets carry direct stresses and so provide the bending moment across a section. The material of the face sheets is assumed to be elastic-perfectly plastic and to obey TRESCA's yield condition, with yield stress σ_0 in tension or compression. It is convenient to represent the principal bending moments M_1, M_2 at a generic point of the plate by a point with rectangular coordinates (M_1, M_2) (see Figure 1). With TRESCA's yield criterion, the stress point must then be within or on the hexagon in the figure [4], the maximum bending moment M_0 being given by

$$M_0 = \sigma_0 H h. \quad (1)$$

For a point on the hexagon, plastic bending of the plate can occur. The principal curvature rates κ_1, κ_2 associated with a mode of plastic deformation can be represented in Figure 1 by a vector with components proportional to κ_1, κ_2 attached to the stress point in question. The flow rule requires the curvature rate vector to be normal to the hexagon for points on a side, and at the corners of the hexagon the vector must lie in the fan bounded by normals to adjacent sides. The rate of dissipation of energy D_A per unit area of the middle surface due to plastic

¹⁾ The results presented in this paper were obtained in the course of research sponsored by the Office of Ordnance Research, Department of the Army, under Contract No. DA-19-020-ORD-4564.

²⁾ Professor of Applied Mechanics, Brown University, Providence 12, Rhode Island.

³⁾ Associate Professor of Applied Mathematics, Brown University, Providence 12, Rhode Island.

⁴⁾ Numbers in brackets refer to References, page 425.

action is given by

$$D_A = M_1 \kappa_1 + M_2 \kappa_2 \quad (2)$$

and is uniquely determined by the curvature rates κ_1, κ_2 .

It is required to determine the thickness h of the face sheets so that the plate can just carry a given distribution of pressure and so that minimum weight of material is involved. The material is assumed to be homogeneous and minimum weight coincides with minimum volume. The minimum weight design is achieved

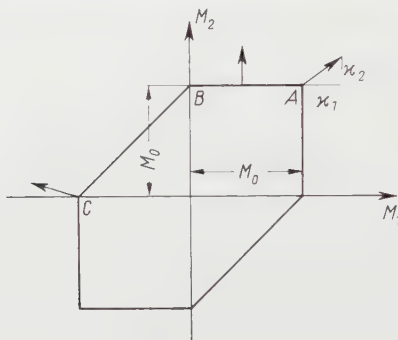


Figure 1
Yield condition.

by a plate designed to collapse in a mode for which the condition

$$\frac{D_A}{h} = \text{const} \quad (3)$$

is satisfied over the plate [1, 2], if body forces are neglected. Condition (3) is a condition on the rate of deflection w of the middle surface of the plate and the thickness h does not enter into condition (3) because of the linear dependence of D_A on h . To this extent, the condition is independent of the pressure distribution over the plate but the form of the condition depends upon the position of the stress point on the hexagon, which in turn is influenced by the loading.

For a circular plate with conditions of simple support or built-in support at the edge of the plate, the deflection mode w satisfying (3) is rotationally symmetric. With polar coordinates (r, θ) , the edge of the plate being $r = R$, the curvature rate $\kappa_{r\theta}$ is zero and isotropy then requires the bending moment $M_{r\theta}$ to be zero. For equilibrium, the bending moments M_r, M_θ satisfy the equation

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r M_r) - \frac{\partial M_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 M_\theta}{\partial \theta^2} = -r p, \quad (4)$$

where $p = p(r, \theta)$ is the pressure over the plate. For definiteness, the plate is taken to be horizontal. Positive values of M_r, M_θ stress the lower surface of the plate in tension and the pressure is applied to the upper surface. The shear forces Q_r, Q_θ are given by

$$Q_r = -\frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{1}{r} (M_r - M_\theta), \quad Q_\theta = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta}. \quad (5)$$

3. Simply Supported Plate

When the edge $r = R$ of the plate is simply supported, the minimum weight design is obtained by assuming that the whole of the plate is stressed to state *A* of Figure 1. The deflection rate w (measured in the downwards direction), associated with point *A* and satisfying (3), and the condition $w = 0$ at $r = R$, is given by [3]

$$w = \alpha (R^2 - r^2), \quad (6)$$

where α is a positive constant. The bending moments M_r, M_θ are both equal to the maximum moment M_0 and substitution in the equation of equilibrium gives

$$\frac{\partial^2 M_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial M_0}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 M_0}{\partial \theta^2} = -p. \quad (7)$$

This equation and the condition $M_0 = 0$ at $r = R$ are sufficient to determine M_0 over the plate.

For a concentrated load P at the point (ϱ, φ) , the solution of (7) satisfying $M_0 = 0$ at $r = R$ is

$$\sigma_0 H h = M_0 = \frac{P}{2\pi} \ln \left[\frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{\varrho}{R} \right], \quad (8)$$

where r_1, r_2 are the distances of the point (r, θ) from the point (ϱ, φ) and its inverse with respect to the circle $r = R$, that is the point $(R^2/\varrho, \varphi)$, respectively:

$$r_1^2 = \varrho^2 + r^2 - 2\varrho r \cos(\theta - \varphi), \quad r_2^2 = \frac{R^4}{\varrho^2} + r^2 - 2\frac{R^2}{\varrho} r \cos(\theta - \varphi). \quad (9)$$

The solution for a distributed load $p(r, \theta)$ can be obtained from the fundamental integral (8) by integration:

$$\sigma_0 H h = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R p(\varrho, \varphi) \ln \left\{ \frac{R^2 + r^2 \varrho^2 / R^2 - 2\varrho r \cos(\theta - \varphi)}{\varrho^2 - r^2} \frac{2\varrho r \cos(\theta - \varphi)}{\varphi} \right\} \varrho d\varrho d\varphi. \quad (10)$$

4. Built-in Plate

For the plate with a built-in edge, stress point *C* of Figure 1 applies near the edge of the plate and stress point *A* applies in the center of the plate. The velocity field

$$w = \alpha \left(\frac{3}{2} a^2 - r^2 \right) \quad (0 \leq r \leq a), \quad w = 2\alpha (R - r)^2 \quad (a \leq r \leq R), \quad (11)$$

where $a = 2/3 R$, satisfies the condition (3) over the plate, together with the conditions $w = \partial w / \partial r = 0$ at the clamped edge $r = R$ and w and $\partial w / \partial r$ continuous at $r = a$ [3]. The deformation mode (11) is associated with stress point *A* for $0 \leq r \leq a$ and stress point *C* for $a \leq r \leq R$. The moments M_r, M_θ are therefore given by

$$M_r = M_\theta = M_0 \quad (0 \leq r < a), \quad M_r = -M_0, \quad M_\theta = 0 \quad (a < r \leq R). \quad (12)$$

For equilibrium, it follows from equations (4) and (12) that M_0 must satisfy equation (7) for $0 \leq r < a$, and for $a < r \leq R$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r M_0) = r p. \quad (13)$$

At the junction $r = a$, M_r is continuous so that $M_0 = 0$ at $r = a$. In addition, the shear force Q_r must be continuous at $r = a$ (in the absence of concentrated load) and this requires $\partial M_0 / \partial r$ to be continuous. Equation (7) and the condition $M_0 = 0$ at $r = a$ are sufficient to determine M_0 for $0 \leq r < a$. Equation (13) and the condition $M_0 = 0$ at $r = a$ together with the known derivative $(\partial M_0 / \partial r)_{r=a}$ are then sufficient to determine M_0 for $a < r < R$.

We first consider a concentrated load P at a point (ϱ, φ) within the circle $r = a$, so that $\varrho < a$. As in the previous section, the solution of equation (7) with $p = 0$ and having the appropriate singularity at (ϱ, φ) and $M_0 = 0$ at $r = a$ is

$$\sigma_0 H h = M_0 = -\frac{P}{2\pi} \ln \left[\frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{\varrho}{a} \right] \quad (r \leq a), \quad (14)$$

where now

$$r_1^2 = \varrho^2 + r^2 - 2\varrho r \cos(\theta - \varphi), \quad r_2^2 = \frac{a^4}{\varrho^2} + r^2 - 2\frac{a^2}{\varrho} r \cos(\theta - \varphi). \quad (15)$$

For $r \geq a$, M_0 satisfies equation (13) with $p = 0$ and as $M_0 = 0$ at $r = a$, we obtain

$$M_0 = f(\theta) \left(1 - \frac{a}{r} \right) \quad (a \leq r \leq R).$$

The positive function $f(\theta)$ entering into this equation is determined by the condition that the magnitude of the derivative $\partial M_0 / \partial r$ is continuous at $r = a$. This requires

$$\sigma_0 H h = M_0 = \frac{P}{2\pi} \cdot \frac{a^2 - \varrho^2}{a^2 + \varrho^2 - 2\varrho a \cos(\theta - \varphi)} \left(1 - \frac{a}{r} \right) \quad (a \leq r \leq R). \quad (16)$$

The design for a load $p(r, \theta)$ distributed inside the circle $r = a$ and zero load over the annulus $a \leq r \leq R$ can be obtained from the design (14), (16) by integration:

$$\sigma_0 H h = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^a p(\varrho, \varphi) \ln \left\{ \frac{a^2 + r^2 \varrho^2 / a^2 - 2\varrho r \cos(\theta - \varphi)}{\varrho^2 + r^2 - 2\varrho r \cos(\theta - \varphi)} \right\} \varrho d\varrho d\varphi \quad (17)$$

for $r \leq a$, and for $a \leq r \leq R$

$$\sigma_0 h H = \frac{1}{2\pi} \left(1 - \frac{a}{r} \right) \int_0^{2\pi} \int_0^a p(\varrho, \varphi) \frac{a^2 - \varrho^2}{a^2 + \varrho^2 - 2\varrho a \cos(\theta - \varphi)} \varrho d\varrho d\varphi. \quad (18)$$

When there is no load inside the circle $r = a$, M_0 is harmonic for $r \leq a$ and since $M_0 = 0$ at $r = a$, it follows that M_0 is zero identically inside $r = a$. We assume that the plate is loaded in the annular region by a line load $\tilde{\omega}$ per unit length along the arc element $\varphi \leq \theta \leq \varphi + \Delta\theta$ of the circle $r = \varrho$, where $\varrho > a$ (Figure 2). The total load on the plate is then $P = \tilde{\omega} \varrho \Delta\theta$. Because $p = 0$ in equation (13) except for $r = \varrho$, $\varphi \leq \theta \leq \varphi + \Delta\theta$, and also $M_0 = \partial M_0 / \partial r = 0$ at $r = a$, it follows from equation (13) that M_0 is zero except in the truncated sector $\varrho \leq r \leq R$, $\varphi \leq \theta \leq \varphi + \Delta\theta$, shown shaded in Figure 2. Thus the load is carried by a 'cantilever' from the point on the support circle $r = R$ nearest to the region of application of the load. In order to determine M_0 in the shaded region, we note that M_0 is zero at $r = \varrho$ and the shear force Q_r , and therefore $\partial M_0 / \partial r$, has a

discontinuity of amount $\tilde{\omega}$ across the loaded element of arc. The result is

$$\sigma_0 H h = M_0 = \varrho \tilde{\omega} \left(1 - \frac{\varrho}{r}\right) \quad (19)$$

in the region $\varrho \leq r \leq R$, $\varphi \leq \theta \leq \varphi + \Delta\theta$.

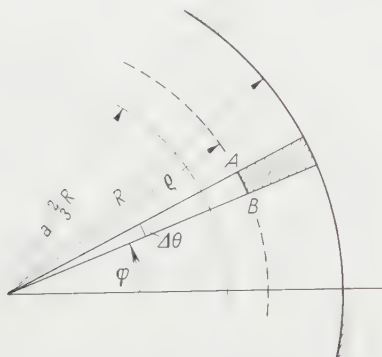


Figure 2

Line load on arc element AB .

Integration of the design (19) leads to the design for a distributed load $p(r, \theta)$ which is zero inside the circle $r = a$:

$$\sigma_0 H h = \int_a^r p(\varrho, \theta) \varrho \left(1 - \frac{\varrho}{r}\right) d\varrho \quad (20)$$

for $a \leq r \leq R$ and the thickness h is zero for $r \leq a$. The upper limit of integration in equation (20) is r because the pressure $p(\varrho, \theta)$ at the point (ϱ, θ) adds material only to points (r, θ) for which $\varrho \leq r$.

When the pressure distribution $p(r, \theta)$ is non-zero in both $r \leq a$ and $a \leq r \leq R$, the thickness distributions given by equations (17), (18) and equation (20) are added.

REFERENCES

- [1] D. C. DRUCKER and R. T. SHIELD, *Design for Minimum Weight*, Proceedings of the 9th International Congress of Applied Mechanics (Brussels 1956).
- [2] D. C. DRUCKER and R. T. SHIELD, *Bounds on Minimum Weight Design*, Quart. appl. Math. 15, 269–281 (1957).
- [3] E. T. ONAT, W. SCHUMANN and R. T. SHIELD, *Design of Circular Plates for Minimum Weight*, J. appl. Math. Phys. (ZAMP) 8, 485–499 (1957).
- [4] H. G. HOPKINS and W. PRAGER, *The Load-Carrying Capacities of Circular Plates*, J. Mech. Phys. Solids 2, 1–13 (1953).

Zusammenfassung

Das Dimensionierungsverfahren von DRUCKER und SHIELD [1, 2] wurde kürzlich auf die Dimensionierung rotationssymmetrisch belasteter Kreisplatten für Mindestgewicht angewandt [3], wobei sowohl gelenkig gestützte als auch eingespannte Sandwichplatten betrachtet wurden. In der vorliegenden Arbeit werden diese Untersuchungen auf kreisförmige Sandwichplatten unter nicht rotationssymmetrischer Belastung ausgedehnt. Es zeigt sich, dass auch für solche Lasten der Dimensionierung für Mindestgewicht diejenigen Verformungszustände zugrunde gelegt werden können, welche schon zur Lösung der entsprechenden Aufgabe bei rotationssymmetrischer Belastung konstruiert wurden. Für Belastung einer gelenkig gestützten oder eingespannten Kreisplatte durch eine Einzellast mit beliebigem Angriffspunkt werden explizite Dimensionierungsformeln gewonnen, für beliebig verteilte Belastung werden Integraldarstellungen der optimalen Dimensionierung gegeben.

(Received: February 4, 1959.)

A Note on Addition Theorems for Mathieu Functions

By K. SÆRMARK, Copenhagen, Denmark¹⁾

It is the purpose of this note to point out the existence of an addition theorem for Mathieu functions besides the one given by MEIXNER and SCHÄFKE [1–3]²⁾. The latter states – in the notation of [1] – the following. We consider two elliptical cylinder coordinate systems A and B :

$$A: x_1 \pm i x_2 = c \cosh(z \pm i t);$$

$$B: x'_1 \pm i x'_2 = c_0 \cosh(z_0 \pm i t_0),$$

connected by

$$c \cosh(z \pm i t) = l e^{\pm i u} + c_0 e^{\pm i v} \cosh(z_0 \pm i t_0).$$

(We consider only real, positive values of c, c_0, z, z_0, t and t_0 ; see figure.) Let z_1 and z_2 be the elliptical coordinates – in the A -system – of the focal points of the B -system and z_{max} the largest one of z_1, z_2 , then

$$\left. \begin{aligned} M_p^{(j)}(z_0; h_0) me_p(t_0; h_0^2) &= \sum_{s=-\infty}^{\infty} A_s M_{p+s}^{(j)}(z; h) me_{p+s}(t; h^2) \\ (j &= 1, 2, 3 \text{ or } 4; p = \text{integer} \geq 0) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

will be valid in the region

$$z > z_{max} \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

In (1) $M_p^{(j)}(z; h) me_p(t; h^2)$ and $M_p^{(j)}(z_0; h_0) me_p(t_0; h_0^2)$ are solutions of the wave-

¹⁾ Technical University of Denmark, Physics Department.

²⁾ Numbers in brackets refer to References, page 428.

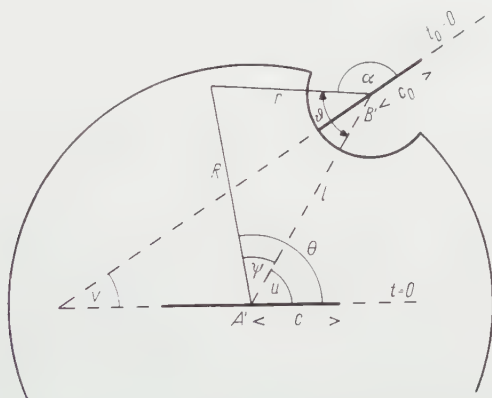
equation in elliptical cylinder coordinates:

$$4\varphi + k^2 \varphi = 0$$

and $h = k c/2$, $h_0 = k c_0/2$.

The expression for \mathcal{A}_s may be found in [1].

The formulation of this addition theorem given by MEIXNER and SCHÄPFKE is more general than the one given here, but for most physical applications the latter will be sufficient. However, the region $z < z_{max}$ is – from the point of view of physical application – as useful as the region $z > z_{max}$. We shall now show, by means of theorems given in [1], that in a part of this region another form of addition theorem may be given, connecting the functions $M_p^{(j)}(z_0; h_0) me_p(t_0; h_0^2)$ ($j = 1, 2, 3$ or 4) with the functions $M_p^{(1)}(z; h) me_p(t; h^2)$.



The mutual arrangement of the two elliptical cylinder coordinate systems $A: (z, t)$ and $B: (z_0, t_0)$ with centers at A' and B' respectively, l is the distance between A' and B' . θ is the angle between r and l . (4) is valid inside the heavy line.

Let (R, θ) and (r, α) be polar coordinate systems with centers at A' and B' , respectively. Then according to [1]

$$\left. \begin{aligned} M_p^{(j)}(z_0; h_0) me_p(t_0; h_0^2) &= \sum_{s=-\infty}^{\infty} d_{s,p} Z_{p+s}^{(j)}(k r) e^{i(p+s)\alpha}, \\ d_{2l,p} &= (-1)^l C_{2l}^p(h_0^2); \quad d_{2l+1,p} = 0 \quad (j = 1, 2, 3 \text{ or } 4; p = \text{integer} \geq 0) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

will be valid for $r > c_0$. Here $Z_{p+s}^{(j)}$ denotes, corresponding to $j = 1, 2, 3, 4$, respectively, Bessel, Neumann and Hankel functions of the first and second kind. Again according to [1]

$$\left. \begin{aligned} J_p(k R) e^{ip\theta} &= \sum_{s=-\infty}^{\infty} d'_{s,p} M_{p+s}^{(1)}(z; h) me_{p+s}(t; h^2); \\ d'_{2l,p} &= (-1)^l C_{-2l}^{p+2l}(h^2); \quad d'_{2l+1,p} = 0 \quad (p = \text{integer} \geq 0) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

will be valid for $z \geq 0$. The quantities C_{2l}^q occurring in (2) and (3) are the coeffi-

cients in the expansions of the periodic Mathieu functions:

$$me_q(t; h^2) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} C_{2l}^q(h^2) e^{i(q+2l)t}.$$

By means of a well-known addition theorem for the cylinder functions:

$$(-1)^p Z_p^{(j)}(k r) e^{-i p \vartheta} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{i s \psi} J_s(k R) Z_{-p+s}^{(j)}(k l),$$

valid for $R < l$, and (2) and (3) one then gets, observing that $\theta = \psi + u$ and $\alpha + \vartheta = \pi - u - \psi$,

$$M_m^{(j)}(z_0; h_0) me_m(t_0; h_0^2) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} B_{q,m}^{(j)} M_q^{(1)}(z; h) me_q(t; h^2) \quad \left. \vphantom{\sum_{q=-\infty}^{\infty}} \right\} \quad (4)$$

$$(j = 1, 2, 3, 4; m = \text{integer} \geq 0)$$

where

$$B_{q,m}^{(j)} = \sum_{s, p=-\infty}^{\infty} \{ d'_{q-p,p}(h^2) Z_{p-s}^{(j)}(k l) d_{s-m,m}(h_0^2) \} e^{i(s-p)u} e^{-i s v}.$$

(4) will be valid outside a circle with center at B' and $r = c_0$, but inside the circle with center at A' and $R = l$. This region is shown in the figure.

Comparing the expression for $B_{q,m}^{(j)}$ with the expression given in [1] for A_s in (1), it is interesting to note that the major difference is the occurrence of $Z^{(j)}(k l)$ instead of $J(k l)$. This seems to indicate that a more fundamental derivation than the one given here is possible.

Note Added in Proof: Actually the region of validity of the addition theorem (1) is somewhat larger than stated by MEIXNER and SCHÄFKE. It may be shown that (1) holds in the region outside the circle with centre at A' and radius l and the circle with centre at B' and radius c_0 .

REFERENCES

- [1] J. MEIXNER and F. W. SCHÄFKE, *Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen*, 1st ed. (Springer Verlag, Berlin 1954), p. 171–187.
- [2] F. W. SCHÄFKE, *Math. Z.* 58, 436–447 (1953).
- [3] J. MEIXNER, *Math. Nachr.* 3, 14–19 (1949).

Zusammenfassung

Es wird gezeigt, dass ein Additionstheorem für Mathieusche Funktionen – verschieden von dem von MEIXNER und SCHÄFKE gegebenen – existiert.

(Received: December 1, 1958.)

Ergänzung zum Aufsatz:

«Der senkrechte Verdichtungsstoss am gekrümmten Profil»¹⁾Von JÜRGEN ZIEREP, Aachen, Deutschland²⁾

In der angegebenen Veröffentlichung wird das Verhalten eines senkrechten Verdichtungsstosses an einer gekrümmten Wand untersucht. Das Hauptergebnis ist, dass die Stosskrümmung an der Wand unendlich wird. Anschliessend werden einige Folgerungen im Hinblick auf einschlägige Versuchsergebnisse gezogen. Herr RANDALL (Royal Aircraft Establishment, Farnborough) hat mich in dankenswerter Weise darauf hingewiesen, dass die Konsequenzen der mitgeteilten Ergebnisse weiter reichen. Während in meiner Note im wesentlichen nur mit dem Absolutbetrag der Wandkrümmung gearbeitet wird, zeigt es sich nämlich, wenn man das Vorzeichen derselben von Anfang an mitberücksichtigt, dass man zu den folgenden Resultaten gelangt. Mit Hilfe der Darstellung (3.3) für die Stosskurve (jetzt gültig für $\beta_{\pm} \gtrless 0$!)

$$\Xi = \pm \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\sigma}{2}} \beta_{\pm} H^{3/2}$$

erkennt man, dass zum Beispiel im Mach-Zahl-Bereich $\sigma(M) > 0$ ein Stoss nur möglich ist, solange $\beta_{\pm} > 0$ ist. Dies würde aber heissen, dass sich ein senkrechter Stoss (in diesem Mach-Zahl-Bereich) nur an einem *konkaven* Profil, dagegen nicht an einem *konvexen* Profil ausbilden kann. Dieses Ergebnis ist überraschend. Herr GARABEDIAN (Stanford University, Calif.) wies in einer mündlichen Mitteilung jedoch darauf hin, dass bei diesem Schluss ganz wesentlich eine Stetigkeitsvoraussetzung benutzt wird. Wir haben nämlich in (2.6) angenommen, dass beim Grenzübergang $\eta \rightarrow 0$ $h_1 \beta_{\pm}$ gegen die Wandkrümmung konvergiert. Inwieweit diese Voraussetzung bei dem längs des Stosses durchgeführten Limes $\eta \rightarrow 0$ wirklich erfüllt ist und damit der oben beim konvexen Profil gezogene Schluss bindend ist, bleibt vorerst noch offen. Darüber soll hier später ausführlich berichtet werden. Zum Abschluss wollen wir noch folgende Bemerkung über das zu Beginn der Arbeit erwähnte orthogonale (ξ, η) -Netz machen. Aus dem Text ist unmittelbar ersichtlich, dass dieses Netz in der Note eigentlich gar nicht benötigt wird. Was gemacht wird, ist das Folgende: Die in den Bewegungsgleichungen auftretenden Ableitungen $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$, $\partial v/\partial x$, $\partial v/\partial y$ werden lediglich auf der Stosskurve in Ableitungen längs des Stosses und senkrecht dazu umgeschrieben. Die Existenz eines krummlinigen orthogonalen Netzes ist hierzu nicht erforderlich. Die Betrachtungen lassen sich genau so im kartesischen (x, y) - bzw. (u, v) -System durchführen, und man kommt zum selben Ergebnis.

(Eingegangen: 2. Oktober 1958.)

¹⁾ Z. angew. Math. Phys. 9b, 764–776 (1958).

²⁾ Institut für theoretische Gasdynamik der DVL.

Frühjahrstagung der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft vom 2. und 3. Mai 1959 in Brugg

Berichte über die Sitzungen für angewandte Physik und Mathematik

Hochempfindlicher Transistorenverstärker mit einem Eingangswiderstand von mehr als 5 M Ω . Von H. JUNG, Zürich¹⁾.

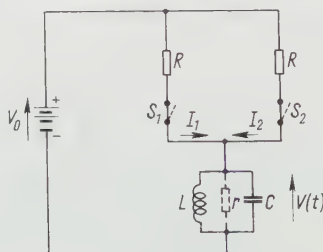
Eine ausführliche Veröffentlichung erfolgt demnächst in der ZAMP.

Koinzidenzschaltung mit Schwingkreis. Von H. GUHL, B. LOBKOWICZ und P. MARMIER, Zürich²⁾.

Wird ein gleichstromdurchflossener Schwingkreis plötzlich aus dem Stromkreis abgeschaltet, so entsteht am Schwingkreis eine exponentiell abklingende Sinusschwingung («ringing circuit»³⁾), welche sich angenähert wie folgt darstellen lässt:

$$V(t) \approx I \sqrt{\frac{L}{C}} e^{-t/2\tau C} \sin \omega t.$$

Die Anfangsamplitude ist proportional zum Gleichstrom I , der durch den Schwingkreis geflossen ist. Bei konstantem Verhältnis $L:C$ variiert die Anfangsamplitude für Schwingkreise mit verschiedenen Resonanzfrequenzen nicht. Figur 1 zeigt das



Figur 1

Prinzipschema einer Koinzidenzmischstufe mit Schwingkreis. 1. $S_1 + S_2$ gleichzeitig geöffnet: $V(t) = (I_1 + I_2) A(t)$. 2. S_1 oder S_2 allein geöffnet: Stark gedämpfte Schwingung (wenn $R \ll r$). 3. S_2 nach S_1 geöffnet: $V(t) = I_2 A(t)$.

Prinzipschema einer Koinzidenzmischstufe mit Schwingkreis. Von den drei beschriebenen Möglichkeiten, die zwei Schalter zu öffnen, löst nur das gleichzeitige Öffnen der beiden Schalter eine Schwingung aus, deren Anfangsamplitude minde-

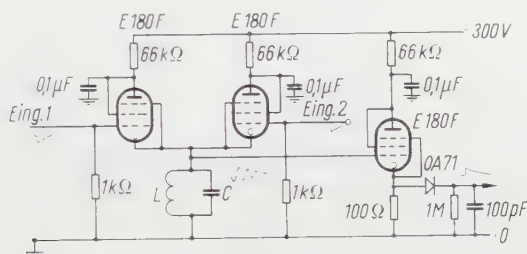
¹⁾ ETH. Physikalisches Institut.

²⁾ ETH. Cyclotron-Laboratorium.

³⁾ G. R. GAMERTSFELDER and J. V. HOLDAM, *Waveforms* (Mc Graw-Hill, 1949), S. 141.

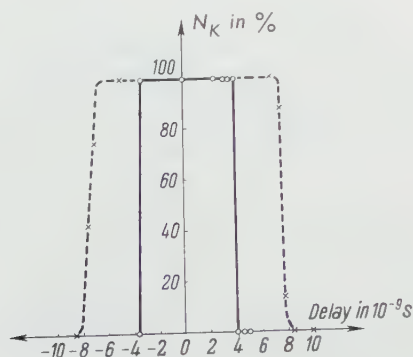
stens doppelt so gross ist wie die Anfangsamplituden der Schwingungen der Nichtkoinzidenzfälle. Die Koinzidenzauflösungszeit 2τ wird durch die Resonanzfrequenz des Schwingkreises bestimmt und beträgt rund $1/2$ Periodendauer.

Figur 2 zeigt das Schaltschema einer Koinzidenzschaltung mit Schwingkreis. Die beiden Pentoden E 180 F haben die Funktion der Schalter und der Dämpf-



Figur 2
Koinzidenzschaltung mit Schwingkreis.

fungswiderstände R der in Figur 1 gezeigten Schaltung. Der Dämpfungswiderstand hat bei stromdurchflossener Pentode angenähert einen Wert von der Grössenordnung $1/S$ (S Steilheit der Pentode). Wird die Streukapazität durch kurze Zuführungsleitungen zum Schwingkreis klein gehalten, so lassen sich in dieser Schaltung konventionelle Schwingkreise verwenden mit einer Resonanzfrequenz bis gegen 100 MHz. Damit die Eingangsröhren möglichst rasch geschlossen werden, empfiehlt sich die Verwendung von «White-Kathodenfolgern» als Treiberstufen zu dieser Koinzidenzschaltung. Vom Schwingkreis gelangt das Signal über einen Kathodenfolger zur Amplitudenmodulation. Im Koinzidenzfall erscheint am Ausgang der Schaltung ein Impuls, welcher die doppelte Amplitude besitzt gegenüber Impulsen von Nichtkoinzidenzfällen. Ein nachfolgender Amplitudendiskriminator hat die Aufgabe, nur Koinzidenzen weiterzuleiten.



Figur 3

Anzahl der Koinzidenzen, die bei gegenseitiger zeitlicher Verschiebung zweier Eingangsimpulse erhalten werden für zwei Schwingkreise mit den Resonanzfrequenzen von 20 und 50 MHz.

—○— Schwingkreis $f = 50$ MHz; —×— Schwingkreis $f = 20$ MHz.

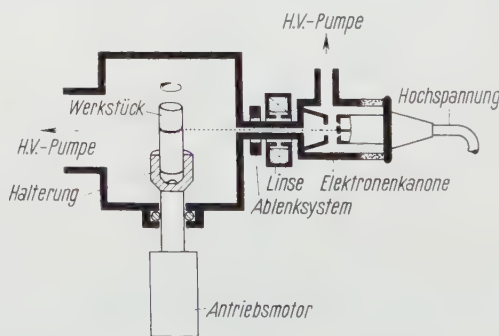
Die Messung der Kurven der Figur 3 erfolgte mit Hilfe eines Quecksilberbereich-impulsgebers. Je kürzer die Periodendauer des Schwingkreises ist, desto steiler werden die Flanken der Koinzidenzauflösungskurve. Beim Schwingkreis mit der Resonanzfrequenz 50 MHz erstreckt sich diese Flanke über eine Zeit von $2 \cdot 10^{-10}$ s.

Zwei Vorteile dieser Schaltung bestehen darin, dass exponentiell abklingende Eingangsimpulse nicht zuerst mit Verzögerungskabel in kurze Impulse umgewandelt werden müssen und dass ein Koinzidenzereignis durch eine lang andauernde Schwingung gemeldet wird.

Schweissen mit Elektronenstrahlen. Von E. B. BAŞ und G. CREMOSNIK, Zürich⁴⁾.

In den Elektronenstrahlen kann sehr hoher Energiefluss in Form der kinetischen Energie der Elektronen erzeugt und auf einen kleinen Bereich einer Festkörperoberfläche konzentriert werden. Diese Wärmekonzentration führt zu einer örtlichen Schmelzung des Festkörpers, die schon seit langem, vor allem in den Röntgenröhren, als eine gefürchtete Erscheinung bekannt ist. In der letzten Zeit hat man diesen Effekt an vielen Orten für die Verschweissung von zwei Körpern nützlich auszuwerten versucht⁵⁻⁸⁾.

Die einfachste Anordnung für Schweissen mit Elektronen ist die der Röntgenröhre; das heisst, das zu schweisende Werkstück wird in einem Röntgenröhrensystem als Anode verwendet, wobei durch geeignete Bewegung des Werkstückes die Schweissnaht durch den Brennfleck des Elektronenstrahles geführt wird. Diese von WYMAN⁵⁾ und STOHR⁶⁾ angewendete Einkammeranordnung hat trotz ihrer Einfachheit verschiedene Nachteile. Wir sind deswegen zu einer Zweikammeranordnung übergegangen, welche in Figur 1 schematisch dargestellt ist. Die bedeutendste Aufgabe bei einem Elektronenschweisgerät ist die Erzeugung der Elektronenstrahlleistung und der Leistungsdichte im Schweissfleck. Diese Aufgabe ist besonders kritisch bei einem Zweikammersystem. Eine einfache Abschätzung der Schweissleistung für Materialwanddicken von einigen Millimetern führt auf eine bereitzu-



Figur 1

Schematische Darstellung des Zweikammer-Elektronenschweisgerätes.

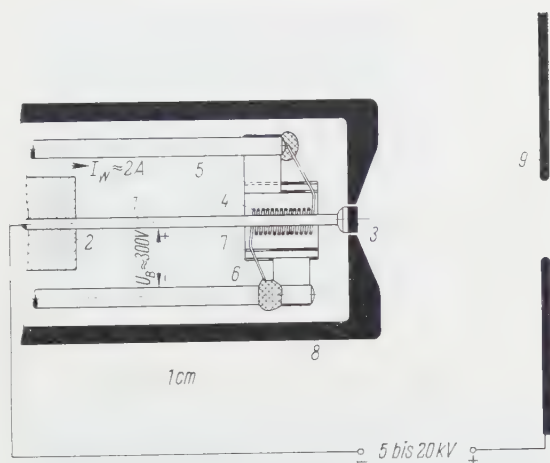
⁴⁾ ETH, Abteilung für industrielle Forschung (AFIF).

⁵⁾ W. L. WYMAN, Welding Journal 37, 41 (Februar 1958).

⁶⁾ J. A. STOHR, Le Vide 13, 163 (Mai-Juni 1958).

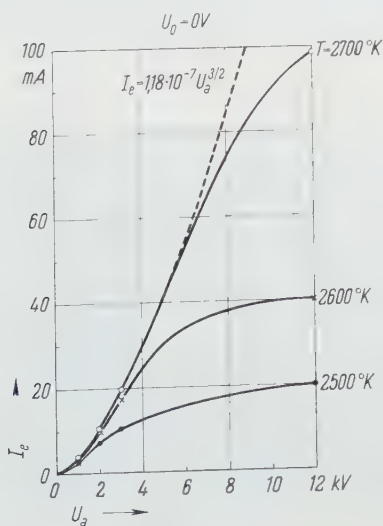
⁷⁾ J. A. STOHR, Proc. 1st. International Congress on Vacuum-Technique 1958 (Pergamon Press).

⁸⁾ E. B. BAŞ, Proc. 1st. International Congress on Vacuum-Technique 1958 (Pergamon Press).



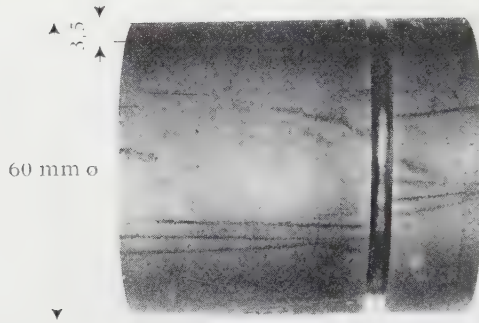
Figur 2

Hochstromelektronenkanone mit Bolzenkathode: 1 Wolframbolzen; 2 Einspannklemme für Wolframbolzen; 3 Kathode (Tantal, Renium, Wolfram); 4 Wolfram-Heizwendel; 5, 6 Haltestiften; 7 Strahlungsschutzschirme; 8 Kathodenblende; 9 Anode.

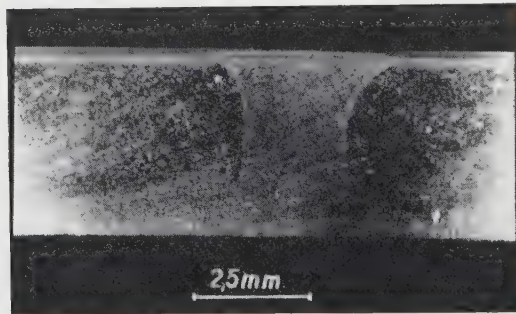


Figur 3

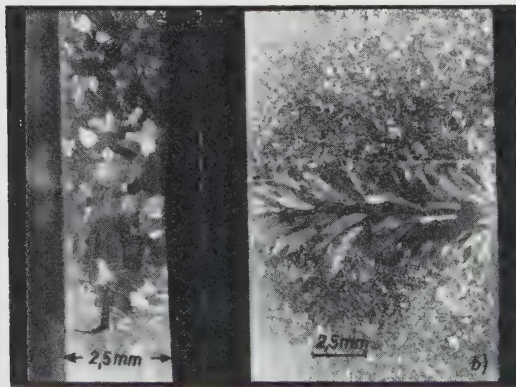
Raumladungscharakteristik der Hochstromelektronenkanone mit Bolzenkathode (Durchmesser der Emissionsfläche 1,55 mm).



Figur 4
Stumpfgeschweisste Cr-Ni-Stahlrohre (Aufsicht).



Figur 5
Querschnitt der Schweissnaht in Cr-Ni-Stahl.



Figur 6
Schweissnaht im Kupferrohr; Rohrdurchmesser 60 mm, Wanddicke 2,5 mm, Schweissleistung 1 kW
(vorgewärmt), Vorschub 2 mm/s.

stellende Strahlleistung von einigen Kilowatt; das heisst, bei einer Beschleunigungsspannung von 20 kV muss die Elektronenkanone Ströme von 100 mA und mehr liefern können. Diese Ströme müssen auf einen Bereich von etwa 1 mm Durchmesser fokussierbar sein. In unserem Gerät wurde eine Elektronenkanone mit grossflächiger Bolzenkathode⁹⁾ angewendet. Diese ist in Figur 2 schematisch dargestellt. Die Emissionsstromcharakteristik dieser Elektronenkanone ist in Figur 3 wiedergegeben. Wie ersichtlich, ist die Elektronenkanone in der Lage, bei einem Durchmesser der Emissionsfläche von nur 1,5 mm Ströme von 100 mA und mehr zu liefern.

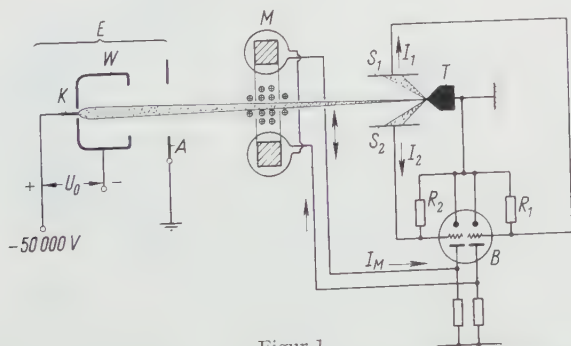
In Figur 4 ist eine Schweissnaht in Cr-Ni-Stahl 18/8 zu sehen. Ein Querschiff durch diese Schweissnaht ist in Figur 5 dargestellt. Cr-Ni-Stahl benötigt sehr geringe Schweissleistung (kleine Wärmeleitfähigkeit). Bei der Schweissung in Figur 4 betrug diese nur 150 W bei einer Vorschubsgeschwindigkeit von etwa 4 mm/s. Kupfer benötigt nach Wolfram die grösste Schweissleistung. Figur 6 zeigt die Schweissnaht zwei aufeinander stumpfgeschweisster Kupferrohre von 60 mm Durchmesser und 2,5 mm Wanddicke. Figur 6a stellt den Querschiff durch die Schweissnaht dar. In Figur 6b ist die Schweissnaht geätzt und in Aufsicht abgebildet. Der Vorschub erfolgte von rechts nach links (im Aufsichtsbild) und betrug 2 mm/s bei einer Schweissleistung von ungefähr 1 kW. Das Schweissgut wurde bei defokussiertem Strahl vorgewärmt.

Ein ausführlicher Bericht erfolgt demnächst an einer andern Stelle.

Über eine Fernfokus-Elektronenkanone und ihre Anwendungen. Von E. B. BAŞ und F. GAYDOU, Zürich¹⁰⁾.

Zusammenfassung

Es wurde ein Strahlerzeugungssystem (Figur 1), bestehend aus einer Äquipotential-Bolzenkathode⁹⁾ mit planer kreisförmiger Emissionsfläche (K), einer Wehnelt-Blede besonderer Geometrie (W) und einer Anode (A) auf seine fernfokussierende Eigenschaft untersucht. Bei optimaler Wahl der Geometrieparameter kann man den Elektronenstrahl in 150 mm Entfernung von der Kathode in einem Brennfleck von



Figur 1

Automatische Zentrierung des Elektronenstrahlers auf die Spitze eines dachkant- oder kegelförmigen Targets. K Kathode; W Wehnelt-Blede; A Anode; T Dachkant- oder Kegeltarget; S_1, S_2 Meßsonden für Sekundärelektronen; B Röhrenbrücke für die Steuerung des magnetischen Zentrierfeldes; M magnetisches Ablenkelement.

⁹⁾ E. B. BAŞ, Z. angew. Phys. 7, 337 (1955).

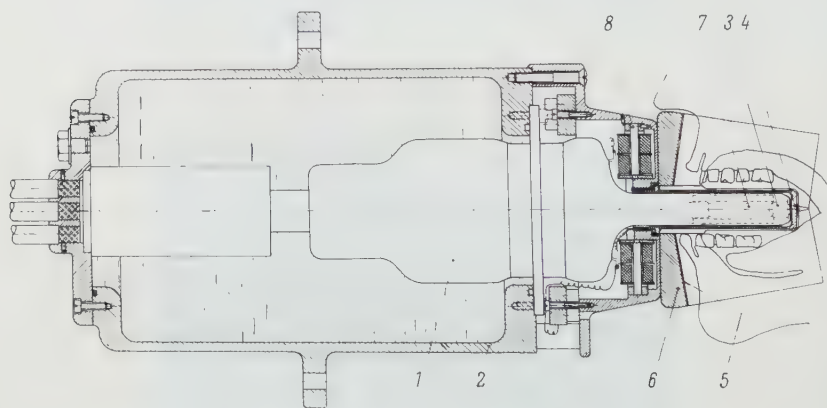
¹⁰⁾ ETH, Institut für technische Physik.

150 μ Halbwertsdurchmesser fokussieren. Dabei können Strahlströme von einigen Milliampere bei einer Beschleunigungsspannung von 50–60 kV erreicht werden. Der kritischste Parameter ist die Lage der Vorderbohrung der Wehnelt-Blende und deren Durchmesser. Das Wegrücken der Anode von der Kathode vermindert zwar auch den Strahldurchmesser im Fokus, es wird aber dabei auch die Feldstärke vor der Kathode reduziert, was sich auf die Raumladungsverhältnisse ungünstig auswirkt. Je nachdem der Strahldurchmesser im Fokus grösser oder kleiner als der Kathodendurchmesser ist, erscheint der Elektronenstrahl als ein divergierendes oder auf den Fokuspunkt konvergierendes Strahlenbündel.

In einer besonderen, in Figur 1 dargestellten Anordnung wurde der Elektronenstrahl auf die Spitze eines Kegeltargets fernfokussiert. Der Brennfleck von etwa 150 μ Durchmesser fällt gewöhnlich nicht zentrisch auf die Spitze des Targets. Um einen zentrierten Betrieb zu ermöglichen, wurde folgender Weg eingeschlagen: Die von dem Target ausgelösten Sekundärelektronen werden von zwei Meßsonden S_1 und S_2 aufgefangen und die Ströme I_1 und I_2 einer Röhrenbrücke zugeführt, welche ein magnetisches Ablenkelement speist. Trifft der Strahl die Spitze nicht zentrisch, so ist $I_1 \neq I_2$, und durch die Ablenkspule fließt ein Strom, welcher den Strahl auf die Spitze ablenkt, bis der Strahl wieder die Spitze zentrisch trifft und bis auf eine kleine Regelrestgrösse $I_1 = I_2$ wird. Die Selbstzentrierung des Strahles eliminiert auch die Einflüsse der Störfelder. Für die Zentrierung auf ein Kegeltarget ist die angegebene Schaltung für zwei aufeinander senkrecht stehende Richtungen auszuführen.

Die beschriebene Fernfokus-Elektronenkanone mit Selbstzentrierung ermöglicht uns die Realisierung einer neuartigen Weitwinkelröntgenröhre für Panorama-Gebissaufnahmen in der Dentaldiagnostik¹¹⁾. Die prinzipielle Anordnung dieser neuen Methode der Radiographie ist in Figur 2 dargestellt.

Ein ausführlicher Bericht über die Untersuchungen erfolgt demnächst an einem andern Ort.



Figur 2

Eine Weitwinkel-Röntgenröhre für Dental-Panoramaaufnahmen. 1 Röntgenröhre; 2 Öltank; 3 kegelförmiges Target (Antikathode); 4 Aluminium-Abschirmrohr für den Schutz des Glasfortsatzes der Röhre; 5 Film; 6 Filmtträger; 7 vakuumaufgedampfte Meßsonden für Sekundärelektronen auf der Innenseite des Glasfortsatzes; 8 magnetisches Zentrierquadrupol.

¹¹⁾ E. B. BAŞ und F. GAYDOU: Proc. 1st. International Congress on Vacuum Technique 1958 (Pergamon Press).

Über die relativistische Elektronenoptik elektrostatischer Beschleuniger. Von E. B. BAŞ, L. PREUSS und W. SCHNEIDER, Zürich¹²⁾.

Ein elektrostatischer Partikelbeschleuniger besteht aus einer Kette von Beschleunigungsstufen, zum Beispiel in der Form von Lochblenden- oder Rohr-Immersionen. Die erste Aufgabe dieser Linsenkette ist die Beschleunigung der mit einer Energie U_0 eingeschossenen Partikel auf eine Endenergie U_B . Sie muss auch eine zweite Aufgabe erfüllen, die darin besteht, den engsten Querschnitt P des Einschussstrahles auf ein Target Q am Ausgang des Beschleunigers abzubilden. Die Berechnung der Elektronenoptik des Beschleunigers muss also eine Beziehung zwischen den Achskoordinaten z_p und z_q liefern, und dabei ist noch die Lateralvergrößerung β und die Angularvergrößerung γ anzugeben.

Für die achsennahen Elektronenbahnen in einem elektrischen Feld mit dem Achsenpotential $\Phi(z)$ gilt allgemein folgende Differentialgleichung:

$$\left[(1 - \varepsilon \Phi) \Phi \frac{d}{dz} \left[\left(1 + \varepsilon \Phi \right) \Phi \frac{dr}{dz} \right] + \frac{1}{4} (1 + 2 \varepsilon \Phi) \Phi'' r \right] = 0$$

mit

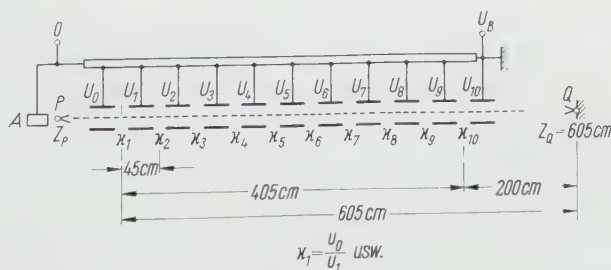
$$\varepsilon = \frac{e}{2 m_0 c^2}.$$

Die Multiplikatoren in runden Klammern berücksichtigen den relativistischen Effekt. Für ein Potential $\Phi = 5 \cdot 10^6$ V erhält man zum Beispiel

$$\text{für Elektronen} \quad (1 + \varepsilon \Phi) = 5,88,$$

$$\text{für Protonen} \quad (1 + \varepsilon \Phi) = 1,0027.$$

Wir ersehen daraus, dass für Ionenbeschleuniger der relativistische Effekt in den elektrostatischen Beschleunigern nicht berücksichtigt werden muss. Hingegen bei Elektronenbeschleunigern ist es angebracht, sich über den relativistischen Effekt Rechenschaft zu geben.



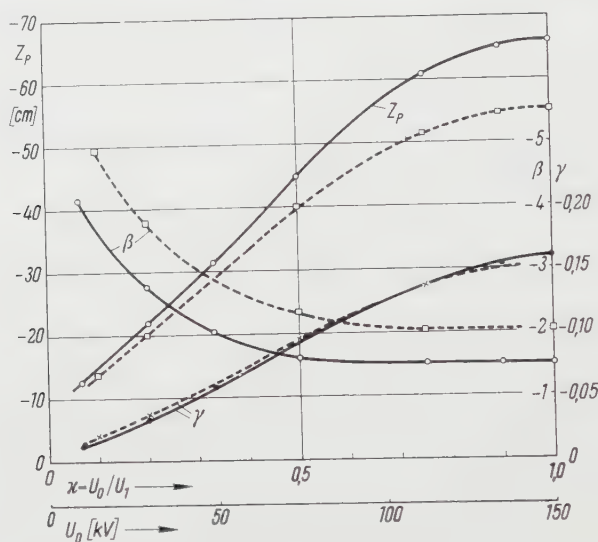
Figur 1

Schema eines elektrostatischen Beschleunigers.

Wir haben diese Rechnung für einen 10stufigen Elektronenbeschleuniger mit der Endenergie von $U_B = 1,5 \cdot 10^6$ V durchgeführt. Die Geometrie der Beschleunigungsstrecke ist in Figur 1 dargestellt. Die einzelnen Beschleunigungsstufen sind Zweirohr-Immersionen mit Spaltbreite $S = 4$ cm, Rohrradius $R = 5$ cm. Die Potentialverteilung in solchen Immersionen wurde in einem Widerstands-

¹²⁾ ETH. Institut für technische Physik.

Netzwerkmodell ausgemessen. Die Berechnung der Kardinalpunkte der Linsen erfolgte mit der elektronischen Rechenmaschine ERMETH. Die Rechnungsergebnisse für die in Figur 1 angegebenen Daten sind in Figur 2 zusammengestellt. Es sind



Figur 2

10 Stufen; 1500 kV; $S/R = 0,8$; $R = 5$ cm; — relativistisch; ---- nichtrelativistisch.

dort in Abhängigkeit von der Einschussenergie U_0 die Lage der Elektronenquelle z_p (bezogen auf die Mittelebene der ersten Linse), die laterale Vergrößerung der Elektronenquelle auf dem Target β und der Winkelvergrößerung γ angegeben, wobei die Rechnung sowohl relativistisch wie nichtrelativistisch durchgeführt wurde.

Ein ausführlicher Bericht erfolgt demnächst in der ZAMP.

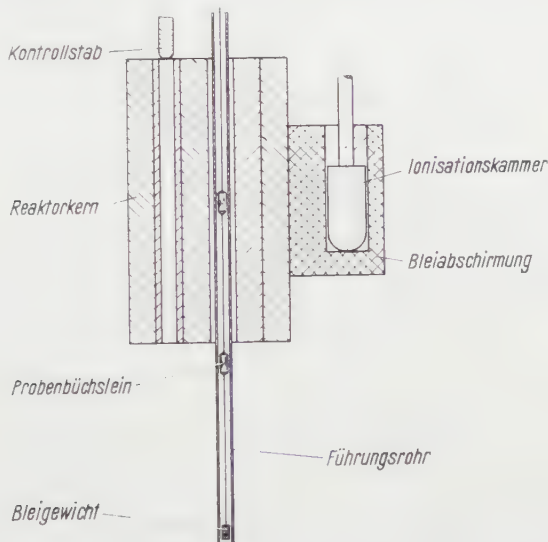
Reaktoroszillator zur Bestimmung makroskopischer Absorptionsquerschnitte von thermischen Neutronen. Von T. HÜRLIMANN, P. SCHMID und H. WINKLER, Würenlingen¹³⁾.

Am Swimming-Pool-Reaktor SAPHIR ist ein Reaktoroszillator eingerichtet worden. Er wird hauptsächlich für Reinheitsuntersuchungen von Materialien eingesetzt.

Figur 1 gibt eine schematische Darstellung der Einrichtung. Die gewählte Spaltstoffanordnung zeigt an der Messposition ein Maximum des Produktes aus thermischem Fluss und thermischer Einflussfunktion. Dort wird das die Probe enthaltende Schiffchen periodisch gegen ein zweites Schiffchen ausgetauscht, das lediglich als «Absorptionsgegengewicht» dient. Ein solches Gegengewicht ist bei wassermodierten Reaktoren vorteilhaft, da eine einzelne Probe infolge ihrer Wasserverdrängung grosse Absorptions- und Moderationssignale hervorruft. Durch ein Auswechseln der Probe an der Meßstelle gegen eine ähnliche Probe kann das Bruttosignal

¹³⁾ Reaktor AG.

relativ klein gehalten werden, so dass die Apparatur in einem empfindlicheren Bereich arbeiten kann. Bei geeigneter Wahl des gegenseitigen Abstandes der beiden Schiffchen wird ausserdem erreicht, dass das während des Austauschvorganges hervorgerufene kombinierte Transfersignal auf den 50. Teil des einzelnen Transfersignals sinkt und daher die Messung nicht mehr stört. Allerdings sind dann die



Figur 1

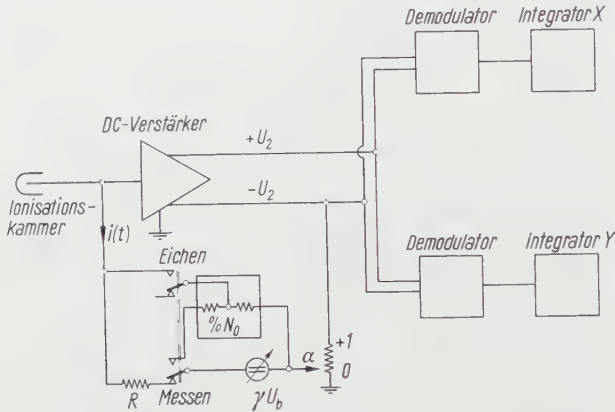
Anordnung des Reaktoroszillators. Das obere Probenbüchselein befindet sich eben in der Messposition.

Proben in der Position ausserhalb des Reaktors nicht mehr ganz ohne Einfluss auf die Reaktivität des Reaktors. Aus diesem Grunde wird das untere Schiffchen nicht gerade mit dem für den Bezug verwendeten Standard beladen.

Die Messproben bestehen gewöhnlich aus zwei Scheiben von 26 mm Durchmesser und 12 mm Höhe. Sie werden jeweils während 19 s in einer Position gehalten. Der Austauschvorgang dauert eine ganze Sekunde, wird aber dafür sehr präzise sinusförmig und ohne Phasenstreuung durchgeführt. Ein Messzyklus besteht aus 10 Halbperioden und ist deshalb in 200 s beendet. Die erzeugte Leistungsmodulation ΔN wird in Einheiten der mittleren Reaktorleistung N_0 gemessen, wie auch das Signal eines in einem weiteren Messzyklus oszillierten bekannten Standards. Der Bezug dieser Einheit auf den Absorptionsquerschnitt erfolgt mittels eines Eichsatzes. Er besteht aus 3 lithiumhaltigen Aluminiumscheibchen, welche zwischen die Probenhälften bzw. darüber und darunter eingebracht werden. Die relativen Lithiumgewichte (3,64 : 1 : 1) sind so gewählt, dass der Eichsatz wirkt, als ob das Messgut möglichst gleichmässig mit Lithium versetzt wäre. Diese Wirkung wird dann vollkommen erreicht, wenn sich die allgemeine axiale Abhängigkeit des Produktes von thermischem Fluss und Einfluss innerhalb der Probe durch ein Polynom vierten Grades ausdrücken lässt. Diese Eigenschaft des Eichsatzes erlaubt die Messung von Absorptionsquerschnitten in Proben, die merkliche Flussänderungen im Innern aufweisen. Insbesondere ist es möglich, bedeutend grössere Konzentrationen

von den zu untersuchenden Substanzen in Lösungen zu dulden. Bei normalen Messungen ist der Eichsatz durch einen Nullsatz aus Reinaluminium ersetzt. Die Differenz der Absorptionsquerschnitte von Eich- und Nullsatz ist auf denjenigen von Bor (Standard aus Harwell) bezogen.

Der Verlauf der Reaktorleistung wird mit einer Ionisationskammer verfolgt. Die Auswertung des Kammerstromes geschieht mit der in Figur 2 dargestellten Appa-



Figur 2

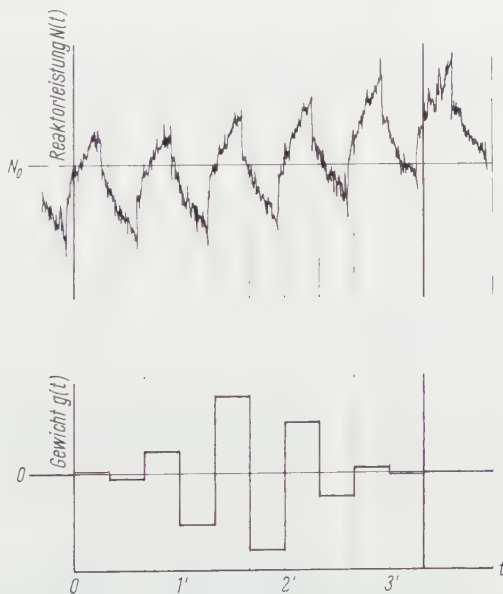
Messapparatur. Der Kammerstrom $i(t) = i_0 + \Delta i$ entspricht der Reaktorleistung $N(t) = N_0 + \Delta N$. Kompensationsspannung: $\gamma U_b = R i_0$. Verstärktes Modulationssignal: $U_2 = R \Delta i / \alpha$. Im Integrator X wird das Signal registriert. Der Integrator Y dient der Kontrolle (siehe Text).

ratur. Sie enthält Integratoren mit unbeschränkter Integrationskapazität, praktischer Trägheitslosigkeit und ausserordentlich guter zeitlicher Stabilität (Drift pro Stunde $< 2 \cdot 10^{-8}$ des maximalen Eingangssignals). Die Eichung des Signals in Einheiten von N_0 erfasst Ungenauigkeiten und Drifts der gesamten elektronischen Apparatur mit Ausnahme der Integratoren und der eigentlichen Eichwiderstände. Die rechteckige Demodulation des Reaktorsignals (Figur 3) erfolgt im einen Schaltungszweig phasenrichtig, so dass im Integrator X das Signal gemessen wird. In einem zweiten Schaltungszweig geschieht die gleiche Demodulierung um 90° phasenverschoben, so dass bei einwandfreiem Funktionieren im Integrator Y nur das Rauschen registriert wird.

Um den Einfluss von Reaktorleistungsdrift auf das Messergebnis möglichst zu eliminieren, wird die Demodulation der 10 Halbperioden eines Messzyklus mit verschiedenen Gewichten g durchgeführt. Falls der Binomialkoeffizient $\binom{9}{k-1}$ als Gewicht der k -ten Halbperiode gewählt wird, werden die ersten neun Glieder der Potenzreihe genau kompensiert, in welche sich der Reaktordrift entwickeln lässt. Auf diese Weise ist das Messergebnis in praktisch allen Fällen von langsamen Leistungsänderungen ungestört.

Die mittlere Schwankung von Absorptionsmessungen, die bei einer Reaktorleistung von 1 W durchgeführt werden, beträgt $0,1 \text{ mm}^2$. Dieser Wert entspricht genau dem erwarteten Beitrag des Reaktorrauschens. Die Ionisationskammer ist mit ihrer Meßstatistik dank der günstigen Plazierung im Swimming-Pool-Reaktor und der hohen Neutronenempfindlichkeit ohne Einfluss auf das gemessene Rau-

schen¹⁴). Die Messgenauigkeit entspricht somit dem theoretisch optimalen Wert. Sie kann natürlich noch weiter verbessert werden durch mehrfache Wiederholung der Messung oder durch Erhöhen der Reaktorleistung. Die Reproduzierbarkeit nach jeweiligem Probenwechsel ist von der gleichen Grösse wie die mittlere Schwankung.



Figur 3

Leistungs- und Demodulationssignal. Das Reaktorleistungssignal entspricht einem Absorptionsquerschnitt von 4 mm^2 .

Die Permeabilität von Pulverbetten. Von W. WIELAND¹⁵).
Eine ausführliche Publikation erscheint demnächst in der ZAMP.

Isotherme Strömungen in Raketendüsen. Von V. STINGELIN, Zürich¹⁶).
Die Aufgabe soll sein, mit einer gegebenen Wärmequelle (Reaktor), deren Höchsttemperatur beschränkt ist, einem Gase eine extrem hohe Austrittsgeschwindigkeit zu erteilen.

Bei den auf chemischer Basis arbeitenden Raketendüsen ist der maximalen Ofenenthalpie durch die Verbrennungsenergie des Treibstoffes zum voraus eine obere Grenze gesetzt. Haben wir einen Reaktor zur Verfügung, so können wir prinzipiell den gleichen Prozess durchführen, nur dass sich jetzt das Gas von aussen her, durch Wärmeübertragung an der Wand, erhitzt. Die maximal zulässige Reaktortemperatur begrenzt auch hier die Austrittsgeschwindigkeit.

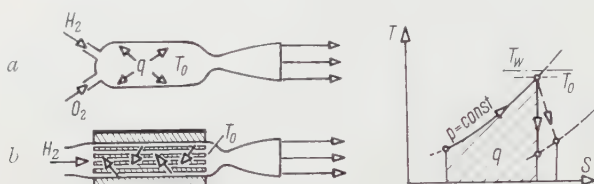
Aus diesen Erwägungen haben wir die alte Idee der isothermen Expansion (ZWICKY, WINTERBERG) wieder aufgegriffen und näher untersucht.

¹⁴) O. R. FRISCH und D. J. LITTLER, Phil. Mag. 45, 126 (1954).

¹⁵) Zementfabrik Holderbank-Wildeggen AG, technische Stelle.

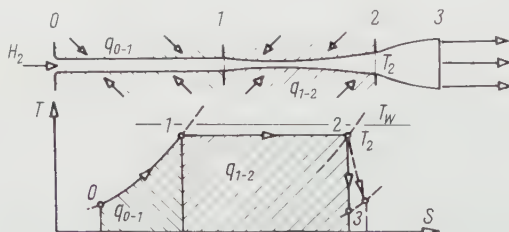
¹⁶) ETH, Institut für Aerodynamik.

Unter der vereinfachenden Annahme von konstanter Wandtemperatur erwärmen wir das Gas anfänglich isobar, bis die Differenz zwischen Wand- und mittlerer Gastemperatur klein ist. Unter weiterem Aufheizen expandieren wir anschließend das Gas derart, dass seine mittlere Temperatur konstant bleibt. Die Enthalpie des Mediums gibt uns zum Schluss durch adiabatische Expansion auf den Aussendruck nochmals einen Geschwindigkeitszuwachs. Im leeren Raum, mit dem Druck 0, können wir theoretisch auf diese Weise beliebig viel Energie zuführen und somit die gewünschten grossen Geschwindigkeiten erreichen. Selbst mit Reibung, welche ja bei realen Strömungen immer auftritt, wäre der Prozess realisierbar, allerdings mit entsprechenden grösseren Dimensionen der Düsen (siehe Figur).



Figur 1

Zustandsdiagramm für konventionelle Erwärmungs- und Expansionsprozesse: *a* Gasgemisch durch Verbrennung geheizt; *b* Gas durch Reaktor geheizt.



Figur 2

Prinzipiskizze (nicht maßstäblich) und *T-S*-Diagramm der isothermen Expansion.

Viel schlimmer wirkt der Temperaturrückgewinn in der Grenzschicht. Die für den Wärmeübergang massgebende Temperaturdifferenz ΔT bleibt nämlich mit zunehmender Mach-Zahl nicht konstant. Unter der Berücksichtigung der Kompressibilität können wir für die laufende Temperaturdifferenz schreiben:

$$\Theta_w = \Theta_0 - r \frac{\gamma - 1}{\gamma} \cdot \frac{\omega^2}{2}.$$

Θ_w die durch die mittlere Gastemperatur dividierte laufende Temperaturdifferenz zwischen Wand und Grenzschicht;

$\omega = w/\sqrt{R T_g}$, T_g mittlere Gastemperatur, R Gaskonstante, $\gamma = c_p/c_v$;

r Temperaturrückgewinnfaktor (0,85 für laminar, 0,9 für turbulent).

Der Index 0 bedeutet am Eintritt der Düse.

Daraus berechnet sich sofort die maximale isotherme Geschwindigkeit bzw. w_{max} . Denn $w = w_{max}$, wenn $\Theta_w = 0$, also

$$w_{max} = \sqrt{\frac{2}{\gamma} \frac{\Theta_0}{T_0} \frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

Im schlimmsten Fall, $r = 1$, wird die totale Geschwindigkeit, welche wir mit unserem Prozess erhalten,

$$w_{tot\ max} = \sqrt{w_{max}^2 + w_{ad}^2}$$

und mit

$$w_{ad} = \sqrt{2 R T_0 \frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

$$w_{tot\ max} = \sqrt{2 R T_0 \frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

Dies ist aber die maximale Geschwindigkeit eines Gases, das von der Temperatur T_w (Wandtemperatur) auf den Druck 0 adiabatisch expandiert wird.

Wir erhalten also im Extremfall bei unendlich langer Düse nicht mehr, als wenn wir im unendlich langen Rohr isobar erwärmen und anschliessend adiabatisch auf den Druck 0 expandieren.

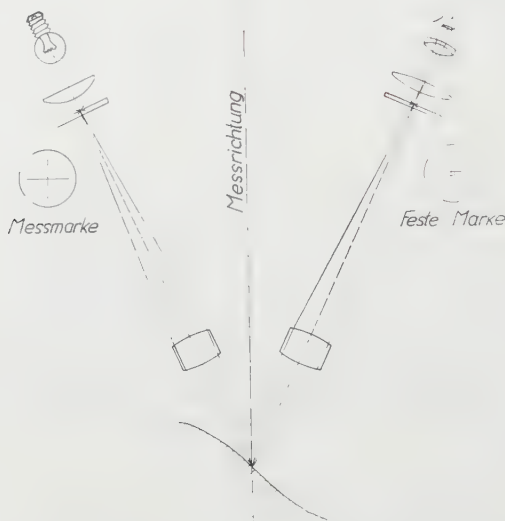
Ein optischer Tiefentaster. Von W. LOTMAR, Aarau¹⁷⁾.

Bei der dreidimensionalen Ausmessung von Körpern wie zum Beispiel Turbinenschaufeln oder Windkanalmodellen mit Hilfe von Koordinatenmessmaschinen besteht die Aufgabe, die Tiefenlage von Objektpunkten zu ermitteln, welche im allgemeinen auf schief zu den Koordinatenachsen stehenden Flächen liegen. Da die mechanische Antastung auf solchen Flächen wegen des endlichen Radius der Tastspitze prinzipiell mit Messfehlern behaftet ist, wird vielfach ein Mikroskop als optischer Tiefentaster verwendet. Man stellt dabei an einer durch eine Marke bezeichneten Stelle des Gesichtsfeldes das Objekt auf beste Schärfe ein. Um eine genügende Messgenauigkeit zu erreichen, ist die Anwendung einer relativ starken Vergrösserung (etwa 200mal) nötig, was wiederum eine kräftige Lichtquelle für die Auflichtbeleuchtung bedingt. Wegen der Unsicherheit bei der Einstellung auf «beste Schärfe» sowie der thermischen Einwirkungen einer starken Lichtquelle auf die Messmaschine befriedigt jedoch diese Anordnung nicht ganz.

Es ist bekannt, dass man mit einem Mikroskop viel genauer auf die Lage einer Messmarke quer zur optischen Achse einstellen kann als auf ihre Lage in Richtung der Achse. Die Suche nach einer Methode, bei welcher die Änderung der Tiefenkoordinate eine seitliche Bewegung einer Messmarke bewirkt, führte auf die in der Figur gezeigte Anordnung, welche im Prinzip dem Lichtschnittmikroskop von SCHMALZ ähnlich ist. Ein unter etwa 30° zur Messrichtung stehendes Mikroskop projiziert auf das Objekt eine Marke, deren Lage durch ein symmetrisch dazu angeordnetes zweites Mikroskop beobachtet wird. Bei Änderung der Tiefenkoordinate wandert die Marke durch das Gesichtsfeld und kann mit einer im Betrachtungs-

¹⁷⁾ Kern & Co. AG.

mikroskop befindlichen festen Marke zur Deckung gebracht werden. Mit der Verschiebung der Marke im Gesichtsfeld ist allerdings auch eine Änderung ihrer Schärfe verbunden, doch lässt sich die Anordnung natürlich so justieren, dass mit Einstellung der Koinzidenz auch die beste Schärfe erreicht wird. Durch Anbringung einer Skala im Ableseokular kann die Anordnung ferner als Mikrometer ausgebildet werden.



Messungen an einer Versuchsausführung¹⁸⁾ haben ergeben, dass bereits mit 50facher Vergrößerung eine Messgenauigkeit von $\pm 1\mu$ erreicht wird. Bei Verwendung von Objektiven mit einer numerischen Apertur von etwa 0,15 genügt dann bereits eine kleine Glühlampe von einigen Watt Leistung zur Beleuchtung vollauf.

Das Okularbild kann auch auf eine Mattscheibe projiziert werden, doch ist dann eine kräftigere Lichtquelle erforderlich.

Buchbesprechungen – Book Reviews – Notices bibliographiques

The Hypercircle in Mathematical Physics. *A Method for the Approximate Solution of Boundary Value Problems.* Von J. L. SYNGE (Cambridge University Press, 1957). 424 S., 134 Fig.; 70 s.

In den letzten zehn Jahren sind von SYNGE und anderen (J. B. DIAZ, W. PRAGER, A. WEINSTEIN) eine ganze Reihe von Arbeiten erschienen, welche bei gewissen Randwertaufgaben der mathematischen Physik, vor allem bei Problemen aus der Mechanik, mit Hilfe der Hypercircle-Methode Fehlerabschätzungen gaben. Es ist sehr zu begrüßen, dass der ganze Ideenkreis im vorliegenden Buche nun eine geschlossene Darstellung gefunden hat.

¹⁸⁾ Ausgeführt von der Société Genevoise d'Instruments de Physique.

Viele der angedeuteten Randwertaufgaben lassen sich als Extremalprobleme formulieren, das heisst, bei der Interpretation in einem Funktionalraume entspricht die Lösung demjenigen Punkt in einer Ebene mit dem kleinsten Abstand von einem festen Punkt ausserhalb der Ebene, oder, was dasselbe ist, dem Schnittpunkt von zwei total senkrechten Ebenen. Bei einem vorliegenden Problem dieser Art gilt es nun zuerst, die Aufspaltung in die beiden senkrechten Teilräume überhaupt zu finden. Sodann kann man aber, mit Hilfe von elementargeometrischen Betrachtungen, die Lösung auf einem Hyperkreis (= Schnitt Hyperkugel Hyperebene) von bekanntem Zentrum und Radius lokalisieren und damit zum Beispiel, falls das Zentrum als Näherungslösung verwendet wird, Abschätzungen für den Fehler im Sinne der mittleren Quadrate gewinnen. Diese Abschätzungen sind, auch wenn das Problem mit einem Differenzenverfahren behandelt wird, theoretisch exakt.

Es werden keine Vorkenntnisse aus der Funktionalanalysis vorausgesetzt, vielmehr wird auch der Nichtmathematiker anhand von instruktiven Beispielen und Übungsaufgaben gründlich in die Geometrie des Hilbert-Raumes eingeführt. Die praktische Durchführung der Methode wird im Falle der positiv definiten Metrik am Beispiel des Dirichlet- und Neumann-Problems (vor allem für verschiedene Torsionsaufgaben) ausführlich demonstriert. Im Falle der indefiniten Metrik werden Schwingungsprobleme behandelt.

P. LÄUCHLI

Matrizen (2. Auflage). Von Dr.-Ing. R. ZURMÜHL (Springer-Verlag, Berlin 1958). 467 S., 76 Abb.; DM 33.–.

In grossen Zügen ist der Inhalt der zweiten Auflage gleich geblieben, aber der methodische Aufbau der einzelnen Kapitel – insbesondere im theoretischen Teil – wurde gegenüber der ersten Auflage bedeutend verbessert. Insbesondere wirkt sich vorteilhaft aus, dass die Theorie der linearen Gleichungen (Kapitel II) jetzt auf dem Gaußschen Algorithmus aufgebaut wird; der Rangbegriff ergibt sich damit in zwangloser Weise. Kapitel VI (numerische Methoden) ist durch Aufnahme des Verfahrens von STIEFEL-HESTENES (konjugierte Gradienten) bereichert worden, dagegen verbleibt der Abschnitt über Eigenwertprobleme im wesentlichen leider auf dem alten Stand von 1950, der heute als überholt bezeichnet werden muss. Beispielsweise erlaubt keines der vom Verfasser propagierten Verfahren die saubere Bestimmung aller Eigenwerte einer symmetrischen Matrix grosser Reihenzahl, obwohl es mehrere solche Methoden gibt. Das Kapitel VII (technische Anwendungen) wurde unter Aufnahme von Beispielen aus der Mechanik erweitert.

H. RUTISHAUSER

Light Scattering by Small Particles. Von H. C. VAN DE HULST (John Wiley & Sons, Inc., 1957). 470 S., 103 Fig.; \$ 12.00.

Die Erfolge der Kolloidchemie, durch Heranziehung der Lichtstreuung Aufschlüsse über die Teilchenstruktur zu gewinnen, und in jüngster Zeit LA MERS *et al.* Entdeckung eines Tyndall-Linienspektrums an monodispersen Aerosolsystemen haben dem Problem der Wechselwirkung zwischen Licht und dispersen Stoffteilchen wieder vermehrte Aufmerksamkeit gebracht. Die Erfindung des Radars und insbesondere die neuen Möglichkeiten, die damit für die Meteorologie entstanden sind, belebten zusehends auch von der Seite der Mikrowellen her das Interesse an den Lichtstreuungsvorgängen. Die Bedeutung einer mathematischen Erfassung der Streuungserscheinungen ist insofern noch erheblich gesteigert worden, als auch die Kernphysik sich mit ähnlichen Vorgängen, wie zum Beispiel bei der Streuung von Neutronen, auseinanderzusetzen hat.

So ist ein Teilgebiet der theoretischen Physik, das den führenden Forschern des 19. Jahrhunderts grosse Fortschritte zu verdanken hatte und zu denen im gegenwärtigen Jahrhundert nur noch die Arbeiten von DEBYE ausschlaggebend beisteuerten, in jüngster Zeit wieder zu neuem Leben erwacht und hat, besonders entfacht durch die Erfordernisse der Kernphysik, in der Entwicklung mathematischer Verfahrenstechniken erhebliche Früchte getragen. Es muss daher VAN DE HULST sehr angerechnet werden, in einem umfassenden Werk die Grunderscheinungen der Lichtstreuung an kleinen Stoffteilchen zur Darstellung gebracht zu haben.

Das Buch besteht aus den drei Hauptabschnitten:

1. *Allgemeine Störungstheorie*. Diese wird entwickelt, ohne auf besondere Formen der streuenden Teilchen Bezug zu nehmen.

2. *Spezielle Typen der Streuteilchen*. Dieser Abschnitt beansprucht den grössten Teil des Werkumfanges.

3. *Anwendungen*. Sie erstrecken sich auf ausgewählte Gebiete der Chemie, Physik, Meteorologie und Astronomie. Im Falle der Sternkunde wird auch die Frage der Lichtstreuung an interstellarer Materie berührt.

Das Buch beschränkt sich auf die Behandlung der einfachen, kohärenten Streuung an Teilchen, die voneinander unabhängig sind; trotzdem verliert es aber dadurch nicht an Bedeutung. Eines der Kernprobleme der Schrift bildet die mathematische Erfassung der Streuung an einer homogenen Kugel. Erfreulich ist der klare Aufbau und die konsequente Darstellungsweise. Jedes einzelne Kapitel schliesst mit einem Literaturverzeichnis, dem die einschlägigen Arbeiten entnommen werden können. Auch die Aufmachung von seiten des Verlages verdient Anerkennung.

R. SÄNGER

Theorie der Relaissysteme der automatischen Regelung. Von JA. S. ZYPKIN (R. Oldenbourg, München; Verlag Technik, Berlin 1958). Übersetzung aus dem Russischen: W. HAHN, Braunschweig, und R. HERSCHEL, Ulm. 472 S., 249 Abb., 17 Tab.; DM 52.—.

Relaissysteme nehmen in der Regelungstechnik einen bedeutenden Platz ein, doch sind die Eigenschaften der geschlossenen Systeme infolge der Nichtlinearität wesentlich schwieriger überblickbar als Regelsysteme mit linearen Gliedern. Dem Verfasser gelingt es, mit exakten Methoden die Wege anzugeben, auf welchen man unter Zuhilfenahme der Laplace-Transformation, bzw. mittels der Übertragungsfunktion (Frequenzgang) oder der Übergangsfunktion (im Buche mit Zeitcharakteristik bezeichnet) für den linearen Teil des Regelkreises, zu den allgemeinen Stabilitätskriterien gelangt. Der gesamte Regelkreis wird dabei aus einem linearen Teil und dem Relasteil gebildet. Der Relasteil kann eine Totzone, Hysterese, keines von beiden oder beide kombiniert, zwischen zwei festen Ausgangswerten in Funktion der Eingangsgrösse aufweisen. Zuerst wird immer der Fall ohne Totzone und ohne Hysterese untersucht. Die notwendigen Modifikationen für die übrigen Fälle sind dann relativ leicht ableitbar.

Eine besondere Charakteristik von Relaissystemen ist das Auftreten von stabilen Schwingungen mit begrenzter Amplitude (zum Beispiel Temperaturregelung mittelst Thermometerkontakt). Die Übertragungseigenschaften des linearen Systems beeinflussen diese Erscheinung, so dass von der Aufgabenstellung her geeignete Massnahmen getroffen werden müssen, um eine Verbesserung der Regeleigenschaften zu erreichen. Graphische (Phasendiagramme, Hodographen) und analytische Verfahren werden diskutiert und an Beispielen erläutert. Solche stabilen Schwingungen können vom System selbst herrühren oder von einer periodischen Eingangsgrösse erzwungen sein (Mitnahmeeffekt). Im allgemeinen Fall treten mehrere Eigen-

schwingungen auf, so dass ein periodisches Verhalten beobachtet werden kann. Die Untersuchung der Stabilität solcher periodischen Zustände braucht schon erhebliche Mittel, mit welchen besondere Stabilitätskriterien herausgearbeitet werden. Schliesslich werden Massnahmen zur Linearisierung von Relaisystemen und dabei auftretende optimale Vorgänge diskutiert. Ein mathematischer Anhang, Tabellen und ein ausführliches Literaturverzeichnis, nach Autoren geordnet, in dem die russischen Quellen stark überwiegen, beschliessen das Buch.

Der Vorzug des Werkes liegt in der einheitlichen Verarbeitung des weit verstreuten Materials. Wer mit der Theorie der linearen Regelvorgänge vertraut ist, wird mit Genuss dieser bei aller Konzentration sehr vollständigen Darstellung der Regelung mittelst Relaisystemen folgen. Etwaige ungewohnte Fachausdrücke, durch die Übersetzung bedingt, kann der Leser leicht selbst korrigieren.

H. WEBER

Les calculateurs numériques automatiques et leurs applications.

Von A. SESTIER (Éditions «Hommes et Techniques», Neuilly 1958). 183 S., fFr. 3000.

Das Buch von SESTIER vermittelt einen allgemeinverständlichen Überblick über die digitalen Rechenautomaten. Sowohl deren charakteristische Merkmale wie auch ihre Anwendungsmöglichkeiten in Industrie, Handel und Wissenschaft werden besprochen und ein Ausblick auf die technische Entwicklung und die möglichen Fortschritte in der nächsten Zukunft gegeben (wobei solchen Extrapolationen natürlich immer ein grosses Mass an Unsicherheit eigen ist). Ebenso werden weitergehende Anwendungen, wie Übersetzungen, Dechiffirage, Dokumentation, kurz erwähnt. Die Darstellung hat vor allem die Verhältnisse und die Möglichkeiten Frankreichs im Auge und wendet sich wohl in erster Linie an leitende Persönlichkeiten industrieller und kommerzieller Unternehmungen, für die gelegentlich auch praktische Hinweise verschiedener Art gegeben werden. Einige bibliographische Angaben beschliessen das Buch.

E. ROTH-DESMEULES

Theorie der Limitierungsverfahren. Von KARL ZELLER ([Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Neue Folge, Heft 15, Springer-Verlag, Berlin 1958). 242 S.; DM 36.80.

Die Theorie der Limitierungsverfahren, speziell für divergente Zahlenfolgen, ist zu einem umfangreichen Gebiet der Analysis angewachsen, so dass eine knappe und übersichtliche Zusammenfassung der Ergebnisse sehr erwünscht ist, auch wenn heute noch keine einheitliche und abschliessende Darstellung möglich ist. Das Buch von ZELLER kommt diesem Wunsche in hervorragender Weise entgegen und ist vor allem geeignet, den Leser in die Hauptprobleme sowie in die vorhandene Literatur einzuführen. Zur Hauptsache werden die Matrixtransformationen und die zugehörigen Limitierungsverfahren betrachtet, während andere Methoden und Anwendungen nur beiläufig erwähnt werden.

Die ersten Kapitel des Buches bringen die Grundbegriffe, die Hilfsmittel aus der Funktionalanalysis, die Struktur der Wirkfelder und weiter, im Rahmen der allgemeinen Theorie, die direkten Sätze und die Umkehrsätze. Die folgenden Kapitel befassen sich mit speziellen Verfahren, wie die vom Cesàro-Abelschen Typ, die funktionentheoretischen Verfahren sowie andere Klassen von Verfahren. Die Beweise sind im allgemeinen nur angedeutet. Von besonderer Wichtigkeit ist das beigefügte Literaturverzeichnis von nicht weniger als 64 Seiten, das bis 1955 nachgeführt ist und kaum eine bedeutende Arbeit vermissen lassen dürfte. Das Buch wendet sich in erster Linie an den Mathematiker.

E. ROTH-DESMEULES

An Introduction to Fourier Methods and the Laplace Transformation.

Von PHILIP FRANKLIN (Dover Publications, London and New York 1958). 289 S., 77 Fig.; \$ 1.75.

Diese Einführung ist eine korrigierte Neuauflage des bereits 1949 erschienenen Buches *Fourier Methods* und befasst sich mit den Fourier-Reihen und der Laplace-Transformation, und zwar vor allem im Hinblick auf ihre Anwendungen auf physikalische Probleme. Nach einem einleitenden Kapitel über komplexe Zahlen und elektrische Schwingungskreise werden die Fourier-Reihen und Fourier-Integrale behandelt. Als dann folgt eine Einführung in die partiellen Differentialgleichungen (insbesondere Wärmeleitung, Schwingungsprobleme, Maxwellsche Gleichungen usw.) und die zugehörigen Randwertprobleme. Schliesslich wird die Laplace-Transformation eingeführt mit Anwendungen auf gewöhnliche Differentialgleichungen sowie auf gewisse partielle Differentialgleichungen. An Vorkenntnissen wird im wesentlichen nur die Differential- und Integralrechnung vorausgesetzt. Die Darstellung ist sorgfältig und enthält über 800 Aufgaben mit den Lösungen sowie einige bibliographische Hinweise. Das Buch ist gut geeignet für Studierende, wobei auch der recht günstige Preis nicht ausser acht gelassen werden darf.

E. ROTH-DESMEULES

Elementary Statistical Physics. Von C. KITTEL (John Wiley & Sons, New York 1958). 228 S., 28 Fig.; \$ 8.—.

Der Büchermarkt wurde in der letzten Zeit mit Neuerscheinungen über statistische Mechanik förmlich überschwemmt. Eine gewisse Aktualität ist dem Gebiet wegen den zahlreichen neueren Anwendungen vielleicht nicht abzusprechen. Davon ist in dem Buch von KITTEL erfreulicherweise manches zu finden; wir erwähnen stichwortartig: Negative absolute Temperatur, Streuung extrem hoch energetischer Teilchen, Strahlungsrekombination von Elektron-Loch-Paaren in Halbleitern. Leider hat sich der Leser dabei meist mit Andeutungen und Hinweisen auf die Originalliteratur zu begnügen, denn das Buch will «elementar» sein. Aber KITTEL hat die Gabe, schwierige Fragen auf einfache zu reduzieren (siehe zum Beispiel die Behandlung des Overhauser-Effektes als Übungsaufgabe). Das Buch wendet sich an die Physikstudenten und will eine Einführung vermitteln vor allem in die Methode der Ensembles, die stochastischen Prozesse und die Transporttheorie.

C. ENZ

Handbuch der Physik - Encyclopedia of Physics. Herausgegeben von S. FLÜGGE, Band 26, 2. Teil: *Licht und Materie* (Springer-Verlag, Berlin 1958). 965 S., 754 Abb.; DM 168.—.

Der 26. Band enthält 4 Kapitel sehr verschiedenen Umfanges und Stils über *Lumineszenz* (G. F. J. GARLICK, 128 S.), *Temperaturstrahlung fester Körper* (G. A. N. RUTGERS, 42 S.), *Raman-Effekt* (S. MIZUSHIMA, 72 S.) und *Infrarotspektroskopie* (J. LECOMTE, 695 S.).

Der Artikel über Lumineszenz ist für Festkörperphysiker und (zum Teil auch für physikalische) Chemiker geschrieben und geht von den alten einfachsten Theorien der Kinetik (Reaktion 1. und 2. Ordnung für die Lumineszenzzentren, JABLONSKIS Termschema mit metastabilem Zwischenzustand und thermischem Aktivierungsprozess) zu den heute üblichen Vorstellungen der Energiebänder (Zustände der Lumineszenzzentren und der «electron traps» im «gap» zwischen Valenz- und Leitungsband) über. Das Kapitel über Beobachtungen an verschiedenen Phosphor-Klassen (Frank-Condon-Prinzip) wird vom Standpunkt dieser Theorien

und des Hippelschen Modells vorgenommen, die Struktur der Lumineszenzzentren wird dabei nicht eingehend behandelt. Bei der Besprechung einzelner Phosphore wird die Theorie verfeinert, speziell für Thermolumineszenz bei metastabilen Zentren, bei photohalbleitenden Phosphoren, mit und ohne strahlungslose Prozesse und bei der wichtigen Frage der Polarisierung der Lumineszenzstrahlung. Eine relativ ausführliche Behandlung findet ferner die Elektro- und die praktisch wichtige Radiolumineszenz.

Der Rutgersche Artikel über Temperaturstrahlung scheint unseres Erachtens hauptsächlich für Ingenieure geschrieben, indem er sich auf die Beschreibung der Temperaturstrahlung anhand phänomenologischer Gesetze beschränkt und eine Reihe von Messungsergebnissen für Metalle und technisch interessante Oxyde und dergleichen zitiert.

Der Artikel über den Raman-Effekt wiederum scheint hauptsächlich für den Chemiker gedacht, die klassische Theorie des Effektes, ihr Zusammenhang mit der Symmetrie der Molekel und deren Grundschrwingungen sowie ihre Stellung im Rahmen der Strahlungstheorie ist angedeutet, ebenso die (gruppentheoretische) Ableitung der Auswahlregeln des Schwingungs-Raman-Effektes. Als Beispiele sind einige experimentelle Resultate angegeben. Man kann sich fragen, warum die Herausgeber nicht einfach eine der bewährten Darstellungen des Raman-Effektes abgedruckt haben.

Obgleich nach Angabe des Autors hauptsächlich für Physiker gedacht, dürfte der als monumental anzusprechende Artikel über Infrarotspektroskopie am besten den Bedürfnissen des Chemikers dienen. Die Theorie der Infrarotspektren ist fast völlig beiseite gelassen. Dafür findet man zunächst eine (im wesentlichen qualitative) Besprechung der experimentellen Hilfsmittel (Spektrographen, Materialien usw.). Ferner ist in umfangreichen Kapiteln mit rund 500 (in vielen Fällen unnötig uneinheitlichen und gelegentlich unvollständig beschrifteten) Figuren eine bis 1956 reichende Sammlung experimenteller Ergebnisse über Infrarotspektren organischer und anorganischer Molekeln und Kristalle zusammengestellt. Einzelne Kapitel zeigen eine bisher nicht bekannte Vollständigkeit hinsichtlich der gegenwärtigen empirischen Kenntnisse und Literaturzitate, sind aber weitgehend qualitativ gehalten und auch nicht durchweg fehlerfrei. Speziell die Diskussion der Kristallspektren ist unseres Erachtens zu vereinfacht. Ein Kapitel über die bisherigen Ergebnisse der Intensitätsmessung der Infrarot-Interferometrie und die photometrische qualitative Analyse schliesst den Artikel ab.

Hs. H. GÜNTARD

Technische Hydro- und Aeromechanik. Von W. KAUFMANN (Springer-Verlag, Berlin 1958). 386 S., 266 Abb.; DM 37.50.

Diese zweite, verbesserte Neuauflage stellt für den jungen Ingenieur und Studenten auf dem Gebiet der Strömungsmechanik ein äusserst wertvolles und praktisches Lehrbuch dar. Die rasch vergriffene erste Auflage bestätigte die ausserordentlich günstige Wahl der behandelten Gebiete und bedingte nur wenige, eher formale Abänderungen des alten Textes. Zugleich sind aber darüber hinaus einige Ergänzungen neu hinzugenommen worden.

In seinen drei Hauptabschnitten, Eigenschaften der Flüssigkeiten und Gase, Hydro- bzw. Aerostatik und der Lehre von den Bewegungen der Flüssigkeiten (Dynamik), ist das Hauptgewicht auf das stoffbedingt grösste Gebiet der Dynamik gelegt. Das Werk zeichnet sich aus durch eine klare Beschreibung der physikalischen Grundlagen und folgert die Theorien in enger Anlehnung an die Praxis. Viele Gebiete wurden durch neueste Forschungsergebnisse bereichert, ohne dass da-

bei der Charakter eines Grundlagenwerkes verlorenging. Mancherorts sind zum tieferen Verständnis die Erläuterungen durch Rechenbeispiele ergänzt. Es würde hier zu weit führen, die behandelten Gebiete im einzelnen zu besprechen, es sei lediglich hervorgehoben, dass sämtliche dem heutigen Stand der Technik der Strömungslehre entsprechenden Grundgebiete behandelt werden. Angefangen bei den Bewegungsgleichungen von EULER, dem Energiesatz für inkompressible Flüssigkeiten von BERNOULLI bis zum Charakteristikenverfahren von PRANDTL und BUSEMANN wird überall, durch wertvolle Hinweise auf die einschlägige Literatur, der Weg zur vertiefteren Ausbildung erleichtert.

Die oben erwähnten Ergänzungen betreffen vor allem die Arbeiten über die Grenzschichttheorie, Tragflügeltheorie zur Berechnung des Auftriebes an gepfeilt und schiebenden Flügeln. Vermehrte Aufmerksamkeit wurde dem Verhalten der Unstetigkeitsfläche hinter Tragflügeln geschenkt. Die Gasdynamik hat auch eine der Aktualität entsprechende Erweiterung erfahren. Das im Gas- und Dampfturbinenbau wichtige Verhalten der Grenzschicht an rotierenden Scheiben hat in einem neuen Abschnitt seine Würdigung gefunden. Das Buch kann in dieser neuen Fassung wiederum bestens empfohlen werden.

V. STINGELIN

Numerische Mathematik. Zeitschrift herausgegeben von R. SAUER (München), E. STIEFEL (Zürich), J. TODD (Pasadena) und A. WALTHER (Darmstadt) bei Springer (Heidelberg). Bd. 1, Heft 1 (1959), 60 Seiten, Gr. 8°; brosch., DM 16.80.

Der Springer-Verlag bietet den an der numerischen Analysis interessierten wissenschaftlichen Kreisen eine neue Zeitschrift an («Numerische Mathematik»), deren 1. Heft nun in vorzüglicher Ausstattung vorliegt. Die Zeitschrift soll auf breiter internationaler Grundlage Arbeiten veröffentlichen, die sich mit allgemeinen Problemen des digitalen Rechnens und der Entwicklung von numerischen Verfahren beschäftigen.

Das wissenschaftliche Redaktions-Komitee besteht aus den Herren R. SAUER (München), E. STIEFEL (Zürich), J. TODD (Pasadena) und A. WALTHER (Darmstadt). Das erste Heft enthält Aufsätze von E. STIEFEL, A. S. HOUSEHOLDER und F. L. BAUER, M. WEISFELD, sowie einen interessanten Bericht von A. J. PERLIS und K. SAMELSON über die neue Formelsprache ALGOL, die dazu dienen soll, die Methoden der automatischen Programmierung für Rechenautomaten auf internationaler Grundlage einheitlich zu entwickeln.

H. RUTISHAUSER

Kerntechnik, Physik, Technologie, Reaktoren. Von W. RIEZLER und W. WALCHER (B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft Stuttgart 1958). 1002 S., 493 Fig., 154 Tab.; DM 150.-.

Gemessen am Werdegang der uns bereits vertrauten Wissenschaften, hat sich die Reaktortechnik äusserst sprunghaft entwickelt. Kaum zwei Jahrzehnte nach der erstmaligen Verwirklichung einer sich selbst unterhaltenden Kettenreaktion mit Kernbrennstoff sind Nutzenergie erzeugende Kernkraftwerke in Betrieb, und die Errichtung weit grösserer Einheiten steht in naher Zukunft bevor. Diese stürmische Entwicklung ruft gebieterisch nach Fachleuten aller Ausbildungsstufen. Hierbei ist besonders die dem Akademiker zuge dachte Aufgabe eine mannigfaltige, verlangt doch der Reaktorbau Kenntnisse der mathematischen, physikalischen, chemischen, metallurgischen und technologischen Wissenschaften. Es ist gerade diese Vielseitigkeit, welche einerseits diesem modernen Betätigungsfeld einen so sonderlichen Anreiz gibt, welche aber auch dem Entstehen einer Lehr-

tradition, wie sie zum Beispiel für die Thermodynamik vorhanden ist, Hindernisse in den Weg legt. Die moderne Literatur über Reaktortechnik könnte man daher in zwei Gruppen scheiden. Die erste umfasst Werke, welche die Anwendungen der einzelnen Wissenschaften für die Probleme der Reaktortechnik zum Thema haben. Die andere Gruppe enthält Sammlungen der verschiedensten Gesichtspunkte, welche beim Reaktorbau berücksichtigt werden müssen. Je nach Vorbildung und Veranlagung der Autoren werden dabei die einen oder anderen Probleme gründlicher, klarer oder mit mehr pädagogischem Geschick behandelt. Solche Bücher sind naturgemäss oft sehr umfanglich, wie zum Beispiel das vorliegende erste deutschsprachige Werk *Kerntechnik* von RIEZLER und WALCHER.

Die Herausgeber haben sich der Mitarbeit einer grossen Zahl von Fachleuten verschert, so dass die einzelnen Kapitel mit der nötigen Wissenschaftlichkeit abgefasst werden konnten. Ein solches Vorgehen bringt zwar notwendigerweise eine zusätzliche Heterogenität mit sich, indem die verschiedenen Autoren an ihre Leser unterschiedliche Anforderungen stellen. So erfordert unter anderem der Abschnitt über Reaktorthorie eine mathematische Vorbildung, über welche der heute ausgebildete Ingenieur nicht ohne weiteres verfügt. Andererseits hätte die Behandlung der reaktorkinetischen Vorgänge durch Verwendung der beim Regelfachmann als bekannt anzunehmenden Methoden der Laplace-Transformation an Anschaulichkeit gewonnen. Obwohl die Herausgeber sich um eine einheitliche Bezeichnungsweise bemühen, wird beispielsweise der Ausdruck Reaktivität von den Teilautoren in unterschiedlicher Weise gebraucht (vgl. Definition S. 500 mit Bedeutung im Kapitel *Wärmeprobleme*, zum Beispiel S. 598). 100 Seiten des Buches dienen der Beschreibung von Forschungs- und Leistungsreaktoren, wobei anhand ausgewählter Beispiele die besonderen Eigenschaften und Aufbauprinzipien der verschiedenen Systeme erläutert werden. Über Sicherheitsfragen, die möglichen Gründe für ein Abweichen eines Systems von vorgeschriebenen Betriebszuständen und die notwendigen organisatorischen Massnahmen sowie Richtlinien zur Standortwahl des Reaktors handelt ein weiterer Abschnitt. Diese Probleme werden anhand der Erfahrungen einiger Reaktorunfälle diskutiert. Die einleitenden Abschnitte des Buches vermitteln eine Einführung in die kernphysikalischen sowie die zum Verständnis des Reaktorbaues nötigen technologischen und verfahrenstechnischen Grundlagen. In die Zukunft weisen Bemerkungen über Kernfusion.

Der ganze Band enthält eine ungewöhnlich grosse Zahl von Figuren und Tabellen. Ein ausführliches Sachverzeichnis erleichtert den Gebrauch als Nachschlagewerk wesentlich.

Die Autoren haben sich bemüht, die durch die angelsächsische Originalliteratur eingeführten Bezeichnungen ins Deutsche zu übertragen. Dieser Versuch ist ihnen weitgehend gelungen. Einige Ausdrücke, wie Stromkammer für Ionisationskammer oder Wanderfläche für Migrationsfläche, werden jedoch kaum allgemeine Zustimmung finden.

W. HÄLG

Tabellen der Atomkerne. Teil I: *Eigenschaften der Atomkerne*. Band 1: *Die Elemente Neutron bis Zinn*. Von W. KUNZ und J. SCHINTLMEISTER (Akademie-Verlag, Berlin 1958). 465 S., 305 Abb.; DM 105.-.

Bei dem vorliegenden Band handelt es sich um ein Tabellenwerk, das die charakteristischen Daten der stabilen und instabilen Isotope der Elemente Neutron bis Zinn erfasst. Den Tabellen geht eine in deutscher, englischer und russischer Sprache abgefasste Erläuterung voraus, in der die in einem Tabellenwerk unumgänglichen Abkürzungen sorgfältig interpretiert werden. Begriffe wie

zum Beispiel Konversionskoeffizienten, die in der Literatur zuweilen verschieden definiert erscheinen, werden eindeutig festgelegt. – Sämtliche über einen Kern bis zum 1. Januar 1958 bekannten Daten wurden kritisch durchgesehen und gemäss ihrer Zuverlässigkeit klassifiziert. An Stellen, wo dies zulässig erscheint, haben die Autoren aus vorliegenden Messresultaten einen sorgfältig gewogenen Mittelwert berechnet. Die Zahlenwerte werden, soweit dies möglich ist, mit Fehlergrenzen, Messmethode und Autor angegeben.

Die stabilen Isotope sind in diesem Werk durch folgende Grössen charakterisiert: Genaue Atommasse, relative Häufigkeit des Isotops, Spin, magnetisches Dipol- und Oktupolmoment sowie elektrisches Quadrupolmoment. Isomere Zustände mit Halbwertszeiten, die $0,1 \mu\text{s}$ überschreiten, erscheinen separiert. Für die radioaktiven Kerne ist das Zerfallsschema – sofern es mit einiger Sicherheit angegeben werden kann – graphisch dargestellt. Der Zerfall wird überdies durch folgende tabellierte Werte beschrieben: Halbwertszeit, Energie der Teilchen und Quanten, Spin und Parität der auftretenden Zustände sowie Konversionskoeffizienten und Multipolordnung der Gammaübergänge. Die prozentuale Intensität der angegebenen Strahlungskomponenten, die ft -Werte für Betazerfälle und die möglichen Methoden zur Herstellung des betreffenden Isotopes vervollständigen die Angaben.

Bei der äusseren Gestaltung des Buches wurde weniger Wert auf eine gedrängte Darstellung gelegt; dafür gewinnen die Tabellen an Übersichtlichkeit. Messgrössen, die zurzeit noch nicht zur Verfügung stehen, können leicht in die entsprechenden Kolonnen eingetragen werden. Eine merkliche Erleichterung für den Benützer der Tabellen bedeutet es, dass jedem Element ein separates Literaturverzeichnis zugeordnet ist. Auf diese Weise wird das so lästige Nachschlagen von Zitaten vermieden.

Der dauerhafte Einband und die vorzügliche Ausstattung des Buches lassen dieses Werk als wertvolles Hilfsmittel nicht nur des Kernphysikers und Radiochemikers, sondern auch all derjenigen erscheinen, die sich mit der Anwendung von Isotopen in Medizin, Biologie und Technik befassen.

F. HEINRICH

Introduction to Advanced Dynamics. Von S. W. MC CUSKEY (Addison Wesley Publ. Co., Inc., Reading, Mass., 1959). 263 S., 120 Fig.; \$ 8.50.

Eine hübsche und saubere Einführung in die höhere Dynamik. Sie behandelt 1. die Bewegung (und Relativbewegung) des Massenpunktes, 2. das Hamiltonsche Prinzip und die Lagrangeschen Gleichungen, 3. die Zentralbewegung, 4. die Dynamik des starren Körpers mit einer Einführung in die Probleme des Kreisels, 5. Schwingungen von konservativen und nicht konservativen Systemen mit zwei Freiheitsgraden, 6. die Hamiltonschen Gleichungen und den Phasenraum, 7. die Hamilton-Jacobischen Gleichungen. Das Buch wendet sich in erster Linie an Studenten der Physik, ist aber äusserst klar und einfach geschrieben und damit für jeden verständlich, der einen elementaren Mechanikkurs der bei uns üblichen Art hinter sich hat.

H. ZIEGLER

Statics and the Dynamics of a Particle. Von W. DUNCAN MAC MILLAN (Dover Publications, London and New York 1958). 450 S., 183 Fig.; \$ 2.00.

Das Buch gibt eine breite und elementare Darstellung der Punktmechanik, ergänzt durch einzelne Kapitel der Statik starrer Körper und der Festigkeitslehre.

H. ZIEGLER

Thermal Convection from a Horizontal Wire

By LAWRENCE J. CRANE, Glasgow, Scotland¹⁾

The steady flow considered here is generated by the diffusion of heat from a long thin wire, placed in a horizontal plane, into a uniform fluid which extends indefinitely above the plane. Uniform profiles are found for velocity and temperature in the case of a gas whose coefficients of viscosity and thermal conductivity vary directly as the absolute temperature. The solution given is valid when the vertical distance above the wire is very much greater than the diameter of the wire. The solution is a good approximation to flow in the atmosphere so long as the vertical distances are not so great as to render invalid the assumption that the fluid is uniform throughout. The solution is valid even when the density differences in the flow are large.

Equations of Motion

A system of rectangular Cartesian coordinates is taken with origin at the centre of the wire, x -axis vertically above the wire and y -axis in the horizontal plane in the direction perpendicular to the wire. The equations of momentum and continuity for steady laminar flow are

$$\varrho u \frac{\partial u}{\partial x} + \varrho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - g (\varrho - \varrho_0) \quad (1)$$

and

$$\frac{\partial(\varrho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho v)}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

respectively, where (u, v) are the components of velocity with respect to the (x, y) -axes; ϱ and μ are the density and coefficient of viscosity of the fluid respectively (the quantities ϱ_0 and μ_0 , which are used later, refer to the surrounding atmosphere); and g is the acceleration due to gravity.

Equation (1) is the boundary layer equation of momentum. The pressure gradient term has been omitted because the pressure is, in this case, approximately constant in the mixing region. The last term in equation (1) is due to the buoyancy of the fluid.

The diffusion of heat through the fluid is governed by the equation:

$$\varrho u \frac{\partial(C_p T)}{\partial x} + \varrho v \frac{\partial(C_p T)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial y} \right), \quad (3)$$

¹⁾ Mathematics Department, The Royal College of Science and Technology.

where T , C_p and κ are the absolute temperature, specific heat at constant pressure and coefficient of heat conduction of the fluid respectively. (T_0 and κ_0 refer to the surrounding atmosphere.) Equation (3) is the boundary layer form of the equation of diffusion of heat.

Equation (2) is automatically satisfied when a stream function ψ defined by

$$\varrho u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \varrho v = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

is introduced. Equations (1) and (3) are simplified by introducing the von Mises change of variable from (x, y) to (x, ψ) . Equations (1) and (3) then become:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\mu \varrho u \frac{\partial u}{\partial \psi} \right) - \frac{g}{u} \left(1 - \frac{\varrho_0}{\varrho} \right) \quad (4)$$

and

$$\frac{\partial (C_p T)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\kappa \varrho u \frac{\partial T}{\partial \psi} \right) \quad (5)$$

respectively.

In the case of a gas, in which $\kappa \propto \mu \propto T$ and in which C_p is a constant, equations (4) and (5) simplify to

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mu_0 \varrho_0 \frac{\partial}{\partial \psi} \left(u \frac{\partial u}{\partial \psi} \right) + \frac{\varphi}{u} \quad (6)$$

and

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\kappa_0 \varrho_0}{C_p} \cdot \frac{\partial}{\partial \psi} \left(u \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \right), \quad (7)$$

respectively. The variable φ in equation (7) is defined by

$$\varphi - \left(\frac{T}{T_0} - 1 \right) g = \left(\frac{\varrho_0}{\varrho} - 1 \right) g.$$

(This last result follows from the fact that the pressure is approximately constant over the boundary layer.)

Solution of Equations (6) and (7)

A solution of equations (6) and (7) of the type

$$\left. \begin{aligned} u &= x^p f(\eta), \\ \varphi &= x^m h(\eta), \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

where $\eta = \psi/x^n$, is now sought. The functions f and h satisfy the following boundary conditions:

On the vertical axis

$$\eta = 0, \quad f'(\eta) = h'(\eta) = 0,$$

and on the boundaries of the flow

$$\eta = \pm \eta_b, \quad f = q = 0.$$

A third condition on the motion is obtained by integrating equation (7) between the limits $\psi = 0$ and $\psi = \psi_b$ — the boundary of the flow. This gives

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\psi_b} \varphi \, d\psi = 0. \quad (9)$$

It follows from (9) that the total flux of heat I across a horizontal plane is a constant of the flow which is in fact equal to

$$2 \int_0^{\psi_b} \varphi \, d\psi.$$

When the expressions for q and ψ given by (8) are substituted in (9) it is found that $m + n = 0$ and

$$I = 2 \int_0^{\eta_b} h(\eta) \, d\eta.$$

Two more conditions on the indices m , n and p are obtained when the expressions for u and φ are substituted in (6). These relations, which follow from the requirement that the buoyancy and viscous terms in (6) shall be of the same order of magnitude when x is large, are

$$p - 1 = 2p - 2n = m - p.$$

Similarly the terms in (7) are of the same order of magnitude for large x when

$$-1 = p - 2n.$$

These relations determine the values of m , n and p as $-3/5$, $3/5$ and $1/5$ respectively. These values of m , n , and p entail that η varies between finite limits.

Equations (6) and (7) now reduce to the ordinary differential equations

$$\frac{1}{5} f - \frac{3}{5} \eta f' = \mu_0 \varrho_0 \frac{d}{d\eta} (f f') + \frac{h}{f} \quad (10)$$

and

$$-\frac{3}{5} (h + \eta h') = \frac{\kappa_0 \varrho_0}{C_p} \cdot \frac{d}{d\eta} (f h'), \quad (11)$$

respectively. Equation (11) can be integrated to give

$$-\frac{3}{5} \eta h = \frac{\alpha_0 \varrho_0}{C_p} f h', \quad (12)$$

when the boundary condition $h'(0) = 0$ is used.

The following changes of variables are now made

$$f = \frac{\alpha}{6} F(\xi), \quad h = \frac{2}{135} \alpha^2 H(\xi) \quad \text{and} \quad \xi = \frac{\eta}{\sqrt{\alpha \mu_0 \varrho_0}},$$

where α is a certain constant. Equations (10) and (12) now become

$$6 F - 18 \xi F' = 5 \frac{d}{d\xi} (F F') + 16 \frac{H}{F} \quad (13)$$

and

$$-18 \sigma \xi H = 5 F H', \quad (14)$$

respectively. (σ is the Prandtl number of the atmosphere $C_p \mu_0 / \alpha_0$.) The boundary conditions are:

On the axis of the flow, i. e. on $\xi = 0$,

$$F' = H' = 0,$$

and on the boundaries of the flow which may, by choosing a suitable value of α , be taken at $\xi = \pm 1^2$),

$$F = H = 0.$$

For the special case of $\sigma = 5/9$, equations (13) and (14) have the following exact solution which satisfies the boundary conditions

$$F = H = 1 - \xi^2. \quad (15)$$

Determination of an Approximate Solution of (12) and (13) when σ Is Close to 5/9

Since the value of σ for air is about 0.733, it is of interest to extend the solution given above to cover values of σ near to 5/9.

The method used to solve equations (12) and (13) consists in expanding F and H in the series:

$$\left. \begin{aligned} F &= F_0 + \beta F_1 + \beta^2 F_2 + \cdots, \\ H &= H_0 + \beta H_1 + \beta^2 H_2 + \cdots, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

where $F_0 = H_0 = 1 - \xi^2$ and $\beta = 9\sigma/5 - 1$. (In the case of air β is about 0.32.)

²) When the limits of ξ are fixed the value of α follows at once from the heat flux integral. It is in fact given by

$$\frac{9}{2} \left(\frac{25}{18} - \frac{I^2}{\mu_0 \varrho_0} \right)^{1/5},$$

when the boundaries of the flow are taken as $\xi = \pm 1$.

The equations for F_1 and H_1 are then found by substituting the series (16) in (12) and (13) and equating the coefficients of β^l . The equation for F_1 is

$$(1 - \xi^2) F_1''' - \frac{12}{5} \xi (1 - \xi^2) F_1'' + \left\{ \frac{18}{5} (1 - \xi^2) + \frac{16}{5} \right\} F_1' = \frac{32}{5} \xi.$$

This equation reduces to the following equation of hypergeometric type:

$$z(1 - z) \zeta'' + \left\{ \frac{4}{5} + \frac{7}{10} (1 - z) \right\} \zeta' - \frac{4}{5} \zeta = \frac{4}{5}, \tag{17}$$

when the changes of variable $dF_1/dz = \zeta(z)/(1 - z)$ and $z = \xi^2$ are made. The boundary conditions on $\zeta(z)$ are

$$\text{at } z = 0, \quad \zeta \text{ is finite and at } z = 1, \quad \zeta = 0.$$

The solution of equation (17) which satisfies the former condition is

$$\zeta = A F(a, b; c; z) - 1,$$

where the usual notation for the hypergeometric function is used and where

$$a + b = -\frac{3}{10}, \quad ab = \frac{4}{5} \quad \text{and} \quad c = \frac{3}{2}.$$

The constant of integration A is fixed by the boundary condition at $z = 1$. It is in fact

$$\frac{\Gamma(c - a) \Gamma(c - b)}{\Gamma(c - a - b) \Gamma(c)}.$$

Finally

$$F_1 = \int_1^z \frac{1}{1 - z} dz;$$

the lower limit is unity because F_1 vanishes on the boundaries of the flow. The function H_1 satisfies the equation

$$2 \xi (H_0 + H_1) + F_1 H_0' + F_0 H_1' = 0.$$

This equation can be integrated to give

$$H_1 = (1 - z) \left[\int_0^z \frac{F_1 dz}{(1 - z)^2} + \log(1 - z) + C \right].$$

The constant C is determined by the condition

$$\int_0^1 H_1 d\xi = 0.$$

This condition follows from the fact that the total flux of heat from the wire is constant.

Change of Variable

The coordinate y is related to ξ by

$$\left. \begin{aligned} y = \int_0^y \frac{d\psi}{\varrho u} &= 6 x^{2/5} \sqrt{\frac{\mu_0}{\alpha \varrho_0}} \int_0^\xi \frac{d\xi}{F} \left[1 + \frac{2}{135} \cdot \frac{\alpha^2}{g x^{3/5}} H \right] \\ &= 6 x (Gr)^{-1/4} \int_0^\xi \frac{d\xi}{F} \left[1 + \frac{2}{135} \cdot \frac{\alpha^2}{g x^{3/5}} H \right]. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

When $\sigma = 5/9$ (18) becomes

$$\left. \begin{aligned} y &= 6 x^{2/5} \sqrt{\frac{\mu_0}{\alpha \varrho_0}} \left[\tanh^{-1} \xi + \frac{2}{135} \cdot \frac{\alpha^2}{g x^{3/5}} \xi \right] \\ &= 6 x (Gr)^{-1/4} \left[\tanh^{-1} \xi + \frac{2}{135} \cdot \frac{\alpha^2}{g x^{3/5}} \xi \right]. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Gr is the Grashof number of the flow; its value, for this type of motion, is

$$x^{12/5} \left(\frac{\alpha \varrho_0}{\mu_0} \right)^2.$$

Conclusion

A solution of the boundary-layer equations is found for the thermal flow due to a long thin horizontal wire which is heated. When the density of the fluid is sensibly constant, the motion is approximately of 'similar' type. In this case the velocity and temperature distributions are

$$u = \frac{1}{6} \alpha x^{1/5} F(\xi)$$

and

$$\frac{T}{T_0} = 1 + \frac{2}{135} \cdot \frac{\alpha^2}{g x^{3/5}} H(\xi),$$

where ξ is defined by

$$\int_0^\xi \frac{d\xi}{F} = \frac{y}{6 x^{2/5}} \sqrt{\frac{\alpha \varrho_0}{\mu_0}} = \frac{y}{6 x} (Gr)^{1/4}.$$

When $\sigma = 5/9$, these formulae simplify to

$$u = \frac{\alpha x^{1/5}}{6} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{y}{6 x^{2/5}} \sqrt{\frac{\alpha \varrho_0}{\mu_0}} \right] = \frac{\alpha x^{1/5}}{6} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{y}{6 x} (Gr)^{1/4} \right],$$

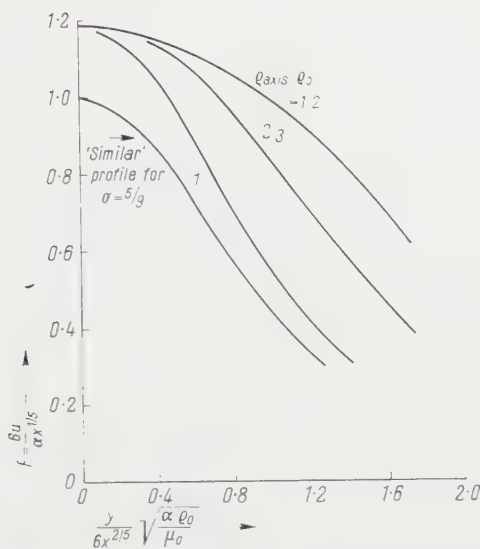


Figure 1

Plot of dimensionless velocity F against $y/6x^{2/5}\sqrt{\alpha\varrho_0/\mu_0}$ for flow in air ($\sigma = 0.733$) when $\varrho_{axis}/\varrho_0 = 1/2, 2/3, 1$. The 'similar' profile when $\sigma = 5/9$ is also given.

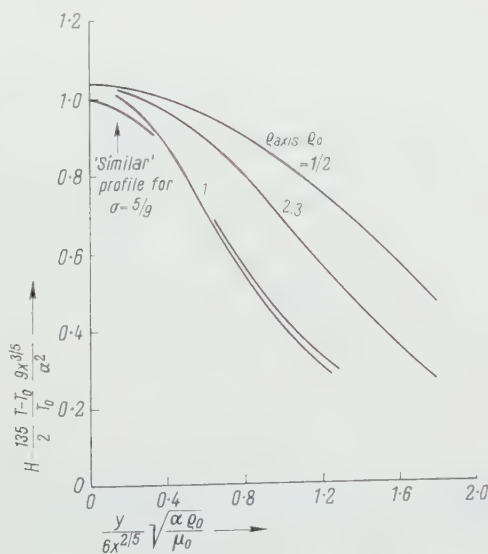


Figure 2

Plot of

$$H = \frac{135}{2} \cdot \frac{g x^{3/5}}{\alpha^2} \cdot \frac{T - T_0}{T_0}$$

against $y/6x^{2/5}\sqrt{\alpha\varrho_0/\mu_0}$ for flow in air ($\sigma = 0.733$) when $\varrho_{axis}/\varrho_0 = 1/2, 2/3, 1$. The 'similar' profile when $\sigma = 5/9$ is also given.

and

$$\begin{aligned}\frac{T}{T_0} &= 1 + \frac{2}{135} \cdot \frac{\alpha^2}{g} \frac{1}{x^{3/5}} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{y}{6 x^{2/5}} \sqrt{\frac{\alpha \varrho_0}{\mu_0}} \right] \\ &= 1 + \frac{2}{135} \cdot \frac{\alpha^2}{g} \frac{1}{x^{3/5}} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{y}{6 x} (Gr)^{1/4} \right].\end{aligned}$$

These formulae show that the width of the mixing region at a height x above the source is of order $x(Gr)^{-1/4}$. This result agrees with the work of POHLHAUSEN³⁾ for the width of the boundary-layer of the thermal flow on a vertical plate.

When the density differences in the motion are appreciable the flow is no longer 'similar'. This is because the second term in the square brackets cannot now be ignored. [The term referred to, namely

$$\frac{2}{135} \cdot \frac{\alpha^2}{g} \frac{1}{x^{3/5}} H,$$

is equal to $(\varrho_0/\varrho - 1)$.] As Figures 1 and 2 show, the greater the density differences the greater the width of the mixing region. For example the half-width of the mixing region when $\varrho_{avis}/\varrho_0 = 1/2$ is about double the half-width of the mixing region when ϱ_{avis}/ϱ_0 is negligible. Now the density differences depend on the flux of heat convected from the wire. Thus the greater the flux of heat from the wire the greater the width of the mixing region, provided other conditions remain unchanged.

$\sigma \cdot \xi^2$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$F_1(z)$	0.610	0.563	0.514	0.463	0.410	0.354	0.295	0.232	0.163	0.087	0
$H_1(z)$	0.094	0.055	0.008	-0.025	-0.052	-0.071	0.083	-0.082	0.071	-0.047	0

The data presented in Figures 1 and 2 are obtained by approximating to F and H by the first two terms of the series (16) respectively. When $\sigma = 0.733$, the error is expected to be only a few per cent. This estimate is based on the assumption that F_2 and H_2 and subsequent terms are of the same order of magnitude as F_1 and H_1 on the axis of the flow.

I am grateful to Professor D. C. PACK for the interest he has taken in this work.

Zusammenfassung

Eine exakte Lösung für die natürliche Konvektion von einem langen horizontalen Draht wird gegeben, selbst für den Fall grosser Unterschiede in der Dichte. Wenn die Unterschiede in der Dichte klein sind, dann ist die Strömung eine «ähnliche».

(Received: February 2, 1959.)

³⁾ E. POHLHAUSEN in a paper by E. SCHMIDT and W. BECKMANN, *Forsch. Ing.-Wes.* 1, 391 (1930). — This paper is quoted by SCHLICHTING, *Boundary Layer Theory*, 1st ed. (Pergamon Press, London 1955).

A Quasi-Iterative Method for Computing Interface Temperature Distributions¹⁾

By FREDERICK F. LING, Troy, New York, USA²⁾

1. Introduction

In the study of friction and wear, the latter case especially, it is of importance to know the interface temperature distribution of the surfaces in sliding contact. Such calculation is known to be difficult. In what follows, a simple model of bodies in sliding contact is proposed for the experimentalists and a relatively simple method is developed for the computation of the interface temperature. The method is applicable to more complex models.

Given a stationary semi-infinite solid with a finite plane area ($2l \times 2b$) protruding slightly above a plane surface of the solid. When another semi-infinite solid is slid steadily across this protruding area, temperature rise due to friction results. If radiation loss across the boundary is neglected, the problem of finding the interface temperature rise can be formulated as follows:

The steady state temperature $u(x, y, z)$ for a point in a semi-infinite solid (constant thermal conductivity k_1) with zero initial temperature, and zero temperature gradient normal to the boundary except over a finite area ($-l \leq x \leq l, -b \leq y \leq b, z = 0$), where the rate of heat input per unit area is $q_1(x, y)$, can be expressed as^{[1]³⁾}

$$u(x, y, z) = \frac{1}{2\pi K_1} \int_{-l}^l \int_{-b}^b q_1(\xi, \eta) \frac{d\xi d\eta}{r}, \quad (1)$$

where

$$r = [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2]^{1/2}.$$

The quasi-stationary temperature $v(x, y, -z)$ for a semi-infinite solid (constant thermal conductivity K_2 and diffusivity α_2) with zero initial temperature, and zero temperature gradient normal to the boundary except over a finite area ($-l \leq x \leq l, -b \leq y \leq b, z = 0$), which moves with a uniform

¹⁾ The research was supported by the United States Air Force Office of Scientific Research, Air Research and Development Command, under Contract No. AF 49(638)-67.

²⁾ Rensselaer Polytechnic Institute, Department of Mechanics.

³⁾ Numbers in brackets refer to References, page 473.

velocity V in the direction of x , can be expressed as [1]

$$v(x, y, z) = \frac{1}{2\pi K_2} \int_{-l}^l \int_{-b}^b \{q_2(\xi, \eta) e^{-V[r-(x-\xi)]/2a_2}\} \frac{d\xi d\eta}{r}, \quad (2)$$

where x here denotes the Lagrangian coordinate with respect to the centroid of the moving heat source, $q_2(x, y)$ is the rate of heat input per unit area.

If the heat generated at the interface is $q_0(x, y)$ then

$$q_1(x, y) + q_2(x, y) = q_0(x, y) \quad (3)$$

and the interface temperature is usually expressed by the equivalence of equations (1) and (2) for $-l \leq x \leq l$, $-b \leq y \leq b$ and $z = 0$

$$u(x, y, 0) = v(x, y, 0). \quad (4)$$

From equations (3) and (4), a singular integral equation in the unknown $q_1(x, y)$ is resulted. Once the inversion is obtained, i. e. $q_1(x, y)$ found, either equation (1) or (2) can be used to compute the interface temperature.

Numerical methods have been applied to similar problems. Also trial and error schemes have been used to find $q_1(x, y)$. By far most of the approximation methods employed have sprung from BLOK'S original work [2] which utilizes the following idea: For q_0 independent of x and y , assume q_1 and q_2 are independent of x and y . Integrate equations (1) and (2) to give $u(x, 0, 0)$ and $v(x, 0, 0)$ in terms of q_1 ($q_2 = q_0 - q_1$). Then arbitrarily equating $u(x, 0, 0)_{\max} = v(x, 0, 0)_{\max}$; this provides an additional equation for the unknown q_1 . Using the value of q_1 thus found, $u^*(x, y, 0)$ and $v^*(x, y, 0)$ are computed, where u^* and v^* refer to u and v for q_1 and q_2 equal to constants. The probable interface temperature, BLOK argued, must lie between u^* and v^* , and therefore can be sketched in. This leaves much to be desired, especially if a more accurate estimate of the interface temperature distribution is sought.

In section 2 A an iterative method is outlined for the computation of the interface temperature. Section 2 B gives a quasi-iterative method which furnishes the advantage of a faster convergence of the process than that outlined in section 2 A. Section 2 C shows the exact solution to the problem for the asymptotic case $R \ll 1$, where R is the Peclet number associated with the problem. Moreover, the iterative process of section 2 A is further justified in a quantitative manner for $R \ll 1$. Section 2 D shows the asymptotic case $R \gg 1$, where the iterative process takes on a simpler form than the general case outlined in 2 A. Section 2 E describes a sample calculation.

Section 3 shows that the interface temperature problem can be used as an analogue problem for inverting a class of singular integral equations of the first kind.

2. Method of Solution for $l \ll b$

A. Iterative Method

In subjecting similar problems to digital computation, CHAO and TRIGGER[3] have found that for $l \ll b$ and q_0 independent of x and y the interface temperature is essentially independent of y (the exception being near $y = \pm b$). This suggests that q_1 and q_2 are essentially independent of y for this case. In what follows it is shown that, based on the assumption that q_1 and q_2 are independent of y , $u(x, 0, 0) - v(x, 0, 0)$ can be evaluated analytically for $l \ll b$ and q_0 independent of x and y . For simplicity, let $K_1 = K_2 = K$. Also let $q_1 = q_0 m(x)$. From equation (3), $q_2 = q_0 [1 - m(x)]$. Define $f = \pi K u(x, 0, 0)/q_0 l$, $s = x/l$, $t = \xi/l$, $\zeta = \eta/l$ and $\beta = b/l$.

Equation (1) becomes

$$f(s) = \int_{-1}^1 m(t) F(s, t) dt, \quad (5)$$

where

$$F(s, t) = \ln \beta \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{s-t}{\beta} \right)^2} \right] - \ln |s-t|.$$

and

$$F(s, t) \simeq \ln 2 \beta - \ln |s-t| \quad \text{for} \quad \frac{b}{l} \gg 1.$$

Furthermore, define $g = \pi K v(x, 0, 0)/q_0 l$ and $R = v l/2 \alpha$, equations (2) and (3) yield

$$g(s) = \int_{-1}^1 \mu(t) G(s, t) dt, \quad \mu(t) = 1 - m(t), \quad (6)$$

where

$$G(s, t) = e^{R(s-t)} I(s-t; R).$$

The function

$$I(s-t; R) = \int_0^\beta \frac{e^{-R \sqrt{(s-t)^2 + \zeta^2}} d\zeta}{\sqrt{(s-t)^2 + \zeta^2}}$$

for certain values of the parameter R have been tabulated in the literature [8]; and for large values of R , it can be approximated by Hankel function of the zeroth order.

Equating equations (5) and (6) as required at the interface for continuity

$$\int_{-1}^1 F(s, t) dt = \int_{-1}^1 m(t) [F(s, t) + G(s, t)] dt. \quad (7)$$

Equation (7) is a singular integral equation of the first kind with a logarithmic singularity. The method of inverting this type of equation as outlined by CARLEMAN [4] and PEARSON [5] is impractical if one is interested in the solution for a wide range of the parameter R . For instance, PEARSON's method calls for the expansion of the non-singular parts of the kernel in polynomials of $(s - t)$; and he concluded that the time required to write out solution is about $2n^3h$, where n is the order of higher of the polynomials representing the non-singular parts of the kernel. However, the existing method will be useful in inverting equation (5); the result can then be inserted in equation (6), which becomes a singular integral equation of the second kind. Thus $f(s) = g(s)$ at the interface can be found by iteration.

For $\beta \gg 1$, as stated above, $F(s, t) = \ln 2\beta - \ln |s - t|$. Equation (5) can be inverted [4]

$$m(s) = \frac{1}{\pi \sqrt{1-s^2}} \left[\frac{A^*(f)}{1+a} - \frac{a L^*(f')}{1+a} + L(f') \right] \equiv M(f), \quad (8)$$

where

$$a = \frac{\ln 2\beta}{\ln 2}, \quad A^*(z) = \frac{1}{\pi \ln 2} \int_{-1}^1 \frac{z(t) dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

$$L(z) = \frac{-1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2} Z(t) dt}{t-s}, \quad L^*(z) = \int_{-1}^1 \frac{L ds}{\pi \sqrt{1-s^2}}.$$

The problem of $f(s) = g(s)$ for $-1 \leq s \leq 1$ [equation (7)] can be resolved by the following process:

Arbitrarily let $m_0(s)$, the initial trial value of $m(s)$, be equal to zero, then the initial trial value of $g(s)$

$$g_0(s) = \int_{-1}^1 G(s, t) dt$$

and the resulting value of $m(s)$

$$m_1(s) = M(g_0),$$

where $M(g_0)$ is the linear integral operator [equation (8)] operating on $g_0(s)$. The first iterated value of $g(s)$

$$g_1(s) = \int_{-1}^1 [1 - M(g_0)] G(s, t) dt = g_0(s) - T^{(1)}(g_0),$$

where

$$T^{(1)} = \int_{-1}^1 M(g_0) G(s, t) dt$$

after the n -th iteration

$$g_n(s) = g_0(s) + \sum_{r=1}^n (-1)^r T^{(r)}(g_0), \quad (9)$$

where

$$T^{(n)}(g_0) = \int_{-1}^1 M[T^{(n-1)}(g_0)] G(s, t) dt.$$

It may be seen from the kernels $F(s, t)$ and $G(s, t)$ that, although the former is symmetric and the latter skew-symmetric, the integral operator

$$P[z(s)] \equiv \int_{-1}^1 z(t) F(s, t) dt$$

is always greater than the operator

$$Q[z(s)] \equiv \int_{-1}^1 z(t) G(s, t) dt$$

for all values of $-1 \leq s \leq 1$. The extent of the difference between P and Q depends on s and the parameter R . Of course $P = Q$ when $R = 0$.

In view of the above, $g_0 = Q(1)$ and $|M(g_0)| = |P^{-1}(g_0)|$, P^{-1} being the inverse of P , is less than $1/(\sqrt{1-s^2})$ for $-1 \leq s \leq 1$. The factor $(1-s^2)^{-1/2}$ is associated with the root singularity at $s = \pm 1$. In other words it may be demonstrated that $|T^{(1)}(g_0)| < |g_0|$ for $-1 < s < 1$ and $R \neq 0$. Moreover, it may be demonstrated that

$$|T^{(n)}(g_0)| < \dots < |T^{(1)}(g_0)| < |g_0|.$$

Thus equation (9) constitutes an alternating Neumann series whose convergence is assured.

B. Quasi-Iterative Method

The rate of convergence of the above may be slow, in which case the following quasi-iterative scheme will always speed up the iterative process described in section 2 A such that no more than one quasi-iteration would be necessary in most cases.

It is clear, that the closer the initial value of the trial function g_0^* , the more rapid would be the convergence process. Also, if there is an a priori method of finding a close-approximation of the initial trial function g_0^* , the same method

can be used between every successive iterations. After BLOK [2], define

$$f_m(s) = \int_{-1}^1 F(s, t) dt \quad [\text{equation (5) with } m = 1]$$

and

$$g_m(s) = \int_{-1}^1 G(s, t) dt \quad [\text{equation (6) with } \mu = 1].$$

Then define

$$\lambda = \frac{[g_m(s)]_{\max}}{[f_m(s)]_{\max}}.$$

By assuming m and μ to be constants and matching only the maximum temperatures of the mating bodies, m and μ may be found. From equations (5) and (6)

$$m[f_m(s)]_{\max} = (1 - m)[g_m(s)]_{\max}$$

or

$$m = \frac{\lambda}{1 + \lambda} \quad \text{and} \quad \frac{1}{1 + \lambda}.$$

Thus

$$f_B(s) = \frac{\lambda}{1 + \lambda} f_m(s) \quad \text{and} \quad g_B(s) = \frac{1}{1 + \lambda} g_m(s)$$

must envelope, BLOK suggested, the true value of $f(s) = g(s)$ for $-1 \leq s \leq 1$ and the latter can be interpreted.

Define g_0^* , the initial trial value of g for the quasi-iterative method, to be $(f_B + g_B)/2$ arbitrarily knowing that this value would be much closer to the true value than g_0 in the last section. Using equation (8)

$$m_0^* = M(g_0^*)$$

and using equation (6)

$$g^*(s) = g_0^* - T^{(1)}(g_0^*),$$

where, as before,

$$T^{(n)} = \int_{-1}^1 M[T^{(n-1)}] G(s, t) dt.$$

Similar to equation (9)

$$g_n^*(s) = g_0^* + \sum_{r=1}^n (-1)^r T^{(r)}(g_0^*). \quad (10)$$

Very approximately, $T^{(1)} = \lambda g_0$, $T^{(2)} = \lambda^2 g_0 \cdots T^{(n)} = \lambda^n g_0$. Therefore

$$g_n^*(s) = g_0^* \sum_{r=0}^n (-1)^r \lambda^r.$$

Note

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^n (-1)^r \lambda^r$$

converges to $1/(1 + \lambda)$.

Define

$$g_0^{**} = g_0^* + \frac{g_1^* - g_0^*}{1 + \lambda}.$$

This first quasi-iterative value of g_0^{**} just defined may be shown to be much closer to the true value than g_0^* . Similarly a second quasi-iteration may be used to give an a posteriori check on the rate of convergence of the process. Of course

$$g_0^{***} = g_0^{**} + \frac{g_1^{**} - g_0^{**}}{1 + \lambda}.$$

C. Asymptotic Solution $R \ll 1$

For $R \ll 1$, the problem of finding $f(s) = g(s)$ [equation (7)] is reducible to

$$F(s) = \int_{-1}^1 \mu(t) [1 + k(s - t)] (\alpha - 2k\beta - \ln|s - t|) dt, \quad (11)$$

where

$$F(s) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (\alpha - \ln|s - t|) dt, \quad \alpha = \ln 2, \text{ and } k = \frac{R}{2}.$$

In the manner of PEARSON [5] equation (11) may be inverted exactly and equation (5) or (6) used to compute $f(s) = g(s)$ for $-1 \leq s \leq 1$. To the first order of k ,

$$\mu(s) = \frac{1}{\pi \sqrt{1 - s^2}} \left\{ \frac{A^*(F)}{1 + a} - \frac{a L^*(F')}{1 + a} + L(F') \right. \\ \left. + k \left[\frac{b + (1 + a - 2a^2)s}{(1 + a)^2} A^*(F) - \frac{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \ln 2 & 1 \end{pmatrix}}{1 + a} B^*(F) \right. \right. \\ \left. \left. - L(F) + \frac{b - a(1 + a)s}{(1 + a)^2} L^*(F') + \frac{a}{1 + a} L^{**}(F') \right] \right\}, \quad (12)$$

where

$$a = \frac{\ln 2 \beta}{\ln 2}, \quad b = \frac{2 \beta}{\ln 2}, \quad B(z)^* = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{z(s) ds}{1-s^2}, \quad L(z)^{**} = \int_{-1}^1 \frac{s L}{\pi \sqrt{1-s^2}} ds$$

and the other integral operators are as defined in section 2 A.

The complexity of equation (12), which is only accurate to the first order of k , justify the use of an approximate method in section 2 B. The fact that, for $R \ll 1$, both equations (5) and (6) possess exact inverses makes it possible to study closer the convergence property of the iterative process outlined in section 2 A and 2 B. Equation (5) has an inverse $m(s) = M(f)$, equation (8). It may be shown that equation (6) possesses an inverse for $R \ll 1$

$$\mu(s) = M(g) + N(g), \quad (13)$$

where

$$N(g) = \frac{R}{\pi \sqrt{1-s^2}} \left\{ \frac{b + (1+a-2a^2)s}{(1+a)^2} A^*(g) - \frac{\left(\frac{1}{\ln 2} - 1\right)}{1+a} B^*(g) - L(g) + \frac{b-a(1+a)s}{(1+a)^2} L^*(g') + \frac{a}{1+a} L^{**}(g') \right\}.$$

Let

$$g_0 = \int_{-1}^1 G(s, t) dt = g + \varepsilon_0,$$

where g is the exact value of $g(s) = f(s)$ and ε_0 is the error in the initial trial. Using equation (8),

$$m_0 = m + M(\varepsilon_0),$$

where m is the correct value of m associated with g . Using equation (6)

$$\left. \begin{aligned} g_1 &= g_0 + \varepsilon_1 = \int_{-1}^1 [1 - m - M(\varepsilon_0)] G(s, t) dt \\ &= g - \int_{-1}^1 M(\varepsilon_0) G(s, t) dt, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

where ε_1 is the error after the first iteration.

Using equations (13) and (14)

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= - \int_{-1}^1 [M(\varepsilon_0) + N(\varepsilon_0) - N(\varepsilon_0)] G(s, t) dt \\ &= -\varepsilon_0 + T^{(1)}(\varepsilon_0), \end{aligned}$$

where

$$T^{(1)}(\varepsilon_0) = \int_{-1}^1 N(\varepsilon_0) G(s, t) dt.$$

It is seen that $N(g)$ is of the order of R and that it is demonstrably positive for $-1 \leq s \leq 1$. Similarly

$$\varepsilon_n = -\varepsilon_{n-1} + T^{(1)}(\varepsilon_{n-1}).$$

Thus the convergence of the process is assured. Similar treatment can be made for the quasi-iterative case.

D. Asymptotic Solution $R \gg 1$

The differential equation corresponding to equation (6) is

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial v}{\partial (x/V)} \quad (15)$$

recalling g corresponds to $v(x, 0, 0)$.

For R large BLOK has found that $\partial^2 v / \partial x^2$ and $\partial^2 v / \partial y^2$ are essentially zero. Thus equation (15) is approximately

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial v}{\partial (x/V)}. \quad (16)$$

The integral representation of the solution to the boundary-value problem governed by equation (16), which holds in a semi-infinite solid with zero initial temperature and zero temperature gradient normal to the boundary except over a strip $-l \leq x \leq l$, is

$$g(s) = \int_{-1}^s \frac{\mu(t) dt}{\sqrt{\frac{2R}{\pi} (s-t)}} \quad (-1 \leq s \leq 1), \quad (17)$$

where the dimensionless quantities g , R etc. are as defined in section 2 A.

Equation (17) is ABEL's integral equation whose inverse is

$$\mu(s) = k \int_1^s \frac{g'(t) dt}{\sqrt{s-t}}, \quad (18)$$

where $k = \sqrt{2R/\pi^3}$.

For all practical cases, where equation (17) applies, $k < 1$. Equation (5) may be written as

$$f(s) = \int_{-1}^1 [1 - \mu(t)] (\alpha - \ln |s - t|) dt. \quad (19)$$

Combining equations (18) and (19) for $-1 \leq s \leq 1$,

$$f(s) = f_0(s) - k \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^s \frac{f(t') dt'}{\sqrt{t - t'}} \right) (\alpha - \ln |s - t|) dt, \quad (20)$$

where

$$f_0(s) = \int_{-1}^1 (\alpha - \ln |s - t|) dt.$$

Equation (20) is a singular integral equation of the second kind; if $k < 1$ and the integral in equation (20) is bounded, the solution is expressible in the form of an alternating Neumann series. In other words,

$$f_n(s) = f_0(s) + \sum_{r=1}^n (-k)^r T^{(r)}(f_0),$$

where

$$T^{(r)} = \int_{-1}^1 \left\{ \int_{-1}^t \frac{\frac{d}{dt'} [T^{(r-1)}(f_0)] dt'}{\sqrt{t - t'}} \right\} (\alpha - \ln |s - t|) dt.$$

E. Example

An example is carried out for $R = 1$ and $\beta = 4$. The case of $R = 1$ is chosen for illustration because on the one hand, the solution cannot be reached accurately by the asymptotic solutions for $R \ll 1$ or $R \gg 1$, and on the other hand the Kernel $G(s, t)$ cannot be approximated by the Hankel function. Thus the case of $R = 1$ represents a case in the most difficult range of the parameter R . The quasi-iterative procedure of section 2 B is followed. The integrals are evaluated with the aid of an IBM 650 digital computer. Integrations near the neighborhood of singular points are evaluated analytically while integration over the non-singular portions are evaluated according to SIMPSON's rule. The over-all computational accuracy is estimated at $1\frac{1}{2}\%$ at the worst locations.

Figure 1 shows $g_0^* = (f_B + g_B)/2$, where f_B and g_B are as defined in section 2 B. g_0^{**} and g_0^{***} are the result of the first and second quasi-iterations respectively. Figure 2 shows a plot of f_B , g_B and g_0^{***} . It may be noted that f_B and g_B do not envelop g_0^{***} at all points.

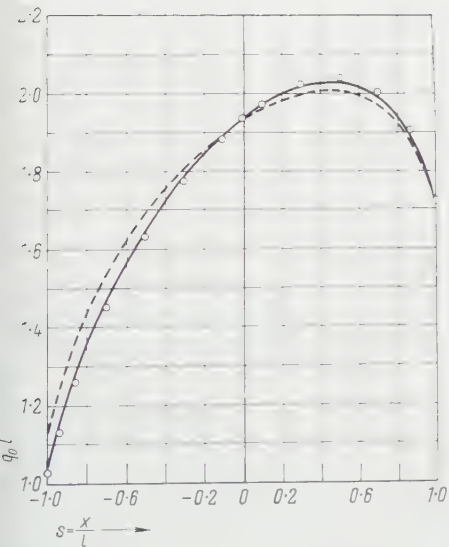


Figure 1

Distribution of interface temperature for $R = 1$, $\beta = 4$. — g_0^* first trial; $\circ \circ \circ g_0^{**}$ second trial; — g_0^{***} final value.

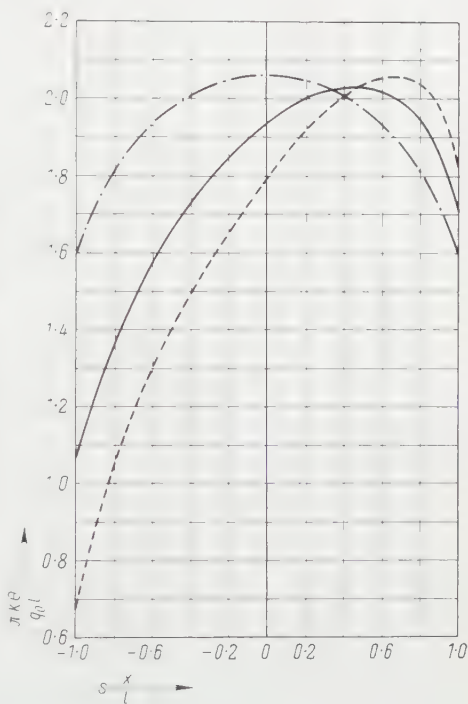


Figure 2

Temperature distribution g_0^{***} shown together with Blok's bounds g_B and t_B . — g_B ; - - - t_B ; — g_0^{***} .

3. Other Applications

The interface temperature problem may be used as an analogue problem for inverting a class of singular integral equations of the first kind as a result of the above analysis. Given

$$h(s) = \int_a^b m(t) H(s, t) dt, \quad (21)$$

where $h(s)$ is continuous and $H(s, t)$ has an inherent singularity at $s = t$, a and b are finite. The inversion of this type of equation have been discussed (see for instance [7]). The following method will be quite generally useful and simple to apply if (1) the kernel $H(s, t)$ can be split into two parts, $F(s, t)$ and $G(s, t)$, such that $F(s, t)$ possesses an exact inverse; (2) numerical evaluation of a set of integrals are permitted; and (3) the particular $H(s, t)$ are so split into $F(s, t)$ and $G(s, t)$ that certain convergence property is satisfied.

Let

$$H(s, t) = F(s, t) + G(s, t), \quad f(s) = \int_a^b \mu(t) F(s, t) dt, \quad g(s) = \int_a^b m(t) G(s, t) dt,$$

$p(t) = P(h)$, the inverse of the equation

$$h(s) = \int_a^b p(t) F(s, t) dt.$$

Then equation (21) is equivalent to the following problem:

$$f(s) = g(s), \quad p(s) = \mu(s) + m(s) \quad (a \leq s \leq b). \quad (22)$$

This equivalence is easily seen because equations (22) mean

$$f(s) = \int_a^b [p(t) - m(t)] F(s, t) dt = g(s) = \int_a^b m(t) G(s, t) dt$$

or

$$\int_a^b p(t) F(s, t) dt = \int_a^b m(t) [F(s, t) + G(s, t)] dt$$

and by the definition of $p(t)$ and $H(s, t)$,

$$h(s) = \int_a^b m(t) H(s, t) dt.$$

To invert equation (22), let

$$\begin{aligned} g(s) &= \int_a^b [p(t) - \mu(t)] G(s, t) dt \\ &= \int_a^b p(t) G(s, t) dt - \int_a^b \mu(t) G(s, t) dt. \end{aligned}$$

But $p(t) = P(h)$, $\mu = P(f)$ and $P(f) = P(g)$ as required by the problem, therefore

$$g(s) = q(s) - \int_a^b P(g) G(s, t) dt, \quad (23)$$

where

$$q(s) = \int_a^b P(h) G(s, t) dt.$$

Equation (23) can be solved by iteration. Of course the convergence property has to be examined in each case. Once g is found to any degree of accuracy desired

$$\mu(s) = P(g), \quad m(s) = p(s) - \mu(s).$$

Problems which could easily be treated in the above fashion, among others, are the Rijke-tube problem in fluid mechanics [6] and the welding problem in which the heat distribution of a travelling heat source is sought for a given temperature profile.

4. Conclusion

For the proposed model of sliding contact, temperature distribution of the interface due to friction may be calculated as accurately as desired. The quasi-iterative method reduces the number of necessary quasi-iteration to no more than one in most cases. An example is given to show this point.

The method may be applied to more complex models and extensions can easily be made for the proposed model to accommodate a general heat input distribution due to friction. Moreover, the factor $(1 - \lambda^2)^{1/2}$ always occurs in the distribution function of the singular integral equation with logarithmic singularity; by a suitable transformation this factor may be cancelled [6]. This would simplify computation for those who prefer using digital computers. In other words the uncertainty at an end point experienced by CHAO and TRIGGER can be removed.

Although the nature of the method is iterative, the labor involved is less than that required for numerical solution, given a degree of computational accuracy.

By analogy the method may be used to invert a class of singular integral equations.

Acknowledgments

Thanks are due to Professors HIRSH COHEN and RICHARD DiPRIMA for their helpful discussions and to Mr. C. W. NG for working out the example.

REFERENCES

- [1] H. S. CARSLAW and J. C. JAEGER *Conduction of Heat in Solids* (Oxford University Press, London 1957).
- [2] H. BLOK, Inst. Mechanical Engineers, Proc. General Discussion on Lubrication and Lubricants 1, 222 (1937).
- [3] B. T. CHAO and K. J. TRIGGER, Trans. Amer. Soc. mech. Engrs. 80, 311 (1958).
- [4] T. CARLEMAN, Math. Z. 15, 111 (1922).
- [5] C. E. PEARSON, Quart. appl. Math. 15, 203 (1957).
- [6] R. C. DiPRIMA, US Navy Department Report, Contract No. N5-OR1-07666 (Harvard University, June 1956).

- [7] W. R. SEARS, *General Theory of High Speed Aerodynamics* (Princeton University Press, 1954).
 [8] *Tables of Generalized Exponential Integrals and Functions* (Harvard University Mathematical Tables, vol. XXI, 1949).

Zusammenfassung

Es wird ein einfaches Modell für gleitenden Kontakt vorgeschlagen, zur Ermittlung der Verteilung des Verschleisses, die ihrerseits mit der Verteilung der Temperatur längs der Gleitfläche zusammenhängt. Dabei wird eine relativ einfache Methode entwickelt für die Berechnung der Verteilung der Gleitflächentemperatur. Die Methode ist im wesentlichen iterativ; im besondern verringert die hier entwickelte quasi-iterative Methode die Anzahl der Quasi-Iterationen beträchtlich – in den meisten Fällen auf nicht mehr als eine. Dieses Verhalten wird an einem Beispiel erläutert. Obwohl die dargestellte Methode iterativ ist, erfordert sie weniger Rechenarbeit, als für die numerische Lösung des Problems bei vorgeschriebener Genauigkeit notwendig wäre.

Es wird auch gezeigt, dass das Modell als Analogon für die Inversion einer Klasse von singulären Integralgleichungen erster Art dienen kann.

(Received: January 20, 1959.)

Energy Levels for the Coulomb Potential with Cut-off

By ABD EL SADEK EL MELIGY and MAHMOUD AHMED EL SHERBINI,
 Alexandria, Egypt¹⁾

Introduction

The absorption band spectrum of alkali-halide crystals has been attributed to the excitation of electrons trapped in holes formed by the removal of negative ions. For the potential field of such electrons TIBBS [3]²⁾ proposed a Coulomb field with a horizontal cut-off which is represented by the potential function

$$V = -\frac{e^2}{K_0 r_0} \quad (r < r_0), \quad V = -\frac{e^2}{K_0 r} \quad (r > r_0), \quad (1)$$

where r_0 is the radius of the hole and K_0 is the dielectric constant. He computed the electronic energy levels by numerical integration methods. WANNIER [4], however, has shown that the problem could be solved analytically, though not rigorously, for energy levels lying very high above the potential energy in the hole. The object of this work is to present a rigorous solution valid for low as well as high energy levels. This has been achieved by using exact expansions for the wave functions.

¹⁾ Faculty of Science, University of Alexandria.

²⁾ Numbers in brackets refer to References, page 477.

The Wave Functions

The radial wave equation for the potential field (1) is

$$\frac{d^2 F}{dr^2} + \left(-\frac{\alpha^2}{k^2} + \frac{2\alpha}{r_0} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) F = 0 \quad (r < r_0), \quad (2)$$

$$\frac{d^2 F}{dr^2} + \left(-\frac{\alpha^2}{k^2} + \frac{2\alpha}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) F = 0 \quad (r > r_0), \quad (3)$$

where $\alpha = m e^2 / K_0 \hbar^2$ and the energy $E = -\hbar^2 \alpha^2 / 2 m k^2$; k is our unknown which has to be determined.

The solution of equation (2), which vanishes at the origin, is

$$F_1 = x J_{l+1/2} \left[\frac{x^2}{2x_0} \left(1 - \frac{x_0^2}{16k^2} \right)^{1/2} \right], \quad (4)$$

and the solution of equation (3), which vanishes at infinity, can be written as

$$F_2 = x f_{k,l+1/2}(x) - x \tan(\pi k) g_{k,l+1/2}(x), \quad (5)$$

where

$$x = 2(2\alpha r)^{1/2},$$

$$f_{k,l+1/2}(x) = 2x^{-1} k^{l+1} I_{k,l+1/2} \left(\frac{x^2}{4k} \right) \quad (7)$$

and

$$g_{k,l+1/2}(x) = -2x^{-1} \frac{k^{l+1} \Gamma(k-l)}{\Gamma(k+l+1)} N_{k,l+1/2} \left(\frac{x^2}{4k} \right); \quad (8)$$

x_0 being the value of x at $r = r_0$ and the functions $I_{k,m}(z)$ and $N_{k,m}(z)$ being the confluent hypergeometric functions [1]. The functions F_1 and F_2 represent the appropriate wave functions of the electron in the potential field (1).

To evaluate the functions $f_{k,m}(x)$ and $g_{k,m}(x)$ as well as their derivatives it is necessary to derive their recurrence formulae. Applying the recurrence formulae given by POWELL [2] for the Coulomb wave functions, one can deduce the following formulae for the function $f_{k,m}(x)$:

$$\left. \begin{aligned} \left(m - \frac{1}{2} \right) \left[\left(m + \frac{1}{2} \right)^2 - k^2 \right] f_{k,m+1}(x) &= \left(m + \frac{1}{2} \right) k^2 f_{k,m-1}(x) \\ &+ 2mk^2 \left(1 - \frac{8m^2-2}{x^2} \right) f_{k,m}(x), \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx} f_{k,m}(x) &= \left[\frac{2m}{x} - \frac{x}{2(2m+1)} \right] f_{k,m}(x) \\ &- \frac{x}{2(2m+1)} \left[1 - \frac{(2m+1)^2}{4k^2} \right] f_{k,m+1}(x). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Similar formulae hold for the other function $g_{k,m}(x)$ and its derivative.

Expansions of the Wave Functions

For high energy levels, WANNIER has applied the zero energy limiting formulae, i. e. the asymptotic values when k tends to infinity, which are as follows:

$$f_{k,m}(x) \sim J_{2m}(x), \quad (11)$$

$$g_{k,m}(x) \sim -k^{2m} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - m + k\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + m + k\right)} Y_{2m}(x), \quad (12)$$

where J_{2m} and Y_{2m} are the Bessel functions of the first and second kind respectively.

Now for exact representation, one can extend the result (11) to finite values of k by assuming the following expansion:

$$f_{k,m}(x) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v x^v J_{2m+v}(x). \quad (13)$$

On equating the coefficients of powers of x on both sides of this equation, it is found that $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = (2m+1)/32k^2$, $a_3 = -1/96k^2$ and in general, for $v \geq 3$,

$$32k^2 v a_v = 2(2m+v-1) a_{v-2} - a_{v-3}. \quad (14)$$

On the other hand, it has not been possible to extend the result (12) to finite values of k . However, one can express $g_{k,m}(x)$ in terms of $f_{k,m}(x)$ functions by applying the expansion of $N_{k,m}(z)$ given by MELIGY [1]. Thus the exact representation of $g_{k,m}(x)$ takes the following form:

$$\left. \begin{aligned} \pi g_{k,m}(x) = & -f_{k,m}(x) \left[\frac{1}{2} \psi\left(\frac{1}{2} + m + k\right) + \frac{1}{2} \psi\left(\frac{1}{2} - m + k\right) \right. \\ & \left. - \psi(2m) - \psi(2m+1) + \log \frac{x^2}{4k} \right] \\ & + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}}{\Gamma(2m)} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2k}\right)^v}{v! (2m+v)^2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}v + k\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}v + k\right)} f_{k,v/2}(x) \\ & + k^{2m} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - m + k\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + m + k\right)} \Gamma(2m+1) \left(\frac{x}{2}\right)^{-2m} \\ & \times \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2k}\right)^v}{v! (2m-v)^2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}v + k\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}v + k\right)} f_{k,v/2}(x), \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

where ψ is the logarithmic derivative of the gamma function and the term $r = 2m$ in the last series is to be discarded. The function $g_{k,m}(x)$ could be easily calculated from (15) if one computes the functions $f_{k,r/2}(x)$ from (13) and the recurrence formula (9).

Evaluation of the Energy Levels

The values of k are determined by equating, at $x = x_0$, the logarithmic derivatives with respect to x of the functions F_1 and F_2 in equations (4) and (5). Thus, for s-states we have

$$\tan \pi k = \frac{A f_{k,1/2}(x) + (1 - k^{-2}) f_{k,3/2}(x)}{A g_{k,1/2}(x) + (1 - k^{-2}) g_{k,3/2}(x)} \quad (16)$$

and for other states

$$\tan \pi k = \frac{f_{k,l-1/2}(x) + B f_{k,l+1/2}(x)}{g_{k,l-1/2}(x) + B g_{k,l+1/2}(x)}, \quad (17)$$

where

$$A = 1 - \frac{8}{x^2} + \frac{8}{x^2} y \cot y, \quad B = 1 - \frac{8l}{x^2} y \frac{J_{l-1/2}(y)}{J_{l+1/2}(y)},$$

$$y = \frac{x}{2} \left(1 - \frac{x^2}{16k^2} \right)^{1/2}.$$

x_0 has been replaced by x for simplicity. Equations (16) and (17) do not contain the unknown k explicitly. However, their right-hand sides are slowly varying functions of k and so the equations can be solved for k by successive approximations. Starting with $k = n$ on the right, where n is the principal quantum number, two operations are sufficient to give an accurate value for k . For example, in the case where $x = 2.62$, the value of k for the 1s state is 1.161 which is considered to be more accurate than the value given by TIBBS (1.155) or that given by WANNIER (1.153).

REFERENCES

- [1] A. S. MELIGY, Nuclear Physics 7, 610 (1956).
- [2] J. L. POWELL, Phys. Rev. 72, 626 (1947).
- [3] S. R. TIBBS, Trans. Faraday Soc. 35, 1471 (1939).
- [4] G. H. WANNIER, Phys. Rev. 64, 358 (1943).

Zusammenfassung

Die Absorptionsbanden der Alkalihalogenidkristalle werden auf Elektronen zurückgeführt, die an leeren Gitterstellen eingefangen sind. Als Feld wird ein bei kleinen Distanzen horizontal abgeschnittenes Coulomb-Feld angesetzt. Die Eigenwerte werden im ganzen Energiebereich aus einer genauen Reihenentwicklung der Lösungen der Schrödinger-Gleichung bestimmt.

(Received: February 10, 1959.)

Analysis of Turbulent Boundary Layers with Zero Pressure Gradient

By JOHN R. PHILIP, Pasadena, California, USA^{1,2)}

1. Boundary Layer Equations

We are concerned here with the boundary layer developed along a flat plate of effectively zero thickness, with the leading edge of the plate at $x = 0$ and the plate lying along the x -axis. The free stream velocity of the incompressible fluid, U , is directed parallel to the x -axis. We denote by y the ordinate normal to the plate, and confine our attention to the region $y \geq 0$. We here assume that the boundary layer is turbulent right from the leading edge.

Let u, v be the components of mean fluid velocity in the x and y -directions. If then, we equate for any volume element of the fluid, $dx \cdot dy$, the mean rate of gain of momentum in the x -direction to the x -resultant of the shear forces, and use the continuity requirement,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1.1)$$

we obtain

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + \dot{v} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial y}, \quad (1.2)$$

where τ is the shear stress and ϱ is the fluid density. Equation (1.2) also follows immediately by analogy with the equations for the laminar boundary layer due to PRANDTL [1]³⁾. Now, recognizing the turbulent and viscous components of the shear stress, we may write

$$\frac{\tau}{\varrho} = (K + \nu) \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (1.3)$$

where K is the eddy viscosity and ν the kinematic viscosity. Now

$$K = l^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|, \quad (1.4)$$

¹⁾ Address for 1958: California Institute of Technology. Permanent address: Commonwealth Scientific and Industrial Research Organization, Canberra, Australia.

²⁾ Supported in part by a grant from the Rockefeller Foundation RF 56160.

³⁾ Numbers in brackets refer to References, page 501.

where l is the mixing length as conceived by PRANDTL [2]. In the present paper we introduce, and explore the consequences of, the hypothesis that

$$l = k y^m, \quad (1.5)$$

where k and m are to be discussed in detail later. At this point we need only indicate that k is positive, non-zero, and a function of *relative* distance from the plate across the boundary layer and that m is a constant.

(This introduction of a mixing-length formulation is quite empirical, and finds justification solely in the unified treatment, and the agreement with experiment, we are able to present later in this paper, and in subsequent work. Note that we could have introduced as a general expression for the turbulent shear stress

$$k^2 y^{2m} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y}.$$

The experimental fact that local drag coefficients over *rough* surfaces are independent of U leads back to exactly the case we consider here, i. e., $n = 1$.)

We now neglect r as small compared to K . This evades the problem of the laminar sublayer, and, also, as we see later, is inadmissible at the extreme outer edge of the boundary layer. Then use of equations (1.3), (1.4) and (1.5) in equation (1.2) leads to

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[k y^m \frac{\partial u}{\partial y} \right]^2. \quad (1.6)$$

$\partial u / \partial y \geq 0$ in the region we consider, so that we effect a typographical economy by writing $\partial u / \partial y$ for $|\partial u / \partial y|$ in equation (1.6) and subsequent equations. Here, and subsequently, we could reduce the number of equations by one by introducing a stream function. However, the treatment would become more complicated in other ways, so we retain equations (1.1) and (1.6) as the boundary layer equations.

2. Reduction of Boundary Layer Equations to Ordinary Form

Substitutions (2.1) used in equations (1.6) and (1.1) enable their reduction to the ordinary equations (2.2) and (2.3):

$$m < \frac{3}{2}, \quad \eta = y x^{-1/(3-2m)}, \quad \chi = u U^{-1}, \quad \zeta = v x^{(2-2m)/(3-2m)} U^{-1}, \quad (2.1)$$

$$- \frac{\eta \chi}{3-2m} \cdot \frac{d\chi}{d\eta} + \zeta \frac{d\chi}{d\eta} = \frac{d}{d\eta} \left(k \eta^m \frac{d\chi}{d\eta} \right)^2, \quad (2.2)$$

$$\frac{d\zeta}{d\eta} = \frac{\eta}{3-2m} \cdot \frac{d\chi}{d\eta}. \quad (2.3)$$

This reduction is permissible only if the boundary conditions governing equations (1.6) and (1.1) can also be reduced by substitutions (2.1) into forms independent of x and y . This would be so for the boundary conditions of the corresponding laminar problem, if these could be carried over legitimately into this turbulent problem. These conditions, which we shall not use as they stand, are:

$$x > 0, \quad y = 0, \quad u = 0, \quad v = 0, \quad (2.4)$$

$$x = 0, \quad u = U, \quad (2.5)$$

$$y \rightarrow \infty, \quad u \rightarrow U, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \rightarrow 0. \quad (2.6)$$

Use of conditions (2.4) and (2.6) would imply that equation (1.6) holds throughout the infinite region $y \geq 0$. In fact, there are two regions in which equation (1.6) fails. In this section we discuss the region close to the plate, deferring the question of the outer limit of the boundary layer until the following section. In the case of the smooth plate, the region of failure of equation (1.6) near $y = 0$ may be identified with the laminar sub-layer, and the failure may be explained as due simply to the fact that in this region ν is not small in comparison with K . For the rough plate matters are more complicated; however, we can certainly state that, in this case, the putative origins for the velocity profile, the shearing stress and the mixing length will, in general, all differ, and it is very unlikely that equation (1.6) will be admissible in the immediate neighborhood of $y = 0$.

We may allow for failure of equation (1.6) close to $y = 0$ by relaxing condition (2.4) and assuming that

$$x > 0, \quad y = y_0, \quad u = 0, \quad v = 0, \quad (2.7)$$

where y_0 is some small value of y , which remains free to vary with x . To preserve the similarity which permits use of equations (2.2) and (2.3), it is necessary that y_0 be of the form $y_0 = \eta_0 x^{1/(3-2m)}$, with η_0 a constant.

Such a relationship implies, roughly, that the laminar sub-layer [or, in the case of the rough plate, the region in which equation (1.6) fails] occupies a constant fraction of the thickness of the boundary layer. It would be more realistic to expect that the *absolute* rather than the *relative* thickness of this region should remain constant⁴). Nevertheless, despite the slight inconsistency in this boundary condition, we are able, with its use, to proceed to a similarity solution which retains most aspects of the physical problem, and apparently gives good results for all but the innermost zone of the boundary layer.

⁴) The well-known result that $y u_* / \nu \approx 10$ at the outer limit of the laminar sub-layer implies that sub-layer thickness varies as u_*^{-1} . It follows that, for $m = 7/8$, sub-layer thickness increases with x as $x^{0.1}$.

3. Convergence of the Shear Integral

Integrating equation (2.3) gives

$$\zeta = \frac{1}{3-2m} \int_0^{\chi} \eta d\chi. \quad (3.1)$$

Using this in equation (2.2) and integrating, we obtain

$$\frac{1}{3-2m} \int_{\chi}^1 \left[\eta \chi - \int_0^{\chi} \eta d\chi \right] d\chi = \left(k \eta^m \frac{d\chi}{d\eta} \right)^2. \quad (3.2)$$

We introduce τ_* by means of equation (3.3)

$$\tau_* = \frac{\tau}{\rho U_*^2} \chi^{(2-2m)/(3-2m)}. \quad (3.3)$$

Evidently

$$\tau_* = \left(\frac{u_*}{U} \right)^2 \chi^{(2-2m)/(3-2m)} = \frac{1}{2} c'_f \chi^{(2-2m)/(3-2m)}, \quad (3.4)$$

where u_* and c'_f have their usual significance of 'friction velocity' and 'local drag coefficient'. It follows from equations (1.3), (1.4), (1.5), and (3.3) that

$$\tau_* = \left(k \eta^m \frac{d\chi}{d\eta} \right)^2. \quad (3.5)$$

τ_* is the analogue of shear stress in our system of reduced variables. Denoting by $\tau_{*,0}$ the value of τ_* at $\eta = \eta_0$ (i. e. the reduced wall shear), we have

$$\tau_{*,0} = \frac{1}{3-2m} \int_0^1 \left[\eta \chi - \int_0^{\chi} \eta d\chi \right] d\chi. \quad (3.6)$$

Obviously $\tau_{*,0}$ is finite in the physical application, and it is accordingly necessary that the integral on the right hand side of equation (3.6) be convergent. We designate this integral the 'shear integral'. It seems certain that this integral is divergent for values of m of interest in the present context, *if we retain (2.6) as the outer boundary condition governing the motion*. The following short investigation of the divergence of the integral is quite non-rigorous, but does give some insight into the problem.

Firstly, it will be noted that, of $\eta \chi$ and $\int_0^{\chi} \eta d\chi$, $\eta \chi$ is the dominant term, and especially so in the region close to $\chi = 1$, if $\eta \rightarrow \infty$ as $\chi \rightarrow 1$. We may therefore reasonably assume that the shear integral is convergent or divergent according as $\int_0^1 \eta \chi d\chi$ is convergent or divergent. We introduce χ' to denote

$(1 - \chi)$ and we suppose that as $\chi \rightarrow 1$ (i. e. $\chi' \rightarrow 0$), $\eta \rightarrow \infty$ as does $(\chi')^\alpha$. Then for χ' small, we may replace $\eta \chi$ by η , and it is seen that $\int_0^{\chi'} \eta d\chi'$ can be convergent only if $\alpha > -1$. Also $\eta \rightarrow \infty$ as $\chi' \rightarrow 0$ [cf. conditions (2.6)] only if $\alpha < 0$. Therefore $0 > \alpha > -1$.

Provided k remains of constant order of magnitude (an assumption confirmed later), dimensional analysis of equation (3.2) gives the result

$$\eta \chi' \propto \eta^{2m-2} (\chi')^2, \quad \text{i. e. } \alpha = \frac{1}{3-2m}. \quad (3.7)$$

It follows that the integral can be convergent only for $m > 2$, a range of values for which substitutions (2.1) are not applicable (and which would, in any case, have little bearing on the physical problem). We therefore conclude that the shear integral under consideration is divergent. (Note that a similar treatment of the corresponding integral for the laminar boundary layer gives the result that $\eta \rightarrow \infty$ as does the inverse error function of χ' . Comparison with the error function then confirms the convergence of the shear integral in the laminar case.)

The explanation of this difficulty centers on condition (2.6). Thus, if adopted, would imply that the turbulent regime extends throughout the whole infinite region $y > 0$ and would neglect ν as small in comparison with K in this region. It is evident that such a formulation would lead to such small values of K at large y that u would approach U so slowly that the shear integral would be divergent. Clearly the integral would be convergent if the fact that the 'viscosity' cannot be less than ν were incorporated into the formulation (cf. preceding remark on convergence of the laminar momentum integral).

The most straightforward way of avoiding this impasse is to retain equation (1.6), but to restrict its region of application by replacing (2.6) with

$$y = y_\delta, \quad u = U \quad (3.8)$$

and adding a further condition that the reduced wall shear, $\tau_{*,0}$, is given. This may be expressed in the form

$$\int_{y_0}^{y_\delta} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy = \tau_{*,0} U^2 x^{-(2-2m)/(3-2m)}. \quad (3.9)$$

For $\tau_{*,0}$ in (3.9) to be independent of x , it is necessary that $y_\delta - \eta_\delta x^{1/(3-2m)}$, where η_δ is independent of x . The revised conditions replacing (2.6) are then (in terms of the reduced variables) (3.6) and

$$\eta = \eta_\delta, \quad \chi = 1. \quad (3.10)$$

Either η_δ or $\tau_{*,0}$ may be taken as the given parameter specifying the motion. These two quantities are uniquely related (for given m and k).

In the following sections 4 and 6 we make appeal to the available experimental data in order to deduce an appropriate numerical value of m and an appropriate k -function. In this way we reduce the general formulation developed here to a particular form both amenable to numerical analysis and in consonance with experiment. Once m is fixed, $\tau_{*,0}$ can be discussed more fully than hitherto; this is done in section 5.

4. Numerical Value of m

The preceding analysis implies the following relationships:

- (a) Boundary layer thickness, y_δ , is proportional to $x^{1/(3-2m)}$;
- (b) local drag coefficient, c'_f , is proportional to $x^{-(2-2m)/(3-2m)}$.

(a) Boundary Layer Thickness

It is generally accepted that, for the fully developed turbulent boundary layer over the flat plate (smooth or rough) at zero incidence with zero pressure gradient, $y_\delta \propto x^{0.80}$. Data on this point for smooth plates due to SCHULTZ-GRUNOW [3], and to TOWNSEND [4] (virtual origin -21 cm) are shown in Figure 1.

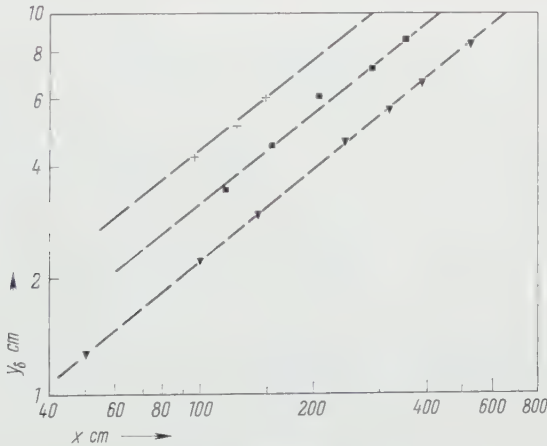


Figure 1

Thickness of turbulent boundary layers with zero pressure gradient. Fitted lines are for $y_\delta \propto x^{0.8}$.
+ TOWNSEND [4]; ■ CORRSIN and KISTLER [5]; ▼ SCHULTZ-GRUNOW [3].

Both do, in fact, fit this relationship quite well. The data of CORRSIN and KISTLER [5] for a rough corrugated surface also fits the 0.8 power law fairly well, when the origin of y_δ is taken at the top of the corrugations and the virtual

origin of x at -36 in. However, the confirmation of the 0.8 power law, which we provisionally accept here, is not conclusive, since much of it relies on inferred virtual origins of x . The 0.8 power law for boundary layer thickness corresponds to $m = 0.875$.

(b) Local Drag Coefficient

Reference [6] (p. 439) summarizes most of the data available on drag coefficients for smooth flat plates at zero incidence with zero pressure gradient. In the range $2.5 \times 10^5 < R < 10^7$ ($R = Ux/\nu$), c'_f is found to be proportional to $x^{-0.20}$ to a good approximation. However, for the full range of data $2.5 \times 10^5 < R < 5 \times 10^8$ a better fit is obtained when the exponent is made -0.17 .

Primary data on drag coefficients for rough plates are not available to the author. However, the Schlichting interpolation formula (reference [7], p. 381; [6], p. 449) for the range $10^2 < x/\varepsilon < 10^6$, where ε is the 'equivalent sand roughness',

$$c'_f = \left(2.87 + 1.58 \log \frac{x}{\varepsilon} \right)^{-2.5}, \quad (4.1)$$

may be recast into the form,

$$c'_f = (\text{function of } \varepsilon) \cdot x^\alpha, \quad (4.2)$$

where the best fit is to be found with $\alpha = 0.193$ (see Figure 2).

It follows that the most suitable values of m would be (i), for smooth plates with $2.5 \times 10^5 < R < 10^7$, $m = 0.875$; (ii), for smooth plates with $2.5 \times 10^5 < R < 5 \times 10^8$, $m = 0.898$; (iii), for rough plates, $m = 0.880$.

These various types of data are all satisfied reasonably well by the value $m = 0.875$. Accordingly, we adopt $m = 7/8$ in the developments which follow. Additional data may lead to some change in the value of m , but this is unlikely to affect the general nature of the results to be obtained here.

Difficulties may arise when rough and smooth regimes co-exist along the one (uniformly rough) plate. However, since the thickness of the laminar sub-layer varies only slowly with x (approximately as $x^{0.1}$, cf. previous footnote), this will occur in practice only exceptionally.

5. The Reduced Wall Shear, $\tau_{*,0}$

With m now fixed, we may relate $\tau_{*,0}$ to the experimental data. The relationships we develop in this section are in no sense final, but indicate the order of magnitude of $\tau_{*,0}$ and give an overall picture of its mode of variation on smooth and rough plates. The subsequent developments do not depend on this section in any way.

(a) *Smooth Plates*

We require to fit the available data on c'_i to a relationship of the form

$$c'_i = A x^{-0.20}. \tag{5.1}$$

In the range $2.5 \times 10^5 < R < 10^7$, the data ([6], p. 439) are very well fitted by the value $A = 0.074 (\nu/U)^{0.20}$. When the range is extended to

$$2.5 \times 10^5 < R < 5 \times 10^8,$$

A requires to be increased to the value $0.077 (\nu/U)^{0.20}$. This value gives results deviating from experiment by a maximum of about 10%, an accuracy sufficient for our present purpose. Now, it follows from equations (3.4) and (5.1) that $A = 2 \tau_{*,0}$, so that

$$\tau_{*,0} = 0.0385 \left(\frac{\nu}{U} \right)^{0.20}. \tag{5.2}$$

This is the relationship we provisionally adopt to specify $\tau_{*,0}$ over smooth plates.

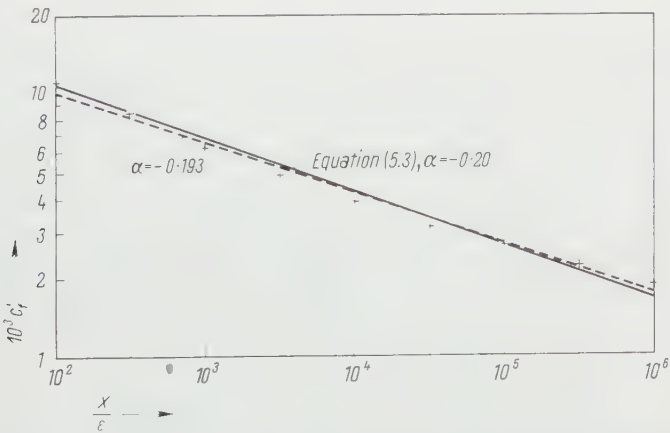


Figure 2

SCHLICHTING's interpolation formula (4.1), and power law approximations to it. Crosses represent points computed from equation (4.1).

(b) *Rough Plates*

Here we shall make use of SCHLICHTING's interpolation formula (4.1). In Figure 2 the function $(2.87 + 1.58 \log x/\epsilon)^{-2.5}$ is plotted against x/ϵ for the range $10^2 < x/\epsilon < 10^6$. It is evident that we can replace this function to a good approximation by one of the form $B(x/\epsilon)^\alpha$. The best fit, for $\alpha = -0.193$, is shown on the figure, but it is more convenient for our present purpose to

adopt $\alpha = -0.20$, giving $B = 0.0264$. This line is also shown, and is seen to correspond quite closely to SCHLICHTING's function. We therefore rewrite (4.1) as

$$c'_l = 0.0264 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right)^{-0.20}. \quad (5.3)$$

Use of equation (3.4) then reduces this to

$$\tau_{*,0} = 0.0132 \varepsilon^{0.20} \quad (5.4)$$

which we adopt as the provisional relationship specifying $\tau_{*,0}$ over rough plates.

(c) Transition from Smooth to Rough

According to [6] (Figure 21.10, p. 449), the transition from smooth to rough over flat plates is marked by a much less definite depression of the drag coefficient than is the case for pipes. The point of departure from the smooth regime may therefore be found approximately by equating values of $\tau_{*,0}$ obtained from both equations (5.2) and (5.4), giving

$$\frac{U \varepsilon}{\nu} = 200, \quad (5.5)$$

in fair agreement with SCHLICHTING's ([6], p. 454) approximate criterion for

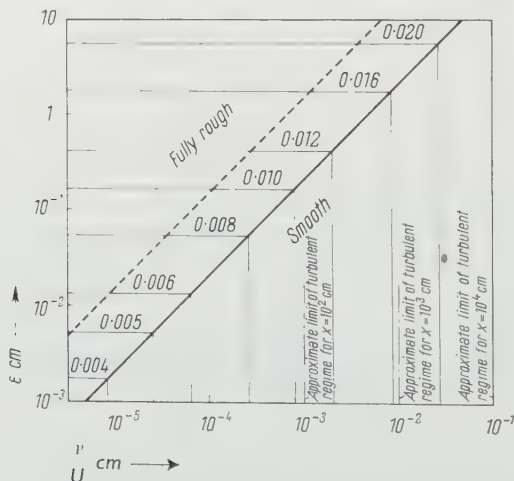


Figure 3

Variation of $\tau_{*,0}$ with ν/U and ε , as given by equations (5.2) and (5.4). The fine lines are 'contours' of $\tau_{*,0}$, and are labelled with the appropriate values of $\tau_{*,0}$. The diagonal broken line indicates approximate lower limit of completely rough regime. Approximate limit of (smooth) turbulent regime is shown for three values of x . To right of these three limits regime would be laminar. This figure is partly schematic and is intended primarily for illustrative purposes.

‘admissible roughness’,

$$\frac{U}{\nu} \varepsilon = 100 . \tag{5.6}$$

The dependence of $\tau_{*,0}$ on $r \, U^*$ in the smooth regime and on ε in the rough regime, as predicted by equations (5.2) and (5.4), is shown in Figure 3. The dotted limit of ‘complete roughness’ corresponds to $U \, \varepsilon / \nu = 1500$, in rough agreement with [6] (Figure 21.10, p. 449). Note that the region corresponding to large values of $r \, U^*$ is turbulent only when y_δ (and therefore x) assumes very large values. A suitable criterion (for smooth surfaces) is that for $x < 10^5 \, \nu / U$ the flow is laminar (reference [6], p. 330).

6. The k -Function

Rearranging equation (3.2)

$$k = \frac{\left[\int_x^1 \left(\eta \, \chi - \int_0^\chi \eta \, d\chi \right) d\chi \right]^{1/2}}{(3 - 2 \, m)^{1/2} \, \eta^m \, \frac{d\chi}{d\eta}} . \tag{6.1}$$

It follows that experimental data on the velocity profiles over flat plates (zero pressure gradient), which reduce to a relationship between η and χ for each profile, can be used to deduce the k -function.

The term $\int_0^\chi \eta \, d\chi$ proves to be of order of magnitude 10% of $\eta \, \chi$. It may be replaced for present purposes by $(1 - \beta) \, \eta \, \chi$, where β is taken as constant⁵⁾. We adopt the value $\beta = 0.88$, appropriate to boundary layers characterized by $\tau_{*,0}$ values about 0.005. Then $m = 7/8$, $\beta = 0.88$, lead to the following equations, which are modified forms of equations (3.2), (3.6) and (6.1), respectively:

$$0.704 \int_x^1 \eta \, \chi \, d\chi = \left(k \, \eta^{7/8} \, \frac{d\chi}{d\eta} \right)^2 , \tag{6.2}$$

⁵⁾ This ‘ β -approximation’ introduces the possibility of two distinct types of error. The first is that resulting from taking β constant for any fixed value of $\tau_{*,0}$. Check computations comparing velocity profiles (i) calculated with constant β and (ii) using the ‘exact’ equations indicate that errors of this type are negligibly small for present purposes.

The second type of error, namely that arising from adopting the same value of β for all values of $\tau_{*,0}$ raises more complicated issues, but again the errors appear to be unimportant in the present context. Strictly, β tends to decrease slowly as $\tau_{*,0}$ increases.

Note that χ and τ/τ_0 profiles (cf. Figures 5 and 7), computed for a given $\eta\delta$, are independent of the value of β adopted. However, matters such as the relative magnitudes of $\eta \, \chi$ and $\int_0^\chi \eta \, d\chi$ in any particular boundary layer will be studied most reliably by retaining the exact equations. It would have been possible to proceed with the exact equations; but the small improvement in accuracy would not seem to justify the great increase in the labor of computation.

$$\tau_{*,0} = 0.704 \int_0^1 \eta \chi d\chi, \quad (6.3)$$

$$k = 0.839 \frac{\left(\int_0^1 \eta \chi d\chi \right)^{1/2}}{\eta^{7/8} \frac{d\chi}{d\eta}}. \quad (6.4)$$

Since $d\chi/d\eta$ enters equation (6.4), the notoriously inaccurate process of differentiating experimentally determined functions must be carried out in evaluating k . This appears to set the limit to the accuracy with which k can be found. There is also some imprecision in the values of η_δ ; this tends, in particular, to make determinations of k uncertain in outer parts of the boundary layer.

Values of k as a function of η/η_δ , computed from (6.4) for various experimental data, are shown in Figure 4. We discuss these data, and the $k(\eta/\eta_\delta)$ function we adopt from them, in the following paragraphs.

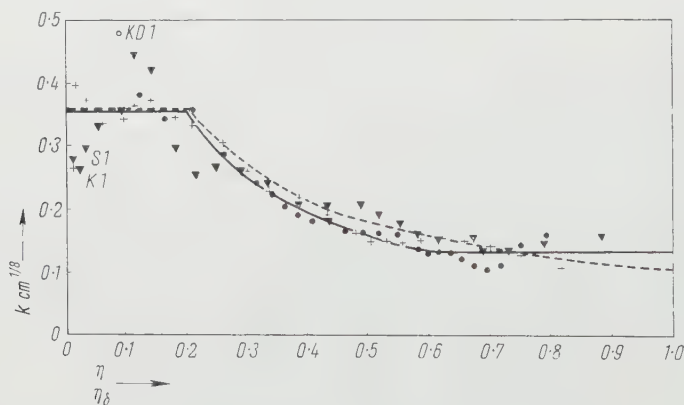


Figure 4

Mixing length function $k(\eta/\eta_\delta)$, computed for $m = 7/8$ from experimental data. Points K1, S1 represent outer limit of influence of laminar sub-layers. Point KD1 represents outer limit of influence of smooth surface (see text). Solid curve represents k -function (6.5), adopted in the subsequent computations. Broken curve represents k -function (6.6). + KLEBANOFF [8]; \blacktriangledown SCHULTZ-GRUNOW [3]; \bullet KLEBANOFF and DIEHL [9].

(a) Data of Klebanoff

KLEBANOFF [8] measured the velocity profile across an artificially thickened boundary layer in a wind tunnel specially constructed to give a low turbulence level (about 0.03%). In view of the care of the measurements, and the (relative) accuracy with which the present author could differentiate the fairly large-

scale plot of the velocity profile, these data (with those of KLEBANOFF and DIEHL [3]) must be regarded as the most reliable for our present purpose.

KLEBANOFF deduces $c'_t = 0.00283$ from his measurements of turbulent intensity close to the wall; this corresponds to $\tau_{*,0} = 0.00476 \text{ cm}^{1/5}$. The value of $\tau_{*,0}$ obtained directly from the velocity profile by evaluation of $\int_0^1 \eta \chi d\chi$ [i. e., using equation (6.3)] is $0.00481 \text{ cm}^{1/5}$. Such good agreement between $\tau_{*,0}$ values found by the two independent methods, encourages us to pursue the implications of the present formulation. For these data, $\eta_\delta = 0.0616 \text{ cm}^{1/5}$.

The point labelled *K1* on Figure 4 ($\eta/\eta_\delta = 0.011$) appears to mark the outer limit of the influence of the laminar sub-layer on the Klebanoff profile. k decreases as the sub-layer is approached, and is about 0.1 in most of the sub-layer.

(b) Data of Schultz-Grunow

SCHULTZ-GRUNOW [3] gives data for a number of stations along a turbulent boundary layer on a flat plate (zero pressure gradient). The velocity profiles exhibit similarity to a fair accuracy, and, for simplicity, we here use only the data for the station at 530 cm. Regrettably, SCHULTZ-GRUNOW's data are presented in small diagrams, and the present author does not regard the deduced values of k , shown in Figure 4, as having the reliability of the other plotted data.

SCHULTZ-GRUNOW measured the drag by means of a floating element mounted in the plate. It may be inferred from his data that c'_t at 530 cm was 0.0254, which leads to $\tau_{*,0} = 0.00445 \text{ cm}^{1/5}$. Determination of $\tau_{*,0}$ from the velocity profile *via* equation (6.4) gives $0.00444 \text{ cm}^{1/5}$. Again the two independently determined values of $\tau_{*,0}$ agree very well. For these data, $\eta_\delta = 0.0557 \text{ cm}^{1/5}$.

The two points on Figure 4 indicated by *S1* appear to represent the outer limit of the influence of the laminar sub-layer for this profile.

(c) Data of Klebanoff and Diehl

To test the $k(\eta/\eta_\delta)$ relationship discernible in the Klebanoff and the Schultz-Grunow data, it was desirable to evaluate k for a surface exhibiting somewhat larger values of $\tau_{*,0}$ and η_δ . One point to be resolved by such a test was whether k should be treated as a 'universal' function of η/η_δ or of η . The previous analytical results follow equally well if k were taken as a function of η rather than of η/η_δ . Also, for such data to be reasonably homogeneous with the Klebanoff and the Schultz-Grunow data, it was desirable that the turbulence level of the free stream be small.

Data available in the work of KLEBANOFF AND DIEHL [9] satisfy both conditions quite well. Their work was carried out in the same tunnel as that of

KLEBANOFF, and the data to be used here gave a value of η_δ about twice those of the previous data.

KLEBANOFF and DIEHL covered the leading two feet of the test plate with No. 16 sand paper, so as to artificially thicken the boundary layer, which would be studied in detail sufficiently downstream for the layer to have resumed equilibrium characteristics. Our interest here is in the velocity profiles at a station 0.08 ft downstream of the roughened surface. The boundary layer over the roughened surface was apparently turbulent right from the leading edge, and this 2.08 ft profile can be considered characteristic of the roughened surface (and in equilibrium with profiles over the roughened surface), except in a surface layer of thickness of order 0.1 in.

KLEBANOFF and DIEHL give data for free stream velocities of 35, 55 and 108 ft/s. All profiles agree closely, and here we have used a mean curve through the three sets of data. On the present interpretation of these data, $\eta_\delta = 0.105$ and $\tau_{*,0} = 0.0134$. The point labelled *KD1* appears to lie at the inner limit of validity of the assumption that the profile is in equilibrium with the rough surface. Note that points within the region of influence of the smooth surface would give abnormally high values of k , if they were treated as homogeneous with the outer part of the profile.

It is seen that the data of KLEBANOFF and DIEHL lead to a $k(\eta/\eta_\delta)$ function which does not differ significantly from that suggested by the data of KLEBANOFF and SCHULTZ-GRUNOW. It also appears that our assumption that k varies with (η/η_δ) , rather than with η , is justified.

(d) *The Adopted k -Function*

Clearly, k is about 0.36 in a region close to the wall, and decreases monotonically to about 0.14 in the outer parts of the boundary layer. The data are scarcely adequate for us to go beyond this. However, to explore numerical solutions of the boundary layer equations, we need to specify k in precise form. On the basis of the experimental data, the following k -function (for low free-stream turbulence) appears appropriate, and is used subsequently in this work.

$$\left. \begin{aligned} 0 &\leq \frac{\eta}{\eta_\delta} \leq 0.2, & k &= 0.358, \\ 0.2 &< \frac{\eta}{\eta_\delta} < 0.6, & k &= 0.0871 \left(\frac{\eta}{\eta_\delta} \right)^{-7/8}, \\ 0.6 &\leq \frac{\eta}{\eta_\delta} \leq 1, & k &= 0.1355. \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

(6.5), which is shown as the full curve of Figure 4, is in a form chosen because it was convenient for the numerical work we require to perform in integrating equation (6.2). Certain inelegancies in (6.5) can be avoided in other

formulations, such as

$$\left. \begin{aligned} 0 &\leq \frac{\eta}{\eta_\delta} \leq 0.2, \quad k = 0.36, \\ 0.2 &< \frac{\eta}{\eta_\delta} \leq 1, \quad k = 0.108 \left(\frac{\eta}{\eta_\delta} \right)^{-3/4}, \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

which fits the data nearly as well. The broken curve of Figure 4 represents (6.6).

These forms are, of course, tentative. Note that the three and four significant figures of (6.5) are not to be taken seriously. Calculations were begun with a β -value which was later amended. The numerical values of (6.5) were needed so that these calculations could be retained.

7. Numerical Solutions of Equation (6.2)

The method of solution of equation (6.2) subject to conditions (3.10) and (6.3) is, essentially, to regard η_δ as a datum, and to proceed by stepwise integration from η_δ towards η_0 . Values of $\tau_{*,0}$ and η_0 emerge as part of the solution obtained. The method is similar to that used in integration of the concentration-dependent diffusion equation [10], in that the χ -intervals used in computing successive values of $\int_z^1 \eta \chi d\chi$ overlap those used in computing the decrements in η . Near $\chi = 1$, $\eta = \eta_\delta$, the integration is started analytically by means of the approximation

$$\int_z^1 \eta \chi d\chi = (\eta \eta_\delta)^{1/2} (1 - \chi), \quad (7.1)$$

which leads to equation (7.2) for $k = 0.1355$

$$\eta^{3/8} = \eta_\delta^{3/8} - 0.1211 \chi_\delta^{-1/4} (1 - \chi)^{1/2}. \quad (7.2)$$

Solutions of equation (6.2) were obtained for the following values of η_δ : 0.05, 0.06, 0.08, 0.10, 0.12. These give a range of values of $\tau_{*,0}$ which includes the available experimental data, and which can be expected to contain most cases of practical interest. The number of steps dividing the χ interval, 0 to 1, varied from 41 to 58.

The primary numerical results obtained consisted of the $\eta(\chi)$ functions, which are shown in Figure 5, and the set of values of

$$\int_z^1 \eta \chi d\chi,$$

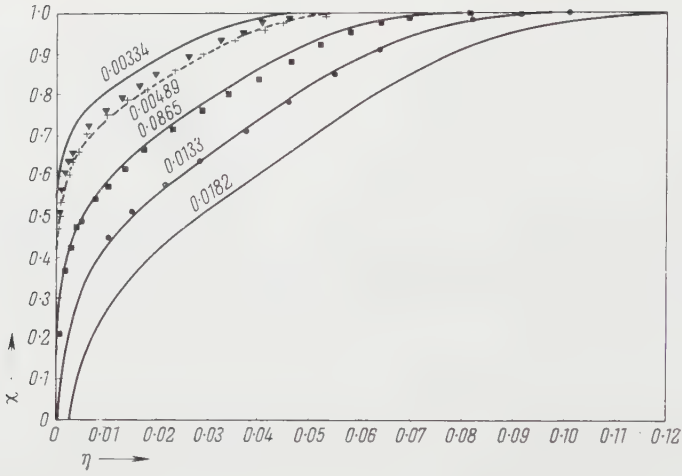


Figure 5

Experimental and computed velocity profiles in reduced form $\chi(\eta)$. Figures on computed curves denote appropriate values of $\tau_{*,0}$. ▼ SCHULTZ-GRUNOW [3]; + KLEBANOFF [8]; ■ CORRSIN and KISTLER [5]; ● KLEBANOFF and DIEHL [9].

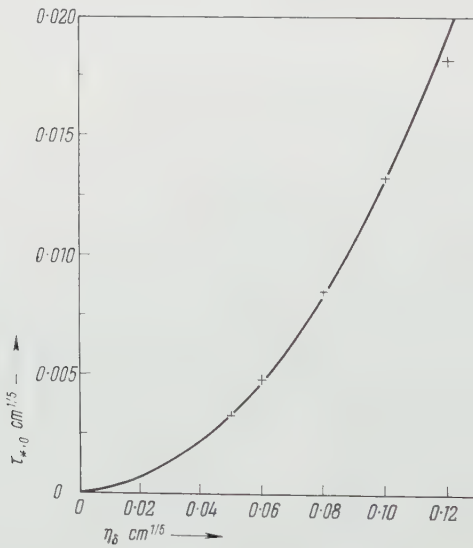


Figure 6

The relationship between $\tau_{*,0}$ and $\eta\delta$. Crosses denote computed points. Curve represents equation (8.1).

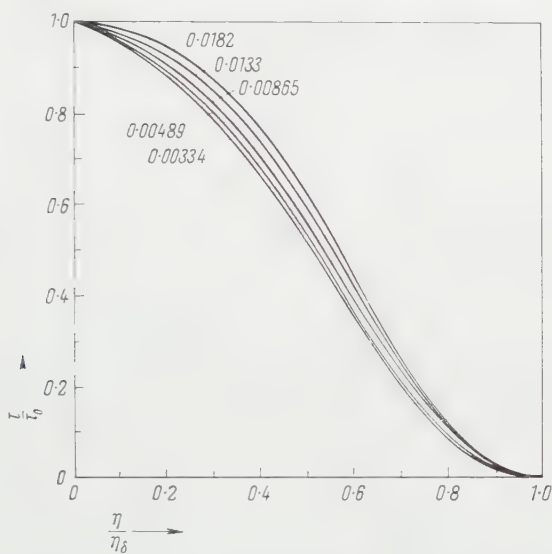


Figure 7

Computed shear stress profiles for the five values of $\tau_{*,0}$ shown.

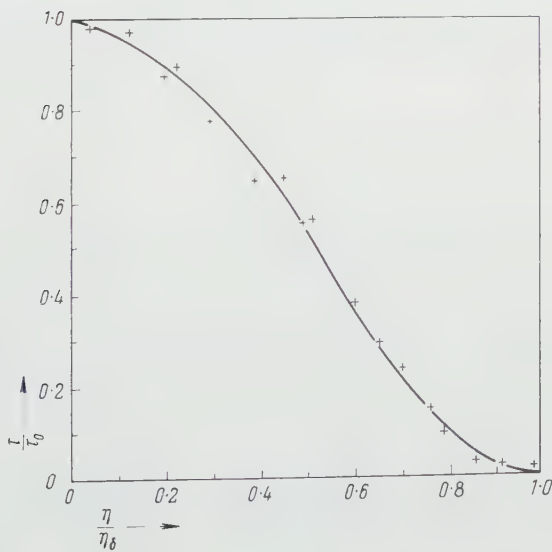


Figure 8

Computed shear stress profile for $\tau_{*,0} = 0.00489$, compared with experimental points for $\tau_{*,0} = 0.00476$. + KLEBANOFF [8].

which occur in the course of the computation. Also, from equations (3.5) and (6.2),

$$\tau_* = 0.704 \int_{\chi}^1 \eta \chi d\chi, \quad (7.3)$$

so that the profile of τ_* follows at once. Figure 6 shows the $\tau_{*,0}(\eta_\delta)$ relationship found in this way, and the various τ/τ_0 (or $\tau_*/\tau_{*,0}$) profiles are given in Figure 7.

8. The Various Properties of the Boundary Layer

Other boundary layer properties may be computed from these primary numerical results. The various properties of the layer, as computed, are presented and discussed briefly here.

(a) Shear Stress Profiles

The shear stress profiles (Figure 7) are all sigmoidal, but not identical. KLEBANOFF [8] measured the turbulent shearing stress in a boundary layer for which $\tau_{*,0}$ was 0.00476. Figure 8 compares his data with the computed profile for $\tau_{*,0} = 0.00489$; the y_δ adopted for KLEBANOFF's data was 3.12 in. The agreement between analysis and experiment is seen to be fairly good, and is rather better than that obtained by CLAUSER's analysis ([11], Figure 16).

In Figure 6 the computed points are compared with the parabola passing through the point computed for $\eta_\delta = 0.08$, and representing the relationship

$$\tau_{*,0} = 1.352 \eta_\delta^2. \quad (8.1)$$

(b) Velocity Profiles

Figure 5 shows various experimental data, as well as the computed reduced velocity profiles. The profiles of KLEBANOFF and SCHULTZ-GRUNOW, used previously in establishing k , are given. The 55 ft/s profile of KLEBANOFF and DIEHL is shown, the other similar ones being omitted for clarity. Also shown is the profile of CORRSIN and KISTLER [5] at station 102" of their boundary layer along a rough corrugated surface. The agreement between observation and analysis is especially notable in the case of the Corrsin and Kistler data, since these did not enter into the establishment of k .

The computed profiles agree about as well as do observed profiles with the velocity profile 'laws' proposed from time to time.

(i) *Power law velocity profile.* Plots of $\log_{10} \chi$ against $\log_{10} \eta/\eta_\delta$ for each computed velocity profile show that an appreciable region of the layer might be supposed to obey a power law. The exponent increases practically linearly

with $\tau_{*,0}$ from 1/9.8 for the 'smoothest' profile to 1/1.7 for the 'roughest'. The exponent corresponding to much of the smooth plate work ($\tau_{*,0} \approx 0.0046$) is about 1/7.

(ii) *Velocity defect law.* Plots of $(U - u)/u_*$ against a reduced abscissa related to distance from the wall, such as y/y_δ , have been found [11-15] to give groupings of points which might suggest the existence of a 'universal' defect law holding in an outer region of turbulent boundary layers along both smooth and rough plates.

Such formulations seem to imply two different types of universality. These are, firstly, a universality embracing profiles occurring at different stations along the one boundary layer, and, secondly, an universality embracing profiles occurring on *different* boundary layers, i. e. on smooth plates characterized by different values of (ν/U) and on plates of various roughnesses.

Universality of the first type cannot be exactly consistent with the present formulation ($m = 1$), which implies similarity in velocity profiles along the one layer. (The data of SCHULTZ-GRUNOW '3 is, perhaps, the best available for comparing velocity profiles at a number of stations along a plate at zero incidence. Curiously enough, these data are often supposed to illustrate the velocity defect law. Yet it can be shown, at least as persuasively, that his profiles exhibit similarity to a good approximation.) Universality of the second type, however, can be examined further by means of the present approach. The corresponding plot here is of $(1 - \chi)/\tau_{*,0}^{1/2}$ against η/η_δ . In view of equation (8.1), we use here the equivalent, and more convenient, $(1 - \chi)/\eta_\delta$ against η/η_δ . Plots of the computed profiles are given to a linear scale in Figure 9, and with η/η_δ logarithmic in Figure 10.

Figure 9 should be compared with Figure 10.5 of [15] (p. 245). The spread of the experimental points in TOWNSEND's figure is about as great as the deviations between computed curves for the appropriate $\tau_{*,0}$ values. Admittedly the x -values for the experimental data are not all equal, but they tend to be of the same order of magnitude. There are also factors tending to obscure the spread of points at equal x ; for example, the profiles for CORRSIN and KISTLER's rough surface were at x -values very much less than those appropriate to the smooth surface data of SCHUBAUER and KLEBANOFF [16]. Similar remarks hold for Figure 10, which may be compared to Figure 10.4 of [15] (p. 244) and Figure 5 of [11].

(iii) *Logarithmic profiles and roughness effects.* Another interesting aspect of Figure 10 is that, at any fixed $\tau_{*,0}$, the velocity is a linear function of $\log \eta/\eta_\delta$ to a good approximation in the region $\eta < 0.2 \eta_\delta$. The present analysis thus connects with the proposal [11, 13, 15] that this part of the velocity profile is logarithmic.

Also, the various curves are roughly parallel in this 'logarithmic' region. This is at least consonant with the concept [12, 17] that roughness changes

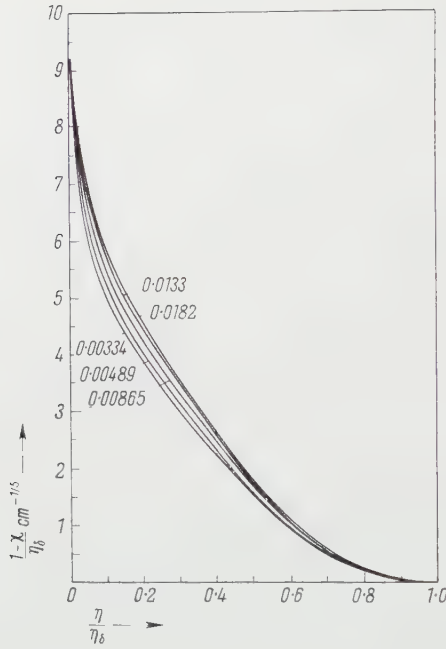


Figure 9

Velocity defect law, usual formulation. Linear plot of computed velocity profiles for the five values of $\tau_{*,0}$ shown.

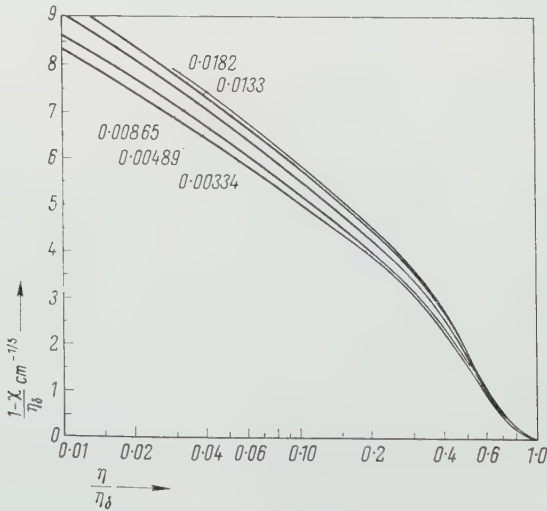


Figure 10

Velocity defect law, usual formulation. Logarithmic plot of computed velocity profiles for the five values of $\tau_{*,0}$ shown.

the velocity profile in the 'logarithmic' region by decreasing u/u_* by a constant amount.

(iv) *An alternative velocity defect law.* It is simply shown that use of approximation (7.1) in equation (6.2) leads to the result that velocity profiles may be put into the form

$$\frac{1-\chi}{\eta_\delta^{5/4}} = \text{function} \left(\frac{\eta}{\eta_\delta} \right). \quad (8.2)$$

Although agreement between plots of the various profiles depends solely on the efficiency of approximation (7.1), which is accurate only in outer parts of the layer, this form of defect law is found to work quite well through the whole depth of the layer.

A particular form of (8.2) appropriate to the outer part of the layer may be found by rearranging equation (7.2), using the binomial theorem, and neglecting terms in $(1 - \eta/\eta_\delta)$ of higher order than the first. The result is equation (8.3):

$$\frac{1-\chi}{\eta_\delta^{5/4}} = 9.59 \left(1 - \frac{\eta}{\eta_\delta} \right)^2. \quad (8.3)$$

This is similar in form to HAMA's [17] empirical square law for the outer part of the boundary layer. It supports HAMA's second power rather than Ross's [18] 3/2 power.

(c) Profiles of Eddy Viscosity

Equations (1.4), (1.5) and (2.1) yield

$$K = k^2 \eta^{2m} \frac{d\chi}{d\eta} U x^{(2m-1)/(3-2m)} \quad (8.4)$$

so that we may introduce a reduced eddy viscosity K_* by the relationships

$$K = K_* U x^{(2m-1)/(3-2m)}, \quad K_* = k^2 \eta^{2m} \frac{d\chi}{d\eta}. \quad (8.5)$$

It follows from equation (3.5) that

$$K_* = \frac{\tau_*}{\frac{d\chi}{d\eta}}, \quad (8.6)$$

which enables profiles of K_* to be computed simply. These are shown in Figure 11. They are fairly similar in shape, the scale of K_* being roughly proportional to $\tau_{*,0}$. Since k^2 enters the second of equations (8.5), one expects the discontinuities in the adopted k -function at $\eta/\eta_\delta = 0.2$ and 0.6 to be reflected in the K_* curves. The slight dip in the curves near $\eta/\eta_\delta = 0.6$ is explained in

this way, and it is likely that the peaks near $\eta/\eta_\delta = 0.2$ are rather too sharp for the same reason.

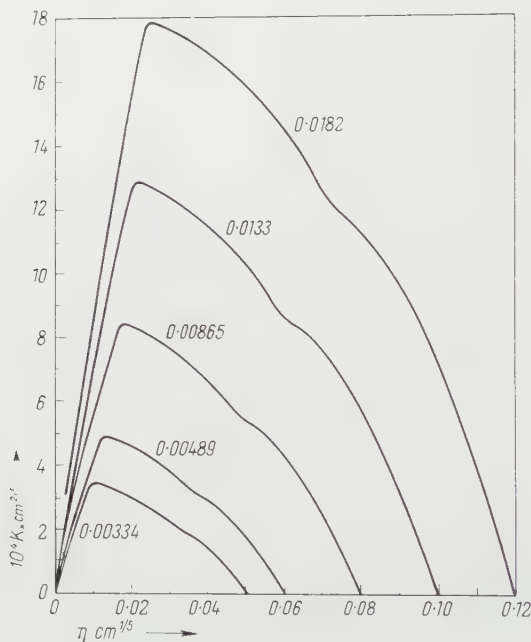


Figure 11

Profiles of eddy viscosity in reduced form $K_*(\eta)$, computed for the five values of $\tau_{*,0}$ shown.

(d) Velocity Component Normal to the Plate

Profiles of reduced velocity normal to the plate are simply computed, using equation (3.1). The profiles are found to be typically sigmoidal, but, as one would expect, are not exactly similar to each other.

(e) Relation Between Roughness and Drag

The numerical solutions also yield a relationship between η_0 and $\tau_{*,0}$. At the 'rough' end of the $\tau_{*,0}$ range, η_0 varies approximately as $\tau_{*,0}^5$. Taken with equation (5.4), this suggests the reasonable result that, for the rough regime, η_0 may be proportional to ε .

9. Free Stream Turbulence and Pipe Flow

The k -function adopted here is intended to apply to the case where the turbulence level in the free stream is small. As free stream turbulence increases

one would expect k to increase, particularly in the outer regions of the boundary layer. Turning to the question of turbulent flow in pipes, it may be reasonable to regard the pipe radius as the boundary layer thickness, and the equivalent 'free stream turbulence' as some representative level of turbulence along the opposite radius of the pipe. Thus the k -function for pipes might be expected to be rather like that for a boundary layer with a high level of free stream turbulence. This is, in fact, what is found for the mixing length data of NIKURADSE [19], when this is recast into the form $k(y/y_\delta) = l y^{-7/8}$.

10. Discussion

(a) *Universal Functions and Occam's Razor*

WILLIAM OF OCCAM pronounced, 'entia non sunt multiplicanda praeter necessitatem'. Fluid mechanicians may translate: 'Universal functions must not be multiplied beyond necessity.' For each separate universal function, as used in fluid mechanics, is simply a separate hypothesis about the phenomenon.

In the present work, we have reduced description of the turbulent boundary layer, in all its gross particulars, to a single 'mixing-length' function⁶). The alternative formulations of CLAUSER, COLES and TOWNSEND apparently require one universal function to describe the outer velocity profile, and another to describe the inner velocity profile in the case of smooth surfaces (law of the wall). CLAUSER and HAMA have made some suggestions as to how to cope with the problem of the inner part of the velocity profile over rough surfaces, and this, in effect, involves yet a third hypothesis. The present formulation, with its single hypothesis, is relevant to both smooth and rough surfaces, and involves no problem of joining inner and outer profiles. Note, also, that no further universal function is required to generalize the present approach to the case of non-zero pressure gradient.

(b) *Downstream Variation of Drag and Layer Thickness*

A further aspect in which alternative formulations appear to be inadequate is in the manner in which they fail to take full cognizance of the downstream variation of local drag coefficient and boundary layer thickness. Thus in [11] (p. 18) a universal defect law is made the starting point of an analysis of the boundary layer. Immediately a difficulty arises because u_* varies with x , but, because the variation of u_* with x is relatively slow, the theory is developed on the basis of u_* constant, i. e. 'pipe-like' elements are introduced into the analysis at the outset.

⁶) We do not, of course, pretend to give an adequate description of the laminar sub-layer, where it exists. However, this seems a small price to pay for the advantages of the present formulation.

Another form of this tendency to treat boundary layers as pipes is inadequate recognition of the loss of momentum suffered by each parcel of fluid during its passage along a thickening boundary layer. The terms on the left hand side of equation (1.2) relate to the rate of this loss of momentum, and clearly form a most important element in this equation. They do not, of course, arise in pipe flow.

It is quite obvious that these terms are greatly affected by the rate of growth of boundary layer thickness, and it follows that the profiles of velocity and shear stress will be quite different if, say, $y_\delta \propto x^{0.5}$ instead of $y_\delta \propto x^{0.8}$.

CLAUSER [11] attempts to represent the outer regions of constant pressure layers by velocity profiles of laminar boundary layers with various non-zero velocities at the wall. He wishes to reproduce the effect of constant eddy viscosity in the regions, but his results are appropriate to a layer growing in thickness as $x^{0.5}$, and having momentum loss characteristics of a laminar and not a turbulent layer. His conclusion that the viscosity in the outer 80% to 90% of the layer is constant and proportional to the product of U and the displacement thickness (i. e. to $U x^{0.8}$, with $m = 7/8$) is, therefore, not valid. The present analysis predicts $K \propto U x^{0.6}$ and gives profiles of K rather more in keeping with experimental data [4].

(c) *Physical Implications*

The physical implications of this work will be explored further in a proposed second paper giving the extension to non-zero pressure gradient. Here it suffices to state that the momentum considerations introduced in equation (1.2), together with the adopted mixing-length hypothesis, are capable of predicting and connecting the gross characteristics of the turbulent boundary layer.

Objections to the mixing length approach, such as those of TOWNSEND [4], have substance, of course, and are a useful corrective to a literal belief in the physical existence of the simple mixing-length model. Yet, although the model cannot be exact, it is an approximation to mixing processes which do take place, and it is not unreasonable to expect that a mixing-length function might be found which describes gross features of the motion to a fair enough accuracy. This is apparently what we have done here.

The full scope of the present approach has not yet been explored. Apart from extension to non-zero pressure gradients (which shows, *inter alia*, that the k -function used here leads to results in agreement with observation of turbulent layers in positive and negative pressure gradients, including layers at separation), there remains the question of flows in pipes and closed and open conduits. There is some evidence that the approach may prove valid in this somewhat wider context.

REFERENCES

- [1] L. PRANDTL, Verh. 3. Int. Math.-Kongr., Heidelberg, 484 (1904).
- [2] L. PRANDTL, Z. angew. Math. Mech. 5, 136 (1925).
- [3] F. SCHULTZ-GRUNOW, Luftfahrtforschung 17, 239 (1940).
- [4] A. A. TOWNSEND, Proc. Camb. phil. Soc. 47, 375 (1951).
- [5] S. CORRSIN and A. L. KISTLER, NACA TN 3133 (1954).
- [6] H. SCHLICHTING, *Boundary Layer Theory* (Mc Graw-Hill, New York, 1955).
- [7] S. GOLDSTEIN, ed., *Modern Developments in Fluid Dynamics*, vol. 2 (Clarendon Press, 1938).
- [8] P. S. KLEBANOFF, NACA TN 3178 (1954).
- [9] P. S. KLEBANOFF and Z. W. DIEHL, NACA Report 1110 (1952).
- [10] J. R. PHILIP, Trans. Faraday Soc. 51, 885 (1955).
- [11] F. H. CLAUSER, Advanc. appl. Mech. 4, 1 (1956).
- [12] F. H. CLAUSER, J. aeron. Sci. 21, 91 (1954).
- [13] D. COLES, Z. angew. Math. Phys. 5, 181 (1954).
- [14] D. COLES, J. Fluid Mech. 1, 191 (1956).
- [15] A. A. TOWNSEND, *The Structure of Turbulent Shear Flow* (Cambridge University Press, 1956).
- [16] G. B. SCHUBAUER and P. S. KLEBANOFF, NACA TN 2133 (1950).
- [17] F. R. HAMA, Trans. Soc. Nav. Arch. Marine Engrs. 62, 333 (1954).
- [18] D. ROSS, Amer. Soc. Civ. Eng. Proc., Sep. No. 604 (1955).
- [19] J. NIKURADSE, VDI-Forschungsheft, 361 (1933).

Zusammenfassung

Das hier entwickelte, formale, mathematische System beschreibt turbulente Grenzschichten an glatten und rauen Platten und vermittelt eine zusammenhängende und folgerichtige Behandlung von solch groben Schichteigenschaften wie Durchschnittsgeschwindigkeitsprofil, Schubspannung, Wirbelviskosität und Grenzschichtdicke. Die erhaltenen Lösungen zeigen gute Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen. Die gegebene Formulierung kann in gewisser Hinsicht als eine neuartige Mischungsweghypothese betrachtet werden.

Die Arbeit beschränkt sich auf Grenzschichten mit Nulldruckgradienten. Eine Verallgemeinerung auf von Null abweichende Druckgradienten ist einer späteren Mitteilung vorbehalten, in welcher gezeigt werden soll, dass die benutzte Methode zu mit dem Experiment übereinstimmenden Ergebnisse führt und keiner weiteren Hypothesen bedarf.

Die physikalische Bedeutung der Arbeit kann darin gesehen werden, dass ein allerdings nicht ganz genaues Mischungswegmodell dennoch auftretende Mischungsvorgänge näherungsweise beschreiben kann, was somit die Aufstellung einer Mischungsweghypothese ermöglicht, die mit genügender Genauigkeit ein grobes Bild verschiedener Aspekte der beobachteten Vorgänge gibt. Es ist somit möglich, zu einer handlichen und folgerichtigen mathematischen Formulierung zu gelangen, mit deren Hilfe allgemeine Eigenschaften von turbulenten Grenzschichten an festen Oberflächen untersucht werden können.

(Received: Dezember 8, 1958.)

Resistance on a Circular Cylinder Due to any Number of Vortices Lying in two Rows

By Miss DURGA ROY, Calcutta, India¹⁾

Introduction

Consider a circular cylinder in a uniform flow with a wake of vortices. The purpose of this paper is to calculate the resistance experienced by the cylinder.

First, a general formula is obtained with no assumptions about the vortices, except that half of them are of strength k , and half of strength $-k$; the result is contained in equations (11) and (16), under the further assumption that the vortices lie symmetrically in two lines parallel to the uniform flow. The formula for the resistance is made more explicit in the double series shown in (20) and (21).

The present work differs from what has been done previously in the fact that it yields an exact expression for the instantaneous resistance, instead of merely a time-average. This is, however, achieved only by limiting attention to the case of a circular cylinder. With reference to calculations of the time-average, the usual treatment [2]²⁾ involves the replacement of a semi-infinite wake by a fictitious wake extending to infinity in both directions, but this procedure may be avoided [1].

Description of the Present Work

Where there are two rows of vortex filaments, in one of which each filament is of vorticity $+k$ and in the other of vorticity $-k$, placed symmetrically to one another; and where a cylinder of radius C has been introduced with its centre at the point of origin in a uniform flow along the x -axis, the complex potential is found with the help of the circle theorem and is given by

$$W = -U \left(z + \frac{c^2}{z} \right) + \frac{ik}{2\pi} \times \left[\sum \log(z - z_m) - \sum \log(z - \bar{z}_{p'}) - \sum \log\left(\frac{c^2}{z} - \bar{z}_m\right) + \sum \log\left(\frac{c^2}{z} - z_{p'}\right) \right],$$

¹⁾ Now at the School of Theoretical Physics, Dublin Institute for Advanced Studies, Dublin, Ireland.

²⁾ Numbers in brackets refer to References, page 508.

where

$$z_m = x_m + i y_m \quad \text{and} \quad \bar{z}_{p'} = x_{p'} - i y_{p'}.$$

W can be written as

$$W = -U \left(z + \frac{c^2}{z} \right) + \frac{i k}{2\pi} \times \sum \left[\log(z - z_m) - \log(z - \bar{z}_p) - \log\left(z - \frac{c^2}{\bar{z}_m}\right) + \log\left(z - \frac{c^2}{z_{p'}}\right) + \log \frac{z_{p'}}{\bar{z}_m} \right]. \quad (1)$$

If X , Y denote the components of thrust acting on the cylinder along the axes x and y then,

$$X - i Y = -i \oint p \, d\bar{z}, \quad (2)$$

where integration is along the boundary of the circle $z\bar{z} = c^2$, where c is the radius of the cylinder.

The pressure p is obtained from BERNOULLI's equation

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2} q^2 + F(t), \quad (3)$$

where q^2 is the square of the velocity, φ the velocity potential and $\vec{q} = -\nabla \varphi$.

To evaluate $F(t)$ we see that at infinity $p = \text{const} = \Pi$ say,

$$q = U \quad \text{and} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad \text{for all } t.$$

Therefore (3) becomes

$$p = \Pi - \frac{1}{2} \rho U^2 - \frac{1}{2} \rho q^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (4)$$

Now,

$$q^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \right), \quad 2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial t}. \quad (5)$$

Substituting the value of p from (4) with the help of (5), equation (2) becomes

$$X - i Y = \frac{1}{2} i \rho \int_c \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \partial z - i \rho \int_c \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial z} \right) \partial z \quad (6)$$

giving the components of the total force on the cylinder. The result (6) is obviously an extension of the Blasius result for the steady case.

In (6) we put

$$X_1 - i Y_1 = \frac{1}{2} i \varrho \int \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \partial z \quad (6a)$$

and

$$X_2 - i Y_2 = -i \varrho \int \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial z} \right) \partial z. \quad (6b)$$

Therefore

$$X - i Y = (X_1 - i Y_1) + (X_2 - i Y_2). \quad (6c)$$

It is easy to identify $X_1 - i Y_1$ as the complex thrust on the cylinder due to two rows of vortices when the vortices are stationary.

On the other hand, $X_2 - i Y_2$ is the contribution to the complex-thrust from the unsteady character of the flow created by the movement of the vortices.

From (1) we get

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{i k}{2 \pi} \left[\sum \frac{1}{z - z_m} - \sum \frac{1}{z - \bar{z}_{p'}} - \sum \frac{1}{z - \bar{\alpha}_m} + \sum \frac{1}{z - \alpha_{p'}} \right],$$

where

$$\bar{\alpha}_m = \frac{c^2}{\bar{z}_m} \quad \text{and} \quad \alpha_{p'} = \frac{c^2}{z_{p'}}. \quad (7)$$

With the help of (7) equation (6a) becomes

$$\left. \begin{aligned} X_1 - i Y_1 = \frac{\varrho k^2}{2 \pi} \sum_m \sum_n \left[\frac{1}{z_m - \alpha_n} - \frac{1}{\bar{z}_m - \alpha_{p'}} - \frac{1}{z_{p'} - \bar{\alpha}_m} + \frac{1}{z_{p'} - \alpha_{q'}} \right] \\ + i \varrho K U C^2 \left(\sum \frac{1}{z_m^2} - \sum \frac{1}{\bar{z}_{p'}^2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

where m, n denote the vortices on the upper row and p', q' on the lower row.

Simplifying (8) finally we get

$$\left. \begin{aligned} X_1 - i Y_1 = \frac{\varrho k^2}{2 \pi} \left[\sum \sum \frac{\bar{z}_m z_{p'} (z_m + \bar{z}_{p'}) - c^2 (\bar{z}_m + z_{p'})}{(z_m z_{p'} - c^2) (\bar{z}_m \bar{z}_{p'} - c^2)} \right. \\ + \sum_m \sum_n \frac{c^2 (\bar{z}_m + \bar{z}_n) - \bar{z}_m \bar{z}_n (z_m + z_n)}{(z_m \bar{z}_n - c^2) (\bar{z}_m z_n - c^2)} \\ + \sum_m \sum_n \frac{c^2 (z_{p'} + z_{q'}) - z_{p'} z_{q'} (\bar{z}_{p'} + \bar{z}_{q'})}{(z_{p'} \bar{z}_{q'} - c^2) (\bar{z}_{p'} z_{q'} - c^2)} \\ \left. + \sum_m \frac{\bar{z}_m}{z_m \bar{z}_m - c^2} + \sum_{p'} \frac{z_{p'}}{z_{p'} \bar{z}_{p'} - c^2} \right] \\ + i \varrho K U C^2 \left(\sum_m \frac{1}{z_m^2} - \sum_{p'} \frac{1}{\bar{z}_{p'}^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

If the vortices on the upper and lower row move symmetrically, then (8) can be written as

$$\left. \begin{aligned} X_1 - i Y_1 &= \frac{q k^2}{2 \pi} \sum_m \sum_n \left[\frac{1}{z_m - \alpha_n} - \frac{1}{z_m - \alpha_n} - \frac{1}{z_m - \alpha_n} + \frac{1}{z_m - \alpha_n} \right] \\ &\quad + i q K U C^2 \left(\sum \frac{1}{z_m^2} - \sum \frac{1}{\bar{z}_m^2} \right) \\ &= \frac{q k^2}{2 \pi} \sum_m \sum_n \left[(z_m - z_m) - (\alpha_n - \alpha_n) \right] \\ &\quad \left\{ \frac{1}{(z_m - \alpha_n)(z_m - \alpha_n)} - \frac{1}{(z_m - \alpha_n)(z_m - \alpha_n)} \right\} \\ &\quad + i q K U C^2 \left(\sum \frac{1}{z_m^2} - \sum \frac{1}{\bar{z}_m^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

As the vortices are symmetric in (10), replacing m by n in the first exponent of (10), adding and dividing by 2, and simplifying, we get

$$\left. \begin{aligned} X_1 - i Y_1 &= \frac{q k^2}{4 \pi} \sum_m \sum_n \frac{q k^2}{4 \pi} \\ &\quad \cdot \sum \sum \left[(z_m - z_m)(z_n - z_n - c^2) + (z_n - z_n)(z_m - \bar{z}_m - c^2) \right] \\ &\quad \cdot \left\{ \frac{1}{(z_m - \bar{z}_n - c^2)(\bar{z}_m - z_n - c^2)} - \frac{1}{(z_m - z_n - c^2)(\bar{z}_m - \bar{z}_n - c^2)} \right\} \\ &\quad + i q K U C^2 \sum \left(\frac{1}{z_m^2} - \frac{1}{\bar{z}_m^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

From (1) again, with the help of the boundary condition we get

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{i k}{2 \pi} \left[\sum \frac{\dot{z}_m}{z - z_m} + \sum \frac{\dot{z}_{p'}}{z - z_{p'}} + \sum \frac{\dot{z}_m}{z - z_m} - \sum \frac{\dot{z}_{p'}}{z - z_{p'}} \right] - \frac{\partial w}{\partial t} \quad (12)$$

From (12)

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t} \right) \quad (13)$$

and from (6b) and (13) we get

$$X_2 - i Y_2 = -i q \int_c \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial z} \right) dz \quad (14)$$

Eliminating \bar{z} from the above integral (14) with the help of $z \bar{z} = c^2$ we get

$$X_2 - i Y_2 = -i K q C^2 \left(\sum \frac{\dot{z}_m}{z_m^2} - \sum \frac{\dot{\bar{z}}_{p'}}{\bar{z}_{p'}^2} \right) \quad (15)$$

Adding (9) and (15) we finally get $X - i Y$.

In the case when the vortices move symmetrically then (15) becomes

$$X_2 - i Y_2 = i k \varrho c^2 \left(\sum \frac{\dot{z}_m}{z_m^2} - \sum \frac{\dot{\bar{z}}_m}{\bar{z}_m^2} \right). \quad (16)$$

Summing (16) and (11) we finally get $X - i Y$.

In order to find out the velocities of the vortices we take the classical velocity which is given by

$$- \frac{\partial w_1}{\partial z} \bigg|_{z=z_m} = u_m - i v_m = \dot{x}_m - i \dot{y}_m = \dot{z}_m, \quad (17)$$

where

$$w_1 = w - \frac{i k}{2 \pi} \log(z - z_m).$$

From (1), when the vortices move symmetrically, with the help of (17) we get

$$\frac{\dot{z}_m}{z_m} = - \frac{i k}{2 \pi} \left[\sum_{m \neq n} \frac{1}{z_m - z_n} - \sum_n \frac{1}{z_m - z_n} + \sum_n \frac{\bar{z}_n}{c^2 - z_m \bar{z}_n} - \sum_n \frac{z_n}{c^2 - z_m z_n} \right] + U \left(1 - \frac{c^2}{z_m^2} \right)$$

and

$$\dot{z}_m = \frac{i k}{2 \pi} \left[\sum_n^{m \neq n} \frac{1}{z_m - z_n} + \sum_n \frac{z_n}{c^2 - \bar{z}_m z_n} + \sum_n \frac{z_n}{c^2 - \bar{z}_m z_n} - \sum_n \frac{\bar{z}_n}{c^2 - z_m \bar{z}_n} \right] + U \left(1 - \frac{c^2}{z_m^2} \right). \quad (18)$$

Therefore with the help of (15) and (18)

$$\begin{aligned} X_2 - i Y_2 = & \frac{\varrho k^2 c^2}{2 \pi} \left[\sum_m \sum_n^{m \neq n} \frac{z_m \bar{z}_m (z_m + \bar{z}_m) - (z_n \bar{z}_n^2 + \bar{z}_n z_m^2)}{(z_m - z_n) (\bar{z}_m - \bar{z}_n) z_m^2 \bar{z}_m^2} \right. \\ & - \sum_m \sum_n \frac{z_m \bar{z}_m (z_m + \bar{z}_m) - (z_n z_m^2 + \bar{z}_n \bar{z}_m^2)}{(\bar{z}_m - z_n) (z_m - \bar{z}_n) z_m^2 \bar{z}_m^2} \\ & + \sum_m \sum_n c^2 \frac{(z_m^2 \bar{z}_n + z_m^2 \bar{z}_n) - z_m \bar{z}_m z_n \bar{z}_n (z_m + \bar{z}_m)}{z_m^2 \bar{z}_m^2 (c^2 - z_m \bar{z}_n) (c^2 - \bar{z}_m z_n)} \\ & \left. - \sum_m \sum_n c^2 \frac{(z_m^2 \bar{z}_n + z_n z_m^2) - z_m \bar{z}_m z_n \bar{z}_n (z_m + \bar{z}_m)}{z_m^2 \bar{z}_m^2 (c^2 - z_m z_n) (c^2 - \bar{z}_m \bar{z}_n)} \right] \\ & - i K \varrho U C^2 \sum_m \left(\frac{1}{z_m^2} - \frac{1}{\bar{z}_m^2} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Then finally $X - i Y$ is obtained by summing (11) and (19).

Now if the vortices be arranged in such a way that

$$z_m = m a + \frac{1}{2} i b \quad \text{and} \quad \bar{z}_n = n a - \frac{1}{2} i b,$$

then substituting this value expression (11) becomes

$$\left. \begin{aligned} X_1 - i Y_1 &= -\frac{\rho k^2}{2\pi} \\ &\times \sum_m \sum_n \left\{ \frac{(m-n)(mn a^2 + \beta)}{(mn a^2 - \beta)^2 - \frac{1}{4} a^2 b^2 (n-m)^2} \left\{ (mn a^2 + \beta)^2 + \frac{1}{4} a^2 b^2 (n-m)^2 + b^2 c^2 \right\} \right. \\ &\quad \left. + 2 \rho K U C^2 a b \sum \frac{m}{\left(m^2 a^2 + \frac{1}{4} b^2 \right)^2} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

The expression (2) is convergent, as

$$\begin{aligned} &\sum_m \sum_n \left\{ \frac{(m-n)(mn a^2 + \beta)}{(mn a^2 - \beta)^2 - \frac{1}{4} a^2 b^2 (n-m)^2} \left\{ (mn a^2 + \beta)^2 + \frac{1}{4} a^2 b^2 (n-m)^2 + b^2 c^2 \right\} \right\} \\ &< \sum_m \sum_n \frac{(m+n)}{(mn a^2 + \beta)^3} < \sum_m \sum_n \frac{m+n}{m^3 n^3 a^6} < \sum_m \sum_n \frac{m+n}{m^3 n^3}, \\ \text{i. e. } &< \sum_m \sum_n \left(\frac{1}{m^2 n^3} + \frac{1}{m^3 n^2} \right). \end{aligned}$$

But both the series

$$\sum_m \sum_n \frac{1}{m^2 n^3} \quad \text{and} \quad \sum_m \sum_n \frac{1}{m^3 n^2}$$

are convergent; again, as the series

$$\sum_m \frac{1}{m^3}$$

is convergent the U depending series in $X_1 - i Y_1$ is also convergent and therefore $X_1 - i Y_1$ is convergent, when m and n both take an infinite number of values.

Taking the values z_m, z_n etc., expression (19) becomes

$$\begin{aligned} X_2 - i Y_2 &= -\frac{\rho k^2 c^2}{2\pi} \\ &\times \left[\sum_m \sum_n \frac{(m^2 a^2 + \frac{1}{4} b^2) 2 m a - (m^2 a^2 - \frac{1}{4} b^2) 2 n a - m a b^2}{(m-n)^2 a^2 \left(m^2 a^2 + \frac{1}{4} b^2 \right)^2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_m \sum_n \frac{\left(m^2 a^2 + \frac{1}{4} b^2\right) 2 m a - \left(m^2 a^2 - \frac{1}{4} b^2\right) 2 n a + m a b^2}{\left(m^2 a^2 + \frac{1}{4} b^2\right)^2 \{(m-n)^2 a^2 + b^2\}} \\
& + \sum_m \sum_n \frac{c^2 \left\{ 2 n a \left(m^2 a^2 - \frac{1}{4} b^2\right) + m a b^2 \right\} - \left(m^2 a^2 + \frac{1}{4} b^2\right) \left(n^2 a^2 + \frac{1}{4} b^2\right) 2 m a}{\left(m^2 a^2 + \frac{1}{4} b^2\right)^2 \left\{ c^4 + \left(m^2 a^2 + \frac{1}{4} b^2\right) \left(n^2 a^2 + \frac{1}{4} b^2\right) - 2 c^2 \left(m n a^2 + \frac{1}{4} b^2\right) \right\}} \\
& - \sum_m \sum_n \frac{c^2 \left\{ 2 n a \left(m^2 a^2 + \frac{1}{4} b^2\right) - m a b^2 \right\} - \left(m^2 a^2 - \frac{1}{4} b^2\right) \left(n^2 a^2 + \frac{1}{4} b^2\right) 2 m a}{\left(m^2 a^2 + \frac{1}{4} b^2\right)^2 \left\{ c^4 + \left(m^2 a^2 - \frac{1}{4} b^2\right) \left(n^2 a^2 + \frac{1}{4} b^2\right) - 2 c^2 \left(m n a^2 - \frac{1}{4} b^2\right) \right\}} \\
& - 2 \varrho K U C^2 a b \sum \frac{m}{\left(m^2 a^2 + \frac{1}{4} b^2\right)^2} .
\end{aligned}$$

It can also be shown that expression (21) is convergent, when both m and n take an infinite number of values, and expressions (20) and (21) are both real.

Therefore, when there are an infinite number of vortices which move symmetrically on two parallel rows, where the distance between the two vortices of same strength on one row is $2a$, and the distance between the two parallel rows is b , then the force experienced by the cylinder in a uniform flow is along the x -axis and is given by $X - i Y$, which is nothing but the sum of the two expressions (20) and (21) respectively.

In another paper the author will discuss the result that is here obtained and also the case when the vortices are placed asymmetrically following the laws of the Kármán vortex street.

Acknowledgment

My thanks are due to Dr. N. L. GHOSE for the suggestion of the problem.

REFERENCES

- [1] J. L. SYNGE, Proc. Roy. Irish Acad. [A] 37, 95 (1927).
- [2] L. M. MILNE-THOMSON, *Theoretical Hydrodynamics* (1955).
- [3] L. FÖPPL, *Wirbelbewegung hinter einem Kreiszyylinder*, Sitzber. k. bayr. Akad. Wiss. 1913.

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird der unterschiedliche Widerstand an einem Kreiszyylinder berechnet, der in einem steten Strom angebracht ist und von einer Anzahl von Wirbelbewegungen in zwei Reihen begleitet ist.

(Received: December 30, 1958.)

Über die Kondensation verschiedener Dämpfe bei adiabatischer Expansion

VON SERGIO BERNASCONI¹⁾ und GEORG GOTSCH²⁾, Locarno-Monti

1. Einleitung und Problemstellung

Verwendete Symbole

- dp Druckänderung;
 I an der Photozelle wirksame Strahlungsintensität zu einem beliebigen Zeitpunkt [erg/cm² · s];
 I_0 wie I , jedoch zu Beginn der Expansion [erg/cm² · s];
 i van't Hoff'scher Faktor;
 M_i Molekulargewicht des Stoffes i [g/Mol];
 m_i Menge des Stoffes i [g];
 p_0 Atmosphärendruck [dyn/cm²];
 p^* $p_0 + dp$ [dyn/cm²];
 r Radius der Tröpfchen [cm];
 r_{kr} kritischer Gleichgewichtsradius [cm];
 S Übersättigung;
 S_{kr} kritische Gleichgewichtsübersättigung;
 T Temperatur [°K];
 ϱ_i Dichte des Stoffes i [g/cm³];
 σ_{ij} Oberflächenspannung von i gegen j [dyn/cm].

In dieser Arbeit wird die Kondensation verschiedener Dämpfe an Kondensationskernen bei adiabatischer Expansion untersucht. Die in der Literatur bisweilen vertretene Auffassung, dass das Wachstum der Kondensationskerne entlang den Gleichgewichtskurven für Lösungs- bzw. Mischkerne verläuft, geht auf Vorstellungen von THOMSON [1]³⁾, KÖHLER [2] und JUNGE [3] zurück. Ihre analytische Form wird durch die Gleichungen (1) und (2) wiedergegeben, und zwar:

Für Kerne löslicher Substanz durch die Köhler-Gleichung

$$S = \frac{C_1}{r} - \frac{C_2}{r^3} \quad (1)$$

mit

$$C_1 = \frac{2 \sigma_{v/a} M_{\text{H}_2\text{O}}}{\varrho_{\text{H}_2\text{O}} R^* T},$$

¹⁾ Osservatorio Ticinese della Centrale Meteorologica Svizzera.

²⁾ Forschungsstelle am Osservatorio Ticinese der Eidgenössischen Kommission zum Studium der Hagelbildung und der Hagelabwehr.

³⁾ Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 518.

$$C_2 = \frac{3 M_{\text{H}_2\text{O}} m_S}{4 \pi \rho_{\text{H}_2\text{O}} M_S} \text{ für ideale Lösungen,}$$

$$C_2 = i \frac{3 M_{\text{H}_2\text{O}} m_S}{4 \pi \rho_{\text{H}_2\text{O}} M_S} \text{ für dissoziierende Lösungen.}$$

Für Mischkerne, das heisst Kerne, welche zum Teil aus löslicher, zum Teil aus unlöslicher Substanz bestehen, durch die Junge-Gleichung:

$$S = \frac{C_1}{r} - \frac{C_2}{r^3 - r_0^3}. \quad (2)$$

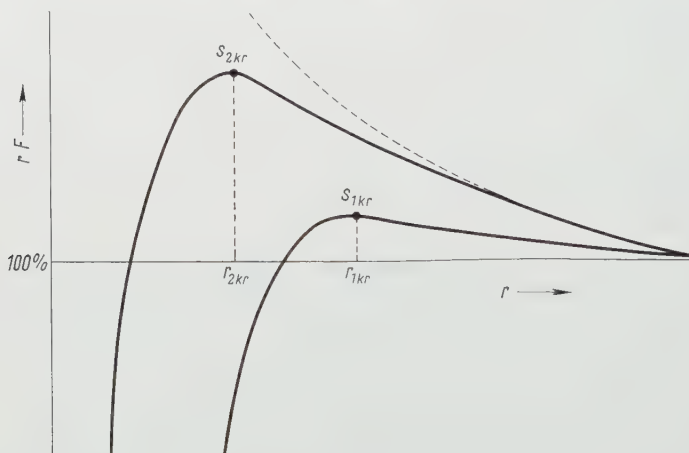
r_0 = Radius des sphärisch angenommenen unlöslichen Bestandteils.

Wie man leicht erkennt, geht Gleichung (2) mit $C_2 = 0$ in die Thomson-Gleichung

$$S = \frac{C_1}{r} \quad (3)$$

für reine Wassertropfchen über, ferner mit $r_0^3 \ll r^3$ in die Köhler-Gleichung. Unter (r_{kr}, S_{kr}) wollen wir den Punkt auf den durch die Gleichungen (1) und (2) gegebenen Kurven verstehen, für welchen die Bedingung

$$\frac{dS}{dr} = 0, \quad \frac{d^2S}{dr^2} < 0 \quad (4)$$



Figur 1

Verlauf der Köhlerschen Gleichgewichtskurven für zwei Kerne schematisch gezeichnet.

erfüllt ist und mit WIELAND [4] den Teil der Kurve, für welchen $r < r_{kr}$ ist, das Stadium der Vorkondensation nennen, jenen Kurventeil mit $r > r_{kr}$ das Stadium der eigentlichen Kondensation. Entscheidend dafür, ob ein Kern in das Stadium der Kondensation eintritt, ist nach dieser Betrachtungsweise die Bedingung, dass die Übersättigung S in der Umgebung eines Kerns mindestens den Betrag der kritischen Übersättigung S_{kr} erreicht haben muss, wobei diese nur von der Grösse

und der stofflichen Zusammensetzung des Kerns abhängt. Die skizzierte Theorie berücksichtigt weder die Diffusion noch die Wärmeleitung.

Nach der gegebenen Darstellung können bei einem Vorgang, durch welchen eine kernhaltige Luftprobe um einen gewählten Betrag S_i übersättigt wird, nur jene Kerne in das Stadium der Kondensation eintreten, deren kritische Übersättigung $S_{kr} \leq S_i$ ist. JUNGE [5] folgert aus eigenen Beobachtungen im wesentlichen dasselbe Verhalten der Kondensationskerne. Er übersättigt eine kernhaltige Luftprobe durch eine kleine, adiabatische Expansion, fotografiert die dabei entstehenden Tröpfchen und komprimiert sofort wieder auf das Ausgangsvolumen. Diesen Vorgang wiederholt er mit stets grösser werdenden Expansionsstufen. Um ein Ausregnen der Tröpfchen zu verhindern, lässt er die Kompression in kürzester Zeit auf die Expansion folgen. Aus den Ergebnissen dieses Experimentes folgert JUNGE, dass eine 10prozentige Übersättigung erforderlich ist, um etwa 50% aller «Kerne zu aktivieren» (diesen Ausdruck verwendet man üblicherweise für das Überschreiten des kritischen Radius). Hingegen ergab ein von WIELAND [4] mit einer Mischwolkenkammer durchgeführtes Experiment, dass bei einem natürlichen Aerosol bereits Übersättigungen von $\leq 1,2\%$ genügen, um 1000 bis 10000 Tröpfchen/cm³ ausregnen zu lassen.

Kerndichten *gleicher* Grössenordnung wurden am Messort auch anhand von längeren Messreihen mit dem kleinen Scholzschen Kernzähler und dem automatischen Kernzähler nach VERZAR gefunden. Die mit einem Scholzschen Zähler und gleichzeitig mit einer Mischwolkenkammer ausgeführten Messungen von GOTSCH [6] liessen ebenfalls feststellen, dass weniger als 1%, Übersättigung ausreicht, um mehr als 50% aller Kerne zu aktivieren. Diese Übersättigung ist demnach um eine Zehnerpotenz kleiner als jene von JUNGE, welcher Widerspruch einen der Verfasser [6] veranlasste, erneut auf die Bedingungen hinzuweisen, unter denen die Gleichungen (1) bis (4) zulässig sind. Wesentlich an ihnen ist, dass sie Gleichgewichtsbeziehungen darstellen, die die Zeit nicht enthalten, welcher Umstand notwendigerweise bei der Deutung von Experimenten berücksichtigt werden muss. Unterhalb der Sättigungsfeuchte kann dieser Vorschrift ohne weiteres nachgekommen werden. Tatsächlich sind die Gleichungen (1) bis (4) bis zu Feuchten von nahezu 100% experimentell bestätigt worden (siehe ausführliche Literatur unter [7]).

Bei Überschreiten der Feuchtesättigung ist die den Kernen zur Kondensation zur Verfügung stehende Zeit beschränkt. Dauer und Ausmass der Kondensation werden dabei durch Diffusionsvorgänge bestimmt, nach deren Ablauf sich wieder ein Gleichgewichtszustand einstellt. In neuerer Zeit ist verschiedentlich versucht worden, dieser Tatsache gerecht zu werden, indem man bei Berechnung der Kondensationsvorgänge die Diffusion und die Wärmeleitung berücksichtigte [8, 9].

Die diesen Rechnungen zugrunde gelegten Modelle eignen sich jedoch nicht zum Vergleich mit den nachfolgend beschriebenen Experimenten, weil die dabei angenommenen Zustandsänderungen so langsam verlaufen, dass man sie mit einer kleinen Expansionskammer nicht nachahmen kann.

Bei dem eben erwähnten Experiment von JUNGE ist die Übersättigung bei allen höheren Expansionsstufen stets über die Aktivierungssättigung der wirksamsten Kerne hinaus gesteigert worden (sofern verschiedene aktive Kerne existieren), und zwar in so kurzer Zeit, dass die Tröpfchen noch nicht aussedimentieren konnten. Wie man aber bei allen Experimenten mit Expansionskammern bis anhin einwandfrei beobachtet hat, beteiligen sich unabhängig von ihrer Aktivität alle Kerne gleichzeitig an der Wasseraufnahme, so dass man sich füglich fragen kann, ob das von JUNGE angenommene verschiedenartige Verhalten der verschiedenen Kerne bei diesen Messungen zu Recht besteht.

MACHE [10] bewies mit einer von ihm ersonnenen Vorrichtung, dass die durch adiabatische Expansion gebildeten Nebeltröpfchen sich ausserordentlich rasch aufbauen und bei Kompression ebenso rasch wieder verdampfen und so einem Druckwechsel bis zu $33\frac{1}{3}$ Hz zu folgen vermögen. Diese Beobachtung führte ihn dazu, eine so schnelle Folge von Kondensation und Verdampfung anzunehmen, dass nach seiner Auffassung die Luftprobe sich nur im Zustande der Feuchtesättigung befindet und somit keine Übersättigung in Erscheinung tritt.

Da MACHE nur Nebel im Moment der grössten Kompression bzw. der stärksten Expansion beobachtete, genügen seine Versuche nicht, zu entscheiden, ob nur eine Auslese oder die Gesamtheit der Kerne sich an der Nebelbildung beteiligen. Ausserdem erhebt sich die Frage, wie rasch Nebelbildung und Druckänderung aufeinander folgen.

2. Die Messapparatur

Die zur Erfüllung der angedeuteten Aufgabe entwickelte Messapparatur gestattete, sowohl die adiabatische Zustandsänderung der Luftprobe als auch die Trübung eines die Luftprobe durchstrahlenden Lichtbündels infolge Nebelbildung als Funktion der Zeit zu ermitteln. Damit kennen wir auch die Trübung (das heisst die Tropfenbildung) als Funktion der Zustandsänderung der Luftprobe.

Das Schema der Messapparatur ist in Figur 2 dargestellt. Als Druckmessgerät diente ein Philips-Druckdifferenzgeber PR 6000 F, welcher mit einem Quecksilbermanometer geeicht worden war. Dieser wandelte eine Druckdifferenz in eine elektrische Spannung um, welche der Druckdifferenz innerhalb $\pm 2,5\%$ linear folgte; die Spannung wurde mit einem Philips-Kathodenstrahloszillographen GM 5666 gemessen. Die tiefste Eigenfrequenz des Gebers lag bei 190 Hz, so dass statische und dynamische Messungen bis etwa 100 Hz ohne nennenswerte Verzerrungen möglich sind. Die Figuren 3 bzw. 4 zeigen Aufnahmen des Mess- bzw. Registrierteils der Apparatur.

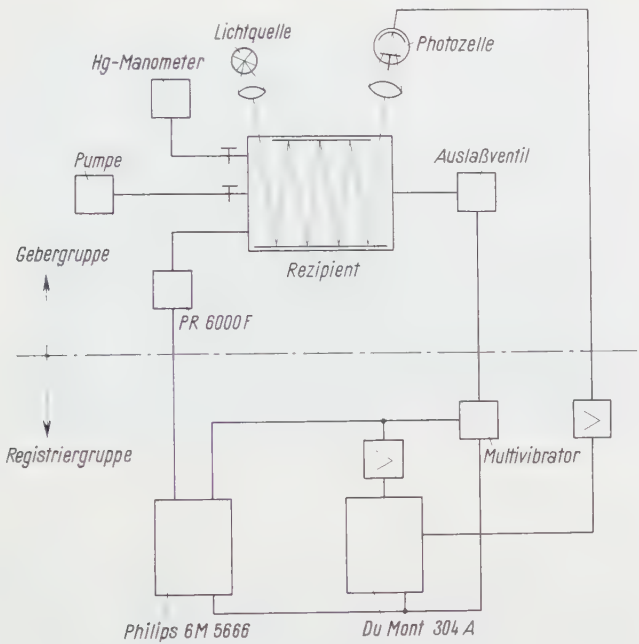
Messung der Extinktion

Ein paralleles Strahlenbündel wurde zwischen zwei im Expansionsgefäss befindlichen Spiegeln mehrfach reflektiert, so dass eine Weglänge des Lichtes zwischen 60 und 200 cm eingestellt werden konnte. Als Lichtquelle diente eine Glühlampe mit 25 W Volleistung, welche aus Batterien gespeist wurde. Nach Durchlaufen des Rezipienten traf der Lichtstrahl die Vakuumphotozelle (Philips 90 CV), welche über einen Verstärker eine der Änderung der Lichtintensität proportionale Spannung an einen Dumont-Kathodenstrahloszillographen 304 A gab. Durch geeignete Massnahmen ist überprüft worden, dass das System Photozelle-Verstärker in dem Bereich

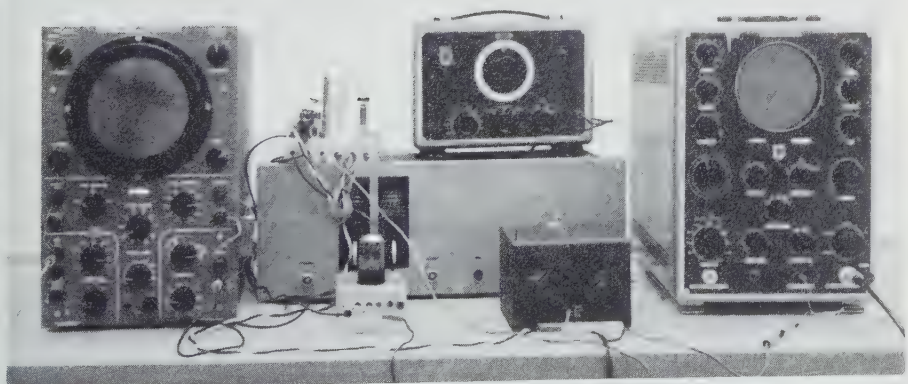
$$1 \geq \frac{I}{I_0} \geq 3 \cdot 10^{-3}$$

linear arbeitete, wobei I_0 die Intensität des ungetrübten, I diejenige des durch die Wolke getrübten Lichtes bedeutet. Die Bezugsspannung am Verstärker konnte beliebig eingestellt und auf diese Weise die ganze Schirmhöhe des Oszillographenbildes ausgenutzt werden.

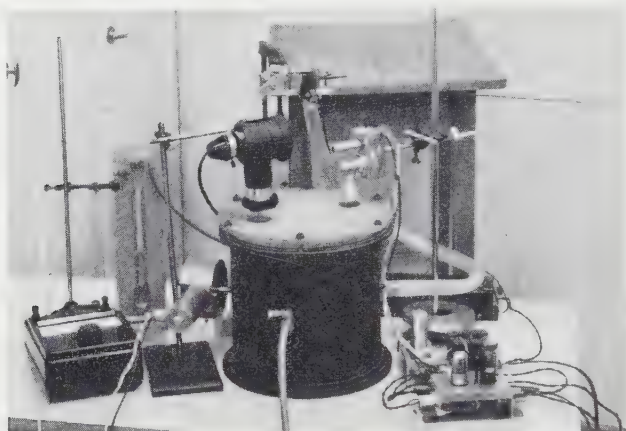
Um die Gleichzeitigkeit von Druck- und Extinktionsmessung zu gewährleisten, erfolgte das Ingangsetzen der Anlage durch eine auf dem Schlagbolzenprinzip arbeitende Vorrichtung. Diese schaltete zunächst über ein Verzögerungsrelais einen Multivibrator ein, welcher einen positiven und nach 10 ms einen negativen Spannungsschoss erzeugte. Der erste Spannungsschoss schaltete die einmalige Zeitablenkung



Figur 2
Prinzipschaltbild der Messapparatur.



Figur 3
Aufnahme der Registriergruppe.



Figur 4

Aufnahme der Gebergruppe.

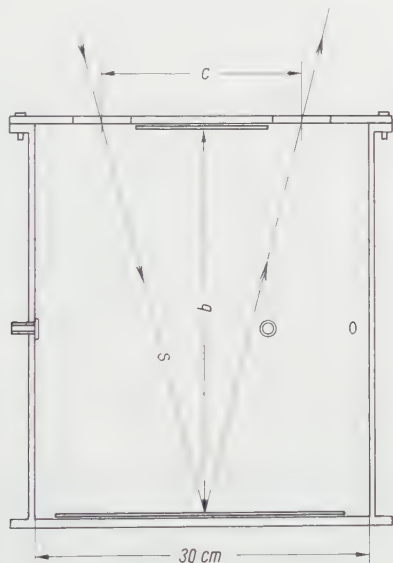
der beiden Kathodenstrahloszillographen ein, während der zweite in deren Z-Ablenkung eingespeist wurde; dadurch wird nach 10 ms Laufzeit auf den Strahlwegen beider Oszillographen gleichzeitig eine Lichtmarke angebracht. Zur Festlegung des zeitlichen Verlaufs der Strahlablenkung ist beiden Oszillographen eine bekannte Frequenz überlagert und sowohl Strahlverlauf wie Eichfrequenz fotografiert worden. Zur Erzeugung der Eichfrequenz diente ein Philips-RC-Generator GM 2315; in einigen Fällen verwendeten wir dazu die Eichspannung der Kathodenstrahloszillographen.

Weniger als 0,1 ms nach dem Einschalten des Multivibrators öffnete der Schlagbolzen das Öffnungsventil. Am Kathodenstrahloszillographen konnte kontrolliert werden, ob der Beginn der Strahlablenkung genau mit dem Beginn der Druckänderung zusammenfiel. Die Innehaltung dieser Bedingung ist für die Auswertung der Aufnahmen wichtig, da die Zeitablenkung am Dumont-Kathodenstrahloszillographen (für das Schreiben der Extinktion) in den ersten 10 ms nicht linear ist.

Das Expansionsgefäß

Als Expansionsgefäß wurde der in Figur 5 skizzierte Zylinder verwendet, mit welchem das Manometer, das Öffnungsventil (über eine kurze Schlauchleitung zur Vermeidung der Übertragung von Erschütterungen beim Öffnen), die Pumpe (über einen Absperrhahn) und der Druckgeber verbunden waren. Weiter befand sich im Zentrum des Expansionsgefäßes ein Thermoelement (Lötstelle leichter als 10^{-3} g), dessen thermische Trägheit, verglichen mit der Einstellzeit des Siemens-Lichtmarkengalvanometers, vernachlässigbar klein war. Im Deckel waren zwei Gläser für den Ein- und Austritt des Lichtstrahles angebracht. Komplanar mit Deckel und Grundfläche sind zwei Spiegel für die Mehrfachreflexion des Lichtstrahles zur Vergrößerung der Weglänge des Lichtes befestigt. Bei Untersuchungen der Wasserdampfkondensation mussten die Spiegel und Gläser gegen Beschlagen durch einen Anstrich von «Permaklar» geschützt werden. Dieser Schutz genügte, um die Intensitätsänderung des Lichtes infolge Wasserabscheidung an besagten Oberflächen

$< 1\%/min$ zu halten, welcher Wert, verglichen mit der durch Nebelbildung hervorgerufenen Intensitätsänderung des Strahles, die auch bei den langsamsten Expansionen $> 10^0_{00}/10^{-4} min$ beträgt, von vernachlässigbarer Grösse war. Bei Untersuchungen mit Benzin und Azeton waren Schutzmassnahmen nicht notwendig, weil ein Beschlagen der Gläser und Spiegel nicht beobachtet werden konnte. Das Auslassventil wurde so dimensioniert, dass es durch Einbau von Blenden möglich war, den Druckausgleich über eine Druckänderung von 190 mm Hg (stets bezogen auf p^*) wählbar innerhalb 300 ms bis 6 s vorzunehmen.



Figur 5

Skizze des Expansionsgefässes.

3. Durchführung der Experimente und die Messergebnisse

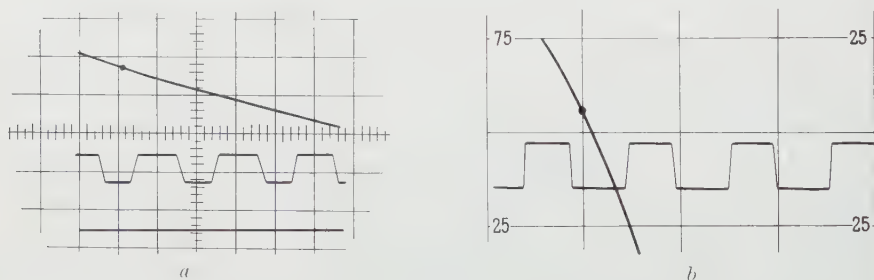
Der zylindrische Teil des Rezipienten wurde (von Öffnungen für die Verbindung abgesehen) mit Fliesspapier ausgekleidet. Dieses ist mit der zu kondensierenden Flüssigkeit benetzt worden. Auch der Boden des Rezipienten wurde mit der zu untersuchenden Flüssigkeit belegt. Hierauf ist im verschlossenen, normale Zimmerluft enthaltenden Rezipienten mit befeuchteter Luft ein Überdruck von 190 mm Hg hergestellt worden. Bei Untersuchungen mit Benzin und Azeton wurde die Kompressionsluft vor Eintritt in den Rezipienten über eine Kühlfalle mit $-14^{\circ}C$ geleitet, um störende Einflüsse des Wasserdampfes bei der Kondensation auszuschalten. Nach Erreichen der gewünschten Kompression erfolgte jedesmal eine Prüfung darüber, ob die Anzeige des Druckgebers der Eichkurve entsprach. Danach wurde abgewartet, bis die Erwärmung infolge Kompression sich im Rezipienten bis auf mindestens $0,1^{\circ}C$ ausgeglichen hatte, was einige Minuten benötigte.

Unter der Annahme, dass mit der gleichen Geschwindigkeit auch die Sättigung angenähert wurde, können wir voraussetzen, dass unmittelbar vor Beginn der Ex-

pansion eine relative Feuchte von etwa 99%, geherrscht hat. Ein völliger Temperatúrausgleich benötigte mindestens eine Stunde. Eine so lange Wartezeit erwies sich aber ungünstig, weil sich in diesem Falle bereits eine erhebliche Abnahme der Kerndichte im Rezipienten zeigte. Von wenigen Versuchen abgesehen, wurde daher der Nachteil eines geringen Defizits bis zum Erreichen der Sättigung in Kauf genommen.

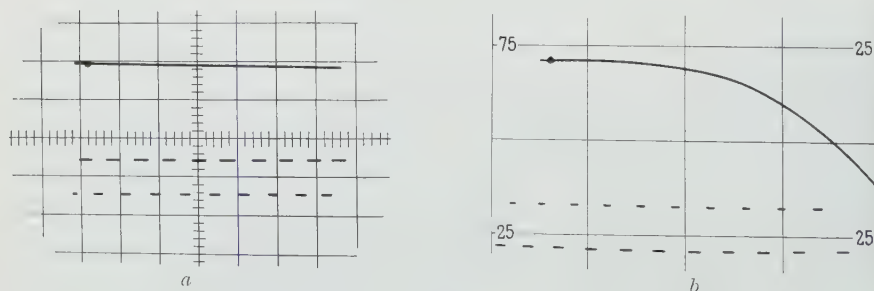
Expansion und die Registrierung an den beiden Kathodenstrahloszillographen sind in der oben beschriebenen Weise ausgeführt worden. Eine grössere Expansionszeit als 6 s stellte sich als unzuweckmässig heraus, da nach etwa 10 s die Wärmeübergänge die Messungen zu beeinflussen begannen. Für das Verständnis der Bildung natürlicher Wolken wären aber gerade kleinere Expansionsgeschwindigkeiten von besonderem Interesse gewesen.

Die Figuren 6 bis 9 geben eine Auslese aus den angefertigten Aufnahmen. Und zwar ist in Figur 6 der Verlauf von Extinktion und Druckabnahme bei einer schnellen Expansion, in Figur 7 bei einer langsamen Expansion von wasserdampfhaltiger Luft wiedergegeben. In Figur 8 ist eine langsame Expansion von benzinhaltiger, in Figur 9 eine schnelle Expansion von azetonhaltiger Luft gezeigt. Die verwendete Eichfrequenz war bei allen vier Aufnahmen 50 Hz; 190 Torr Druckänderung ergaben auf dem Oszillographen eine Änderung von 46 mm; bei den Figuren 6, 7 und 9 entsprach die Intensitätsänderung $0 \leq I \leq I_0$ 15 cm, bei der Figur 8 25 cm Strahlablenkung.



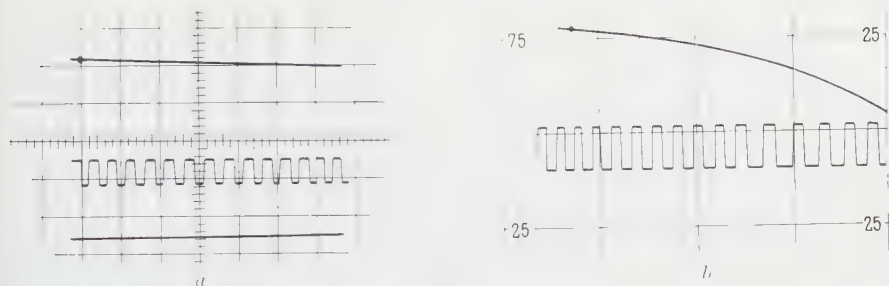
Figur 6

Schnelle Expansion wasserdampfhaltiger Luft:
a zeitlicher Verlauf der Druckänderung; b zeitlicher Verlauf der Extinktion.



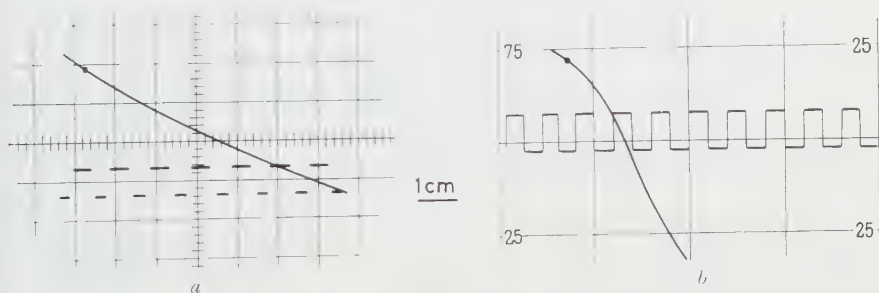
Figur 7

Langsame Expansion wasserdampfhaltiger Luft:
a zeitlicher Verlauf der Druckänderung; b zeitlicher Verlauf der Extinktion.



Figur 8

Langsame Expansion benzindampfhaltiger Luft:

a zeitlicher Verlauf der Druckänderung; *b* zeitlicher Verlauf der Extinktion.

Figur 9

Schnelle Expansion azetondampfhaltiger Luft:

a zeitlicher Verlauf der Druckänderung; *b* zeitlicher Verlauf der Extinktion.

Figur 6 demonstriert besonders deutlich, wie schnell die Kondensation erfolgt. Nach 10 ms ist die Lichtintensität an der Photozelle bereits um 10%, nach 20 ms um 33% reduziert. Die Tropfenbildung folgt der Druckänderung so rasch, dass eine zeitliche Verschiebung beider Größen nicht mehr feststellbar ist. Die Schreibbreite des Strahles entspricht dem zeitlichen Auflösungsvermögen der Aufnahme und liegt bei etwa 1 ms. Dies ist genau die gleiche Zeit, die beim Ablauf der Druckänderung benötigt worden ist, um die Feuchtigkeit im Innern des Gefässes von 99% auf Sättigungsfeuchte zu steigern. Nach 10 ms war das Verhältnis $dp/p^* = 0,0165$ (mit $p^* = 920$ Torr), nach 20 ms war $dp/p^* = 0,03$.

Die Druckänderung, mit welcher der in Figur 7 gezeigte Vorgang verlief, war grössenordnungsmässig 100mal langsamer als bei der Figur 6. Hier erkennen wir deutlich, dass innerhalb der ersten 50 ms die Zunahme der Kern- bzw. Tröpfchengrösse so gering blieb, dass sie keine Trübung des Lichtes bewirkte, wobei das Verhältnis dp/p^* in dieser Zeit etwa 0,005 betrug. Unter der Voraussetzung, dass die Zustandsänderung bis zum Erreichen der Sättigungsfeuchte trockenadiabatisch verläuft, berechnet man, dass die Druckänderung gerade ausreichend war, um die relative Feuchte von 99,4% auf Sättigungsfeuchte zu steigern. Nach weiteren 120 ms ist $dp/p^* \sim 0,008$ und die Lichtintensität an der Photozelle um etwa 22% geschwächt. Ein Vergleich mit Figur 6 lässt erkennen, dass bei der langsamen Expansion die Trübung etwa viermal so rasch erfolgt wie bei der schnellen Expansion.

Aus diesen Beobachtungen an Wassertropfen kann man zweierlei schliessen:

1. Dass es lediglich apparativ bedingt war, wenn bei den Versuchen von MACHE die oberste Frequenz, bei welcher man eine Nebelbildung noch beobachten konnte, bei $33\frac{1}{3}$ Hz lag. Aus der oben gefundenen Zeitdifferenz, nach welcher bei schnellsten Expansionen bereits eine deutliche Trübung festzustellen ist, ergibt sich, dass die Nebelbildung Druckänderungen bis etwa 200 Hz zu folgen vermocht hätte, wenn anstelle einer einmaligen Expansion ein mit gleicher Geschwindigkeit periodisch veränderlicher Druck angewendet worden wäre.

2. Da bei den Figuren 6 und 7 etwa die gleiche Anzahl an Kernen mit einem kleinen Scholzschen Kondensationskernzähler ($8000\text{--}9000/\text{cm}^3$) gezählt worden ist, kann man aus der verhältnismässig langsameren Ausbildung der Extinktion mit zunehmender Expansionsgeschwindigkeit ersehen, dass bei sehr grossen Expansionsgeschwindigkeiten der Ablauf der Kondensation durch Diffusionsvorgänge beherrscht und begrenzt wird.

Eine Möglichkeit, die Aufnahmen quantitativ auszuwerten, wird an anderer Stelle beschrieben werden.

Bei den Versuchen mit Azeton und Benzin ist im wesentlichen das gleiche Verhalten wie bei den Versuchen mit Wasser beobachtet worden; die durch Benzindolken bewirkte Extinktion scheint etwas schneller, jene von Azetonnebeln hervorgerufene Trübung etwas weniger rasch zu erfolgen als die Trübung bei Wasserwolken.

Die oben beschriebenen Befunde sind im wesentlichen bei allen Aufnahmen festgestellt worden. Damit erkennen wir als wichtigstes Ergebnis der vorgenommenen Messungen:

Bei langsamen Expansionen hinkt die Wolkenbildung hinter der Druckänderung um eine kleine Zeitdifferenz von etwa 50 ms nach. Diese selbe Zeit wird jedoch grössenordnungsmässig gerade beansprucht, um die Feuchte vom Ausgangswert auf den Sättigungswert zu bringen. Bei schnellen Expansionen wird dagegen der Sättigungswert so schnell erreicht, dass im wesentlichen keine Aussagen über den Ablauf der Kondensation bis zur Sättigung mehr möglich sind, da das zeitliche Auflösungsvermögen des benutzten Registrierverfahrens dazu nicht genügt. Auch beeinträchtigte bei schnellen Expansionen die Trägheit des Diffusionsvorganges bereits die Kondensationsgeschwindigkeit.

Der Firma Philips AG, Zürich, möchten wir für die kostenfreie Überlassung eines Druckdifferenzgebers, eines RC-Generators sowie eines Kathodenstrahloszillographen zur Durchführung der Versuche danken.

Für das fördernde Interesse, welches Herr Professor Dr. R. SÄNGER, ETH, Zürich, und der Leiter des Osservatorio Ticinese, Herr J. C. THAMS, dieser Arbeit entgegengebracht haben, erlauben wir uns, an dieser Stelle unseren besonderen Dank auszusprechen.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] W. THOMSON, *On the Equilibrium of Vapour at a Curved Surface of Liquid*, Proc. Roy. Soc. Edinb. 7 (1), 63 (1870).
- [2] H. KÖHLER, Geofys. Publ. II (1923), Nr. 1 und Nr. 6.
- [3] CHR. JUNGE, Ann. Met. 3, 129 (1950).
- [4] W. WIELAND, Z. angew. Math. Phys. 7, 428 (1956).
- [5] CHR. JUNGE, Beitr. Geophys. 46, 108 (1936).
- [6] G. GOTSCH, Geof. pura e applicata 42 (1959/I).
- [7] B. J. MASON, *The Physics of Clouds* (Clarendon Press, Oxford 1957).
- [8] W. E. HOWELL, J. Met. 6, 134 (1949).

- [9] W. A. MORDY und C. ROTH, Vortrag am 3. Symposium über Kondensationskerne in Cambridge, erscheint demnächst in Tellus.
- [10] H. MACHE, Met. Z. 50, 393 (1933).

Summary

In accordance with KÖHLER's theory, considerable supersaturation is needed to get the entire body of condensation nuclei to grow into droplets; the degree of saturation is determined by the size of the individual nuclei and their solubility in the condensed liquid. Since it is known that in expansion meters all the atmospheric particles which count as condensation nuclei do in fact grow into droplets, it may be assumed that the designated supersaturation in the expansion chambers is achieved for at least a short space of time. The formation of the theoretically correct degree of supersaturation requires, however, that once the moisture saturation has been exceeded condensation should markedly lag behind pressure variation, in order to allow time for the requisite supersaturation to develop.

Experiments designed to test this question have established that condensation follows extraordinarily quickly on variation of pressure after moisture saturation has been exceeded. Condensation is also virtually uninfluenced by the choice of vapour used. At very high expansion speeds the condensation process is governed by the operative laws of diffusion. Measurements indicate that the degrees of supersaturation occurring in the expansion chambers lie considerably below the level of critical saturation even for the smallest nuclei.

(Eingegangen: 17. Februar 1959.)

Untersuchungen über die partielle Oxydation von pulverförmigem Kupferoxydul zu Kupferoxyd

VON PETER BRÜESCH, Zürich¹⁾

1. Problemstellung

Die nachstehenden Untersuchungen über die partielle Oxydation von pulverförmigen Cu_2O zu CuO sind im Zusammenhang mit Messungen über die Eisbildungsaktivität durchgeführt worden. Sowohl Cu_2O als auch CuO sind in der Literatur²⁾ als Eisbildungskerne bekannt, das heisst, sie vermögen bei einer verhältnismässig hohen Temperatur die Vereisung der Wassertröpfchen eines unterkühlten Nebels einzuleiten. Es wird vermutet, dass die Oberfläche der Eisbildungskerne entscheidend an der Eiskeimwirksamkeit beteiligt ist. Um die Rolle der Oberfläche abzuklären, kann zum Beispiel versucht werden, die Oberflächen der Kerne auf möglichst übersichtliche Weise zu stören und den Einfluss dieser Störung auf die Eiskeimaktivität festzustellen. Die naheliegendste Störung besteht in der partiellen Oxydation des Cu_2O zu CuO . In der vorliegenden Arbeit wird das Ziel verfolgt, jedes einzelne Teilchen des pulverförmigen Cu_2O mit einer zusammenhängenden CuO -Schicht messbarer Dicke zu umgeben.

¹⁾ Forschungsstelle für Physik der Atmosphäre an der ETH.

²⁾ R. SÄNGER, *The Mechanism of Ice-Forming Nucleability*, Bull. Obs. Puy de Dôme 75 (1958).

2. Die partielle Oxydation

Voraussetzung für die homogene partielle Oxydation ist die Dispergierung des Cu_2O -Pulvers in die das Pulver zusammensetzenden Teilchen. Vorversuche haben gezeigt, dass grössere Konglomerate nicht homogen oxydiert werden können, da sich der Sauerstoff nur an der Oxydation der äusseren Teilchen beteiligt, während die inneren Teilchen des Konglomerates im Oxydationsschatten liegen. Die Dispergierung der Teilchen erfolgt mit einer sogenannten Windsichtungsapparatur: Ein senkrecht aufsteigender Luftstrom führt die Teilchen durch ein konisches Glasgefäss, so dass die Luftgeschwindigkeit von unten nach oben stetig abnimmt. Die Luftgeschwindigkeit ist so gewählt worden, dass die die Sichtungsapparatur verlassenden Teilchen Durchmesser von 1 bis $2\ \mu$ aufweisen. Der die Sichtungsapparatur verlassende Luftstrom führt die dispergierten Teilchen durch einen zylindrischen Oxydationsofen von 100 cm Länge und 7 cm Durchmesser. Die partiell oxydierten Teilchen werden schliesslich auf einem Glasfilter aufgefangen. Alle Versuche sind mit konstanter Sauerstoffkonzentration (Sauerstoffgehalt der Luft) und konstanter, äusserst geringer Teilchenkonzentration durchgeführt. Die Luftgeschwindigkeit im Ofen beträgt etwa 15 cm/min, so dass die Teilchen genügend Zeit haben, die Maximaltemperatur im Ofen anzunehmen. (Die im folgenden angegebenen Temperaturen bedeuten die Maximaltemperaturen im Oxydationsofen.) Der für die partielle Oxydation interessante Temperaturbereich liegt für diese Versuchsanordnung zwischen 330°C und 470°C .

3. Die Analyse der partiell oxydierten Proben

Bei der partiellen Oxydation von Cu_2O zu CuO sind folgende 4 Fälle denkbar:

- Jedes Cu_2O -Teilchen ist von einer zusammenhängenden CuO -Schicht umgeben und daher vollständig von dieser eingekapselt;
- die CuO -Schicht ist nicht zusammenhängend; das heisst, nur ein Teil der Oberfläche ist durch CuO zugedeckt;
- es entsteht ein Gemisch von reinem Cu_2O - und reinen CuO -Teilchen;
- Kombinationen von a), b) und c).

Nimmt man an, dass bei der partiellen Oxydation eine zusammenhängende CuO -Schicht entsteht (Fall a), deren Schichtdicke überall mindestens so gross ist wie die Eindringtiefe der Elektronenstrahlen, so zeigen die Elektronenbeugungsdiagramme dieser Präparate nur die CuO -Linien, während die Röntgendiagramme bei genügend dicker CuO -Schicht sowohl CuO - als auch Cu_2O -Linien aufweisen. Bei den Möglichkeiten b), c) und d) enthalten dagegen die Elektronenbeugungsdiagramme CuO - und Cu_2O -Linien. Erst die Kombination von Röntgen- und Elektronenbeugungsuntersuchungen lassen also eindeutige Resultate erwarten.

Um Aufschluss über das bei der partiellen Oxydation auftretende Mengenverhältnis von Cu_2O zu CuO zu erhalten, werden Mischungsproben hergestellt, beginnend mit 1,5% Cu_2O , 98,5% CuO bis 98,5% Cu_2O , 1,5% CuO , insgesamt 15 Proben. Es zeigt sich, dass die Nachweisempfindlichkeit des Cu_2O im CuO etwa 1,5%, diejenige des CuO im Cu_2O etwa 3% beträgt. Aus den Intensitätsverhältnissen der Cu_2O - und CuO -Linien, die aus den Diffraktometerdiagrammen bestimmt werden können, ergibt sich eine Eichkurve, die gestattet, zu jedem Intensitätsverhältnis das zugehörige Mischungsverhältnis zu entnehmen. Auf diese Weise lässt sich aus den beobachteten Intensitätsverhältnissen der partiell oxydierten Proben deren Mengenverhältnis zwischen CuO und Cu_2O bestimmen.

Röntgen- und Elektronenbeugungsuntersuchungen erfolgen direkt auf den auf den Glasfilter angelagerten partiell oxydierten Cu_2O -Teilchen. Die gleichen Glas-

filter können sowohl im Röntgendiffraktographen als auch im Elektronendiffraktographen verwendet werden, was die Vergleichsmöglichkeit wesentlich verbessert.

Die folgende Serie der Diffraktometerdiagramme (Figur 1) zeigt die Intensitätsverhältnisse der partiell oxydierten Cu_2O -Proben im Temperaturbereich zwischen 320°C und 470°C . Für die Intensitätsvergleiche ziehen wir die beiden stärksten Cu_2O -Linien (111) und (200) sowie die beiden stärksten CuO -Linien ($\bar{1}11$) und (111) miteinander in Vergleich. Um genauere Intensitätsvergleiche zu gewinnen, wird der Winkelbereich zwischen 34° und 44° in oszillierender Bewegung zweimal abgetastet.

Das Oxydationsdiagramm Nr. 1 der Figur 1 mit einer Oxydationstemperatur von 330°C zeigt nur die beiden Cu_2O -Linien (111) und (200). Der prozentuale Anteil des CuO ist deshalb gemäss der Eichkurve kleiner als 3%. Das Oxydationsdiagramm Nr. 2 der Figur 1 mit einer Oxydationstemperatur von 350°C enthält bereits Andeutungen der beiden stärksten CuO -Linien (111) und ($\bar{1}11$). Das zugehörige Intensitätsverhältnis ergibt dabei einen CuO -Gehalt von etwa 3%. Wird die Oxydationstemperatur weiter gesteigert, so nimmt der CuO -Gehalt rasch zu. Bei 470°C sind keine Cu_2O -Linien mehr nachweisbar.

Die Entscheidung, ob es sich um den erwünschten Fall a) oder um einen der 3 andern Fälle handelt, bringen nun die Elektronenbeugungsdiagramme. Das Studium der Anlagerung des CuO auf den Cu_2O -Teilchen ist vor allem für kleine prozentuale CuO -Gehalte interessant, das heisst im Temperaturbereich zwischen 320°C und 360°C . Die 6 Aufnahmen der Figur 2 zeigen die Elektronenbeugungsdiagramme im kritischen Temperaturbereich.

Das erste Elektronenbeugungsdiagramm mit einer Oxydationstemperatur von 320°C stellt das Diagramm des reinen Cu_2O mit den folgenden Interferenzen dar:

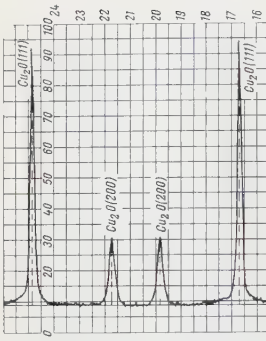
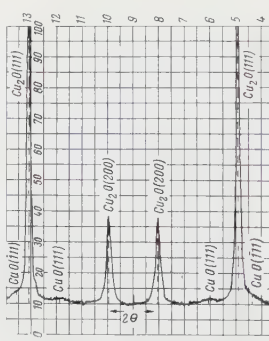
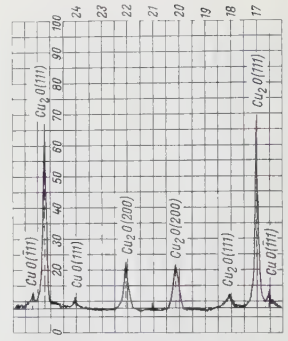
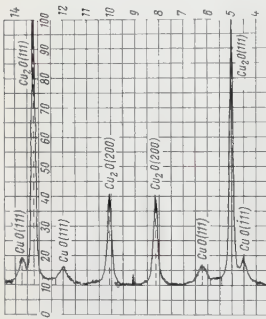
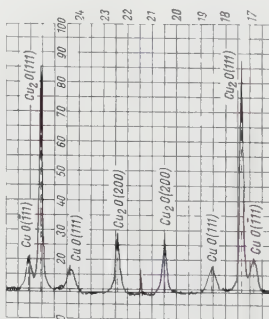
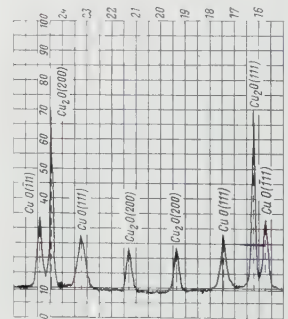
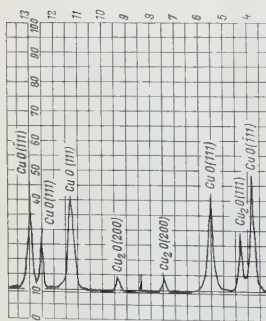
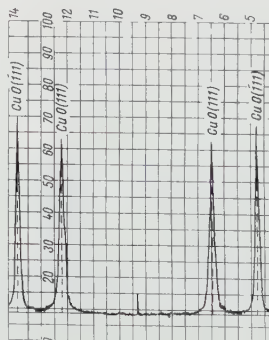
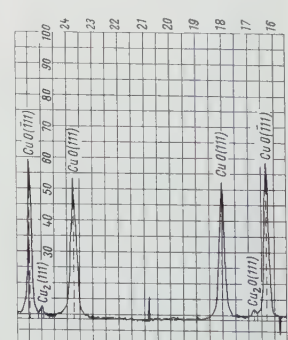
hkl :	(110)	(111)	(200)	(211)	(220)	(311)
I_{rel} :	9	100	37	1	27	17

Dabei bedeuten hkl die Millerschen Indizes der Netzebene hkl , und I_{rel} relative Intensitäten.

Das letzte der Elektronenbeugungsdiagramme mit einer Oxydationstemperatur von 360°C zeigt das Diagramm des reinen CuO mit den folgenden Interferenzen:

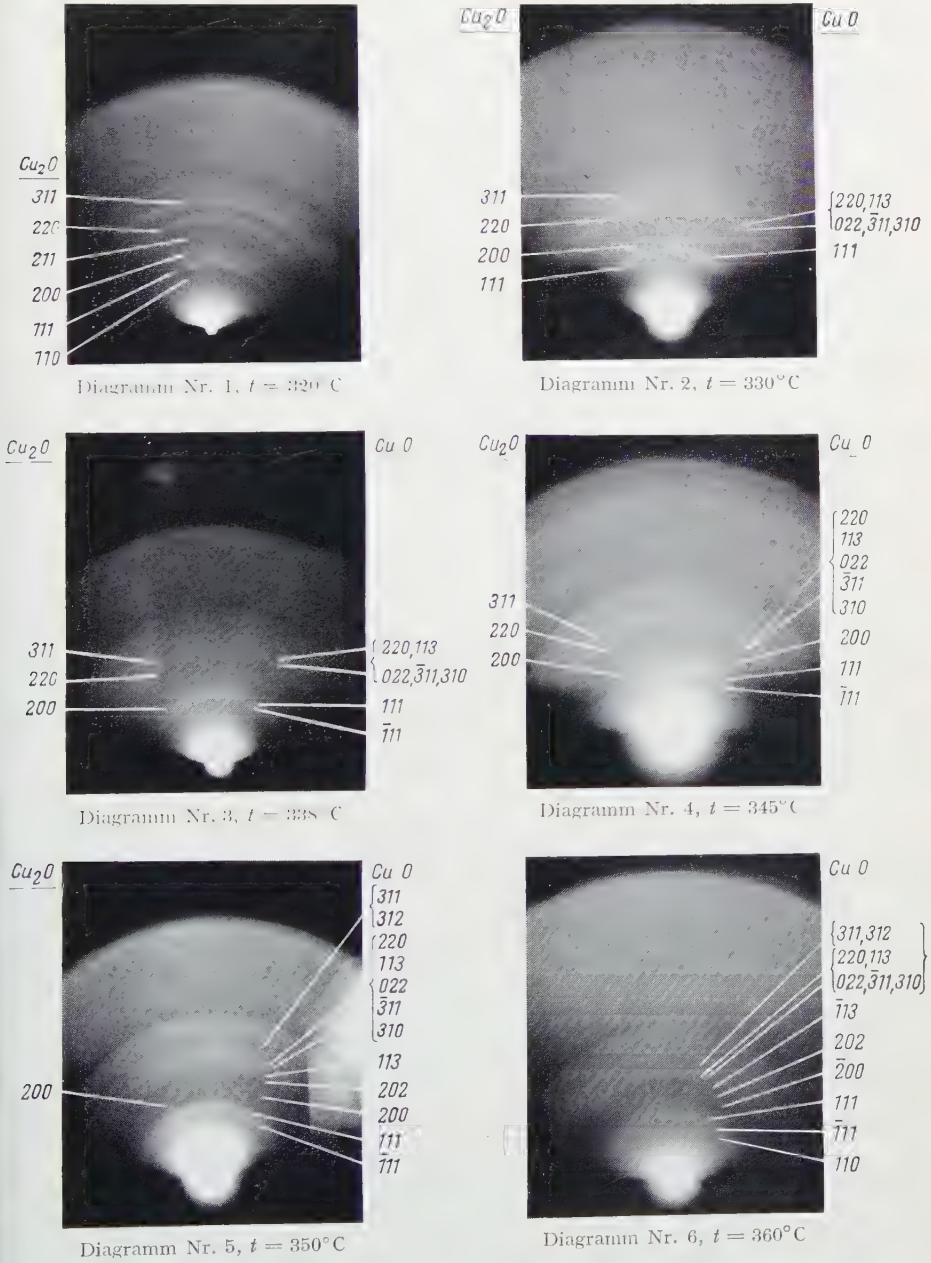
hkl :	(110)	($\bar{1}11$)	(111)	($\bar{2}00$)	(202)	($\bar{1}13$)	
I_{rel} :	12	100	96	30	25	20	
hkl :	(022)	($\bar{3}11$)	(310)	(220)	(113)	(311)	(312)
I_{rel} :	12	15		19		7	

Da die Linien (022), ($\bar{3}11$), (310), (220), (113) sehr nahe beieinander liegen, erscheinen sie als eine einzige diffuse Linie. In den Diagrammen Nr. 2 bis 5 werden mit steigenden Temperaturen die Cu_2O -Linien schwächer, die CuO -Linien stärker. So macht sich im 2. Diagramm mit $t = 330^\circ\text{C}$ bereits die CuO -Linie (111) bemerkbar sowie die aus den obengenannten 5 Komponenten bestehende Interferenzlinie. Das 3. Diagramm mit $t = 338^\circ\text{C}$ zeigt schon ziemlich deutlich die beiden stärksten CuO -Linien ($\bar{1}11$) und (111), die aber noch nicht voneinander getrennt erkennbar sind, weil die zwischen ihnen liegende Cu_2O -Linie (111) die Trennschärfe beeinträchtigt. Beim 5. Diagramm treten bereits alle CuO -Linien in Erscheinung, und als einzige Cu_2O -Linie kann nur noch die Linie (200) erkannt werden. Ist die Oxydationstemperatur höher als 350°C (Diagramm Nr. 6 mit $t = 360^\circ\text{C}$), so weist das Beugungsbild nur noch die CuO -Linien auf, während das entsprechende Röntgendiagramm der gleichen Probe (Diagramm Nr. 3, Figur 1) immer noch CuO - und Cu_2O -Linien enthält. Aus der Eichkurve entnehmen wir, dass die Oxydationstemperatur

Diagramm Nr. 1, $t = 330^\circ\text{C}$ Diagramm Nr. 2, $t = 350^\circ\text{C}$
 $31\% \text{ CuO}/97\% \text{ Cu}_2\text{O}$ Diagramm Nr. 3, $t = 360^\circ\text{C}$
 $70\% \text{ CuO}/93\% \text{ Cu}_2\text{O}$ Diagramm Nr. 4, $t = 380^\circ\text{C}$
 $15\% \text{ CuO}/85\% \text{ Cu}_2\text{O}$ Diagramm Nr. 5, $t = 400^\circ\text{C}$
 $30\% \text{ CuO}/70\% \text{ Cu}_2\text{O}$ Diagramm Nr. 6, $t = 420^\circ\text{C}$
 $55\% \text{ CuO}/45\% \text{ Cu}_2\text{O}$ Diagramm Nr. 7, $t = 440^\circ\text{C}$
 $80\% \text{ CuO}/20\% \text{ Cu}_2\text{O}$ Diagramm Nr. 8, $t = 460^\circ\text{C}$
 $98\% \text{ CuO}/2\% \text{ Cu}_2\text{O}$ Diagramm Nr. 9, $t = 470^\circ\text{C}$

Figur 1

Röntgendiagramme der partiell oxydierten Proben.



Figur 2

Elektronenbeugungsdiagramme der partiell oxydierten Proben im kritischen Temperaturbereich.

$t = 360^\circ\text{C}$ zu einem CuO -Gehalt von rund 7% führt. Wir stellen damit fest, dass der gefundene CuO -Gehalt von 7% aus einer zusammenhängenden Schicht bestehen muss, welche jedes Cu_2O -Partikel umschliesst.

Ist der CuO -Gehalt hingegen kleiner als 7%, so kann nicht mit Sicherheit auf eine zusammenhängende CuO -Schicht geschlossen werden, denn in diesem Fall zeigen die Elektronenbeugungsdiagramme sowohl CuO - als auch Cu_2O -Linien. Dabei können einerseits die Cu_2O -Interferenzen von freiliegenden Cu_2O -Partien an der Oberfläche herrühren oder andererseits Cu_2O -Linien darstellen, deren zugehörige Schichtdicke kleiner ist als die Eindringtiefe der Elektronenstrahlen. In diesem Fall kann der darunterliegende Cu_2O -Kern ebenfalls zu Cu_2O -Interferenzen Anlass geben. (Der Begriff einer einheitlichen Schichtdicke ist mit Vorsicht anzuwenden, denn es besteht die Möglichkeit, dass bestimmte Netzebenen für den Aufbau der CuO -Schichten besonders günstig sind, andere weniger günstig. Es kann sich also nur um eine mittlere Schichtdicke handeln.)

Eine approximative Berechnung zeigt, dass die mittlere Schichtdicke exponentiell mit der Oxydationstemperatur wächst. Die dünnste, noch nachweisbar zusammenhängende Oxydationsschicht ergibt auf Grund einer approximativen Berechnung eine Schichtdicke von etwa 120 Å.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, Herrn Prof. Dr. R. SÄNGER für die Übertragung der Aufgabe und das grosse Interesse am Fortgang der Arbeit an dieser Stelle herzlich zu danken. Ebenfalls Dank schulde ich Herrn U. KATZ, Mitarbeiter am Laboratorium für Atmosphärenphysik der ETH, für seine wertvollen Ratsschläge, Herrn Prof. Dr. W. EPPRECHT, Abteilung für industrielle Forschung, für seine Anregungen und Überlassung der Elektronenbeugungsapparatur, Herrn Dr. S. STEINEMANN, Laboratoire Suisse de Recherches Horlogères, für die ersten Elektronenbeugungsaufnahmen, sowie Herrn Dr. B. BÖHLEN, Technisch-chemisches Laboratorium der ETH für die ersten Versuche zur partiellen Oxydation und Herrn Dr. W. JUTZI, Gaslaboratorium der EMPA, für die Überlassung der Windsichtungsapparatur.

Summary

X-ray and electron-diffraction tests show that, with the aid of a combined oxidizing oven and air sifting apparatus, it is possible to achieve partial oxidation of the Cu_2O particles in a powder in such a way that each Cu_2O particle is encased within a composite CuO layer. The thinnest CuO layer which can still be shown to be composite has a mean thickness of about 120 Å according to an approximate method of calculation. The procedures adopted for this experiment cannot determine whether still thinner layers are also composite. The thickness of the CuO layers increases exponentially with the oxidation temperature. This work has been undertaken in conjunction with research into the ice-forming nucleability of substances.

(Eingegangen: 8. Dezember 1958.)

Ermittlung der Wurzeln einer Gleichung 4. Grades durch Aufspalten in quadratische Faktoren

VON SILVIO CHRISTELLER, Basel

Eine Gleichung 4. Grades mit reellen Koeffizienten der Gestalt

$$x^4 + a x^2 + b x + c = 0$$

lässt sich immer in zwei reelle quadratische Faktoren zerlegen:

$$x^4 + a x^2 + b x + c = (x^2 + s x + p) (x^2 - s x + q) = 0. \quad (1)$$

Diese Aufspaltung wird im folgenden durchgeführt nach einem Probiervverfahren, das eine Spezialisierung eines von ZURMÜHL [1]¹⁾ und BUCKINGHAM [2] benutzten Verfahrens ist, wobei aber zur Verbesserung der Näherungswerte die Methode von NEWTON-RAPHSON benutzt wird.

Aus (1) folgt durch Koeffizientenvergleich unmittelbar

$$p + q - s^2 = a, \quad (2)$$

$$s (q - p) = b, \quad (3)$$

$$p q = c. \quad (4)$$

Man wählt nun p und berechnet aus (4) $q = c/p$ und dann

$$s = \frac{b}{q - p} = \frac{b}{c/p - p}$$

aus (3). Schliesslich kontrolliert man, ob die Relation (2) erfüllt ist, das heisst, man prüft, ob die Testfunktion

$$T(p) = p + q - s^2 - a = \frac{c}{p} + p - \left(\frac{b}{c/p - p} \right)^2 - a \quad (5)$$

gleich 0 ist²⁾.

Differenziert man $T(p)$ nach p , so ergibt sich

$$T'(p) = 1 - \frac{c}{p^2} - \left(\frac{b}{c/p - p} \right)^2 \frac{2}{p} \cdot \frac{c/p + p}{c/p - p}. \quad (6)$$

Die Berechnung der Ableitung macht hier gar keine Schwierigkeiten und ergibt sich ohne wesentliche Mehrarbeit³⁾.

¹⁾ Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 527.

²⁾ Auch HARTREE geht vom Ansatz (1) bis (4) aus, wählt aber s und verbessert durch inverse Interpolation; vgl. [3], S. 220-221.

³⁾ Das in [1] angegebene Verfahren geht von drei Werten einer Testfunktion für drei äquidistante Werte der unabhängigen Variablen aus. Verbessert wird durch quadratisches Eingabeln, da die Berechnung der Ableitung der Testfunktion zu umständlich ist. In [2] wird dagegen linear interpoliert.

Durch grobes Probieren findet man immer einen Näherungswert für p in einem der Intervalle $(-k, 0)$ oder $(0, k)$, wo zur Vereinfachung $k = \sqrt{|c|}$ gesetzt wurde. Ist nämlich $c > 0$, dann folgt aus (5)

$$T(+0) = +\infty, \quad T(k) = -\infty$$

und aus (6)

$$T'(p) < 0 \quad (0 < p < k).$$

In $(0, k)$ existiert daher genau ein p_0 mit $T(p_0) = 0$.

Im Falle $c < 0$ hat man zwei Fälle zu unterscheiden. Zunächst beachte man, dass

$$T(+0) = -\infty, \quad T(-0) = +\infty, \quad T(-\infty) = -\infty$$

ist. Ferner gilt nach (4) und (5)

$$T(-k) = T(k) - s^2 - a.$$

a) Für $T(k) < 0$ existiert in $(-k, 0)$ genau ein p_0 mit $T(p_0) = 0$ wegen $T'(p) > 0$ für $-k < p < 0$.

b) Für $T(k) > 0$ gibt es mindestens ein p_0 in $(0, k)$ mit $T(p_0) = 0$. Unter Umständen ist $T'(p_0)$ sehr klein oder 0. Dann kann man aber p in $(-\infty, -k)$ wählen.

Die ganze Rechnung erfolgt am besten nach einem Schema, wie im folgenden Beispiel (vgl. [1], S. 61):

$$x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2x - 7 = 0. \quad (7)$$

Setzt man $x = y + 0,75$, so erhält man

$$y^4 - 1,375y^2 + 1,625y - 5,32421875 = 0. \quad (8)$$

Somit ist $a = -1,375$, $b = 1,625$ und $c = -5,32421875$. Die beiden Kolonnen für $p = 2$ und $p = 1,75$ wurden mit Hilfe eines Rechenschiebers gerechnet.

	p	2	1,75	1,76	1,762029	1,76203127
①	$q = c/p$	-2,662	-3,055	-3,025124	-3,02164081	-3,02163692
②	$\textcircled{1} + p$	-0,662	-1,305	-1,265124	-1,25961181	-1,25960565
③	$\textcircled{1} - p$	-4,662	-4,805	-4,785124	-4,78366981	-4,78366819
④	$s = b/\textcircled{3}$			-0,339594	-0,33969735	-0,33969747
⑤	$\textcircled{4}^2$	0,121	0,114	0,115324	0,11539428	0,11539437
⑥	$T = \textcircled{2} - \textcircled{5} - a$	0,682	-0,044	-0,005448	-0,00000609	-0,00000002
⑦	$\textcircled{1}/p$			-1,718820	-1,71486440	
⑧	$2/p$			1,136363	1,13505509	
⑨	$\textcircled{2}/\textcircled{3}$			0,264386	0,26331495	
⑩	$\textcircled{5} \textcircled{8} \textcircled{9}$			0,034647	0,03448868	
⑪	$T' = 1 - \textcircled{7} - \textcircled{10}$			2,684173	2,68037572	
⑫	$T/T' = \textcircled{6}/\textcircled{11}$			$-2,029 \cdot 10^{-3}$	$-2,2721 \cdot 10^{-6}$	

Nach zwei Schritten hat man $p = p_0 = 1,76203127$ auf 8 Dezimalen bestimmt, wobei der Fehler höchstens 10^{-8} beträgt.

Damit ist (8) aufgespalten in

$$(y^2 - 0,33969747y + 1,76203127)(y^2 + 0,33969747y - 3,02163692) = 0.$$

Für die Wurzeln findet man

$$y_1 = 0,16984873 + 1,31650396 i ,$$

$$y_2 = 0,16984873 - 1,31650396 i ,$$

$$y_3 = -1,91641264 ,$$

$$y_4 = 1,57671518 ,$$

und damit für die Wurzeln von (7)

$$x_1 = 0,91984873 + 1,31650396 i ,$$

$$x_2 = 0,91984873 - 1,31650396 i ,$$

$$x_3 = -1,16641264 ,$$

$$x_4 = 2,32671518 .$$

Die Summe der Wurzeln (7) beträgt 3,000 000 00 und ihr Produkt – 6,999 999 86.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] R. ZURMÜHL, *Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker*, 2. Aufl. (Springer-Verlag, Berlin 1957), S. 59–62.
- [2] R. A. BUCKINGHAM, *Numerical Methods* (Pitman & Sons, London 1957), S. 271–272.
- [3] D. R. HARTREE, *Numerical Analysis*, 2nd ed. (Clarendon Press, Oxford 1958).

Summary

In order to determine the roots of an algebraic equation of the fourth degree with real coefficients and removed cubic term a method of splitting up in two quadratic factors is used. The method follows in principle a procedure used, e. g. by ZURMÜHL and BUCKINGHAM to determine the coefficients of the quadratic factors, but permits the use of NEWTON-RAPHSON'S method instead of linear or quadratic interpolation.

(Eingegangen: 13. März 1959.)

Varia – Miscellaneous – Divers

ILMAC – Internationale Fachmesse und Fachtagungen über Laboriumstechnik, Messtechnik und Automatik in der Chemie

Basel, 10.–15. November 1959

In Basel findet vom 10. bis 15. November 1959 die ILMAC, internationale Fachmesse und Fachtagungen über Laboriumstechnik, Messtechnik und Automatik in der Chemie, statt. Die Fachtagungen werden vom Schweizerischen Chemikerverband und der Schweizerischen Gesellschaft für Automatik veranstaltet und bilden zugleich die 22. Veranstaltung der Europäischen Föderation für Chemie-Ingenieur-Wesen. Die Fachmesse wird von den Organen der Schweizer Muster-messe durchgeführt.

Im *Programm der Fachtagungen* sind insgesamt 30 Hauptreferate vorgesehen. Es konnten dafür namhafte Vertreter der Wissenschaft und der Praxis aus Belgien, Deutschland, England, Frankreich, Holland, den USA und der Schweiz gewonnen werden. Ergänzend zum eigentlichen Tagungsprogramm sind noch Referate und Demonstrationen der an der Fachmesse beteiligten Firmen vorgesehen.

Die Tagung für Laboratoriums- und Messtechnik (10. und 11. November 1959) ist auf das Gebiet der Chemie begrenzt mit Hauptreferaten über elektrische Methoden, optische Methoden, Trennverfahren und Isotopenmethoden. Das Programm der anschliessenden Tagung über Automatik umfasst die technischen Fragen der Automation in der Verfahrenstechnik der chemischen Industrie und der Lebensmittelindustrie, ferner die wirtschaftlichen Aspekte der Automation sowie die Datenverarbeitung in der Wirtschaft.

Für weitere Auskunft wende man sich an das Sekretariat der ILMAC, Basel 21.

Buchbesprechungen – Book Reviews – Notices bibliographiques

Principles of Modern Physics. Von ROBERT B. LEIGHTON (McGraw-Hill, London 1959). 795 S., 207 Fig.; 97 sh.

Das vorliegende Werk enthält eine klare Einführung in viele der modernsten und interessantesten Teilgebiete der neueren Physik. Als solche treten auf: die Kernphysik mit den verschiedenen Kernmodellen, die Physik der Elementarteilchen einschliesslich der Stransgeness-Theorie von GELL-MANN und NISHIJIMA, das Problem der Paritätsverletzung bei schwachen Wechselwirkungen, die kosmische Strahlung, die Energieerzeugung in Sternen und die Bildung der chemischen Elemente.

Daneben sind auch die klassischen Theorien vertreten in Kapiteln über Atom- und Molekülspektren, die Bändertheorie des Festkörpers und die Röntgenstrahlen.

In Anbetracht der Mannigfaltigkeit des gebotenen Stoffes müssen die formalen mathematischen Entwicklungen auf ein Minimum beschränkt werden. Diese Beschränkung gelingt dem Verfasser oft in ausgezeichnete Weise. Die zwei ersten Kapitel sind der speziellen Relativitätstheorie und der Quantentheorie gewidmet. Das erste dient wohl mehr der Repetition als der Einführung.

Musterhaft sind die knappen historischen Einführungen und die Zusammenfassungen am Ende einzelner Kapitel. Die Schreibweise ist immer klar, lebendig und anregend. Die vielen Übungsaufgaben erlauben dem Leser stets eine Kontrolle seines Verständnisses.

Das Buch kann besonders auch dem Studenten aufs wärmste empfohlen werden.

R. JOST

Colloque National de Magnétisme (Commémoratif de l'œuvre de PIERRE WEISS). (Centre National de la Recherche Scientifique, Paris 1958) 336 S., 174 Abb.; ffrs. 4000.-.

Das Kolloquium zu Ehren von PIERRE WEISS, dem Vater des Ferromagnetismus, vereinigte die französischen Magnetophysiker vom 8. bis 10. Juli 1957 in Strassburg. Mit der leider unvermeidlichen einjährigen Verzögerung ist nun der Tagungsbericht erschienen, der 26 Arbeiten wiedergibt. Ein Drittel des Buches

füllen die drei Hauptvorträge, in welchen die befruchtende Wirkung der Weiss'schen Molekularfeldhypothese auf die weitere Entwicklung der Theorie des Magnetismus gewürdigt wird. NÉEL gibt in seinem Vortrag einen Überblick über die Erfolge der Weiss'schen Vorstellungen und ihre Vervollkommnung durch den Autor selber, der mit Hilfe des lokalen Molekularfeldes das Verhalten von ferromagnetischen und antiferromagnetischen Substanzen erklären konnte. Eine gründliche Einführung in das Gebiet der Weiss'schen Bezirke vermittelt der Vortrag von GUILLAUD und VAUTIER. Die theoretischen Erkenntnisse werden an über zwanzig Photographien von Bitterfiguren diskutiert. PERRIER zeigt in seiner Arbeit, welche mehr oder weniger eine Zusammenfassung seiner Forschungen auf diesem Gebiet darstellt, den Einfluss des Molekularfeldes auf die elektrischen Eigenschaften (Hall-Effekt, Magnetowiderstand) von Ferromagneten. Die übrigen 23 Arbeiten bringen zum Teil neue Messungen und Ergebnisse, zum Teil auch abschliessende Berichte über Untergebiete oder bestimmte Substanzgruppen. Einen breiten Raum nehmen die Untersuchungen an Verbindungen der seltenen Erden, einschliesslich der Gruppe der Granate, ein, während Messungen an den historischen Ferromagneten Eisen und Nickel seltener sind, da diese besonders präzise sein müssen, damit sie etwas Neues bieten können und eine bessere Prüfung existierender Theorien erlauben als die schon von WEISS bestimmten Kurven. Natürlich fehlen auch nicht Arbeiten über Halogenide der Eisengruppe, über Ferrite und Resonanzeffekte. Der Bericht gewährt somit einen umfassenden Einblick in das Forschungsprogramm der französischen Magnetiker, die zur Entwicklung dieses Zweiges der Physik schon immer einen wesentlichen Beitrag leisteten.

F. HULLIGER

Theoretical Mechanics. An Introduction to Mathematical Physics.

Von J. S. AMES und F. D. MURNAGHAN (Dover Publications, London and New York 1958). 462 S., 39 Fig.; \$ 2.00.

Das Werk beginnt mit einem ausführlichen Kapitel über Vektoranalysis und behandelt dann der Reihe nach die Kinematik des starren Körpers, die Dynamik des Massenpunktes und die Kreiselltheorie. Schwingungen und Wellen werden relativ kurz, die analytische Dynamik ausführlicher behandelt, und ein letztes Kapitel führt in die Relativitätsmechanik ein. Das Buch kann als Einführung in die höhere Mechanik bestens empfohlen werden.

H. ZIEGLER

Handbuch der Physik - Encyclopedia of Physics. Herausgegeben von S. FLÜGGE, Bd. 6: *Elastizität und Plastizität* (Springer-Verlag, Berlin 1958). 642 S., 254 Fig.; DM 145.—.

Der Band umfasst in sechs Beiträgen von angelsächsischen Autoren die wichtigsten Kapitel der Kontinuumsmechanik fester Körper mit Ausnahme der nicht-linearen Elastizitätstheorie.

Ein erster Artikel von I. N. SNEDDON und D. S. BERRY, *The Classical Theory of Elasticity*, vermittelt ausgewählte Ausschnitte aus diesem weitläufigen Gebiet. Die Grundgleichungen werden für endliche Deformationen und in der für die Behandlung in krummlinigen Koordinaten geeigneten Tensorschreibweise entwickelt; der Rest des Beitrags beschränkt sich im wesentlichen auf die kartesische Darstellung der Elastizitätstheorie infinitesimaler Verzerrungen. Neben dem Torsionsproblem werden ebene Aufgaben ausführlicher behandelt, vor allem mit der von russischen Mathematikern entwickelten komplexen Methode. Kapitel über räumliche und dynamische Probleme sowie eine kurze Darstellung der thermoelastischen Grundgleichungen beschliessen den Beitrag.

Ein Artikel von H. T. JESSOP, *Photoelasticity*, gibt eine Übersicht über Theorie und Praxis der zwei- und dreidimensionalen spannungsoptischen Verfahren samt Anwendungsbeispielen.

A. M. FREUDENTHAL und HILDA GEIRINGER teilen sich in den Artikel *The Mathematical Theories of the Inelastic Continuum*. FREUDENTHAL gibt eine allgemeine, auch thermodynamische Betrachtungen umfassende Einführung in die heute aktuellen Gebiete der Kontinuumsmechanik und stellt vor allem in physikalischer Sicht die grundlegenden Beziehungen der Viskoelastizität, Plastizität und Viskoplastizität zusammen. HILDA GEIRINGER schliesst eine ausgezeichnete Darstellung der Fragestellungen an, die sich um den Begriff des idealplastischen Körpers gruppieren, und diskutiert ausführlich die mathematischen Verfahren zur Behandlung vorwiegend ebener Probleme mit Anwendungen auf elastisch-idealplastische und starrplastische Körper.

Ein weiterer Beitrag von M. REINER, *Rheology*, schliesst sich an die bekannten Veröffentlichungen des Autors an und orientiert in oft eigenwilliger Darstellung hauptsächlich über die Fragestellungen, die für das Grenzgebiet Fest-Flüssig typisch sind.

Ein kurzer Artikel von G. R. IRWIN, *Fracture*, schildert die Behandlung der Ausbreitung von Rissen im festen Körper mit energetisch-statistischen Verfahren, und schliesslich gibt A. M. FREUDENTHAL unter dem Titel *Fatigue* einen zusammenfassenden Beitrag zum Problem der Ermüdung.

H. ZIEGLER

Dreidimensionale Überschallprobleme der Gasdynamik. Von K.-R. DORFNER ([Ergebnisse der angewandten Mathematik, Heft 3] Springer-Verlag, Berlin 1957). 150 S., 44 Abb.; DM 26.-.

Der Verfasser hat sich zum Ziel gesetzt, die Grundlagen der linearen Methoden zur Berechnung dreidimensionaler stationärer Überschallströmungen unter Verwendung der in vielen Einzelveröffentlichungen verstreuten Untersuchungen systematisch darzustellen. Es handelt sich dabei im wesentlichen um das allgemeine Singularitätenverfahren und um die Methode der Überlagerung kegelsymmetrischer Strömungen. Beide Hauptprobleme werden behandelt, das heisst die Berechnung des Strömungsfeldes, insbesondere der Druckverteilung, bei vorgegebener Geometrie des Tragflügels, und umgekehrt die Bestimmung der Geometrie bei vorgegebener Druckverteilung auf dem Tragflügel.

Dem Charakter der Sammlung entsprechend, ist die Darstellung des Stoffes betont mathematisch gehalten. Das Buch enthält weder numerische Beispiele oder Zahlentafeln noch Versuchsergebnisse, so dass seine praktische Verwendung nur dem mathematisch sehr gut geschulten Aerodynamiker zu empfehlen ist.

Interessant ist die konsequente Anwendung der *Théorie des Distributions* von LAURENT SCHWARTZ zur Darstellung unstetiger Funktionen.

P. DE HALLER

Principles of Geodynamics. Von A. E. SCHEIDEGGER (Springer-Verlag, Berlin 1958). 280 S., 86 Fig.; DM 49.60.

Dieses Buch gibt einen Überblick über die Geschichte, den Aufbau, die Eigenschaften und die Form der Erde. Es werden vor allem die geologischen, ozeanographischen und geophysikalischen Erfahrungstatsachen zusammengestellt und die zu ihrer Erklärung aufgestellten Theorien besprochen.

Das ist offensichtlich eine weitschichtige und umfangreiche Materie. SCHEIDEGGER hat aber durch eine geschickte und mit der notwendigen Kritik gepaarten Auswahl die Grundzüge der Geodynamik in einer Form dargestellt, die neu ist und Anerkennung verdient.

Das Buch ist in folgende Kapitel aufgeteilt: I. *Physiographic and Geological Data Regarding the Earth*. II. *Geophysical Data Regarding the Earth*. III. *The Mechanics of Deformation*. IV. *Effects of the Rotation of the Earth*. V. *Continents and Oceans*. VI. *Orogenesis*. VII. *Dynamics of Faulting and Folding*. VIII. *Dynamics of Other Features*.

Von den gestreiften Theorien sind natürlich einige reine Spekulationen, und es ist auffallend, wie im Grunde genommen wenig durch Tatsachen gesichert ist.

Das Buch ist allen, die sich mit der Erde als Ganzes befassen, vor allem zur Orientierung, sehr zu empfehlen.

MAX WEBER

Handbuch der Physik - Encyclopedia of Physics. Herausgegeben von S. FLÜGGE, Band 51: *Astrophysik II: Sternaufbau* (Springer-Verlag, Berlin 1958). 830 S., 197 Fig.; DM 175.—.

Dieser zweite astrophysikalische Band im Rahmen des Handbuches der Physik gibt eine umfassende Darstellung des Aufbaues der Sterne, wobei in den meisten Beiträgen über den eigentlichen Gegenstand hinaus auch Probleme der Sternatmosphären behandelt werden, jedoch mehr im Sinne einer Ergänzung als einer Duplizierung von Band I (Sternoberflächen, Doppelsterne).

Der Band wird durch eine knappe und übersichtliche Darstellung der Prinzipien des inneren Aufbaues und der Energieerzeugung der Sterne eingeleitet (M. H. WRUBEL). Die Beiträge über das Hertzsprung-Russell-Diagramm (H. C. ARP) und die Häufigkeit der Elemente im Kosmos (H. E. SUESS, H. C. UREY und L. H. ALLER) stellen die wichtigsten beobachtungsmässigen Grundlagen für das Studium der Sternentwicklung zusammen, mit welchem sich der 150 Seiten umfassende Artikel von E. M. und G. BURBIDGE, der das Kernstück des vorliegenden Bandes darstellt, beschäftigt. Entstehung und Entwicklung der Sterne werden von den verschiedenartigsten Aspekten – Kontraktion, Massenabgabe und -aufnahme, Kernreaktionen, Entstehung und Umwandlung der Elemente, Hertzsprung-Russell-Diagramme – beleuchtet. Dass die Resultate dieser jungen Forschungsrichtung noch vielfach widersprechend sind, wundert uns nicht. Der Artikel gibt deshalb weniger als die übrigen eine enzyklopädische Übersicht, dafür viele stimulierende Ausblicke und Möglichkeiten für die künftige Forschung. Der Band schliesst mit einigen meist kurzen Beiträgen über spezielle Sterne und Sternzustände wie die veränderlichen Sterne, die Sternstabilität, die magnetischen Sterne, weisse Zwerge, Novae und Supernovae. Die Ausführungen über Pulsation und Stabilität der Sterne (P. LEDOUX) sind, verglichen mit den andern Beiträgen, unverhältnismässig breit; man wird dies jedoch nicht bedauern, da es den Nichtspezialisten anderweitig schwer fallen würde, sich in dieser spröden Materie einen Überblick zu verschaffen. M. WALDMEIER

Wellenmechanik. Vorlesung von Prof. Dr. W. PAULI, ausgearbeitet von FRITZ HERLACH und HEINZ E. KNOEPFEL (Verlag des Vereins der Mathematiker und Physiker an der Eidgenössischen Technischen Hochschule, Zürich 1959). 134 S., 33 Abb.; sFr. 19.—.

Inhaltlich besteht der Hauptunterschied zwischen dieser Kursvorlesung über unrelativistische Wellenmechanik und dem unrelativistischen Teil von PAULIS berühmtem Handbuchartikel darin, dass hier die prinzipiellen Fragen knapper, die mathematischen Methoden dagegen ausführlicher behandelt werden. So wird unter anderem das Beispiel des harmonischen Oszillators in der Ebene (in Polarkoordinaten) und des Wasserstoffatoms (diskretes und kontinuierliches Spektrum, Lösung

in sphärischen und in parabolischen Koordinaten) durchgerechnet. Die dabei auftretenden mathematischen Funktionen werden eingehend diskutiert. Besonderes Gewicht wird auf die konfluente hypergeometrische Funktion und ihre Spezialfälle gelegt. Weiter wird eine ganze Reihe von Näherungsverfahren behandelt: Neben der zeitunabhängigen und der zeitabhängigen Störungsrechnung die Sattelpunktmethode, die WKB-Methode und bei den Stössvorgängen die Bornsche Näherung und die Methode der partiellen Wellen. Dagegen wird das oft sehr nützliche Variationsprinzip nicht erwähnt.

Der besondere Stil und die Originalität von PAULIS Vorlesung ist bei der Ausarbeitung erhalten geblieben. Der Stoff ist sehr überlegen und elegant dargestellt, doch stellt der knappe Text an den Leser gewisse Ansprüche. Hin und wieder fehlt eine Erklärung, sei es, dass sie vergessen wurde (wie zum Beispiel die Definition der Operatoren \hat{x} , \hat{p}), sei es, dass Kenntnisse vorausgesetzt wurden, die man von einem jungen Studenten eigentlich nicht erwarten kann (eine derartige Lücke klafft im Vollständigkeitsbeweis für die Hermite'schen Polynome). Dafür treten die wesentlichen Punkte, weil oft unbeschwert von mehr nebensächlichen didaktischen Details, besonders deutlich zutage.

Einem Anfänger kann die Durcharbeitung dieser Vorlesung durchaus empfohlen werden, nötigenfalls unter Heranziehung eines der bekannten Lehrbücher; sie wird ihm zu einer überdurchschnittlichen Beherrschung der Wellenmechanik verhelfen. Für den Kenner der Wellenmechanik ist dieses Buch, dank der meisterhaften Darstellung der mathematischen Funktionen, eine wertvolle Ergänzung zum Handbuchartikel. Die Übersichtlichkeit und ein Sachregister machen es auch als Nachschlagewerk geeignet.

A. THELLUNG

Das Mikroskop. *Seine wissenschaftlichen Grundlagen und seine Anwendung.* Von A. EHRLINGHAUS und L. TRAPP (B. G. Teuber Verlagsgesellschaft, Stuttgart 1958). 144 S., 94 Abb.; DM 10.80.

Dem Bearbeiter dieser Neuauflage, Dr. L. TRAPP, Wissenschaftlicher Mitarbeiter der Firma Carl Zeiss, Oberkochen, ist es nicht nur gelungen, dem in Mikroskopikerkreisen bereits bekannten *Ehrlinghaus* ein neues Gesicht zu geben, sondern sie auch auf den heutigen Stand von Wissenschaft und Technik zu bringen. Trotz des grossen Bedienungskomforts moderner Mikroskope sind gewisse Kenntnisse über Funktionen und Leistung für die nutzbringende Anwendung der Instrumente unentbehrlich.

In leichtfasslicher Weise behandelt das Buch zuerst die wichtigsten Begriffe und Grundlagen über Lupe, einfaches Mikroskop und die Abbildungsgeometrie des zusammengesetzten Mikroskopes, einschliesslich die verschiedenen Abbildungsfehler, um nach der wellenoptischen Betrachtung der Abbildung zur mehr praktischen Seite überzugehen.

Neben der Beschreibung der Einrichtungen und Handhabung des Mikroskopes und seiner optischen Systeme ist ein ausführlicher Hauptabschnitt den verschiedenen Beleuchtungs- und Beobachtungsverfahren (einschliesslich Phasenkontrastverfahren) gewidmet. Folgende Kapitel befassen sich mit Hilfsapparaten zum Mikroskop, der binokularen Beobachtung, Messungen an mikroskopischen Präparaten und Leistungsprüfung des Mikroskopes. Der Schlussabschnitt des Buches gibt noch einen Überblick über die Zurichtung mikroskopischer Präparate.

So vermittelt das vorliegende Büchlein besonders auch dem interessierten Laien und Anfänger, ohne mathematische oder physikalische Spezialkenntnisse vorauszusetzen, eine wertvolle Hilfe für die Praxis.

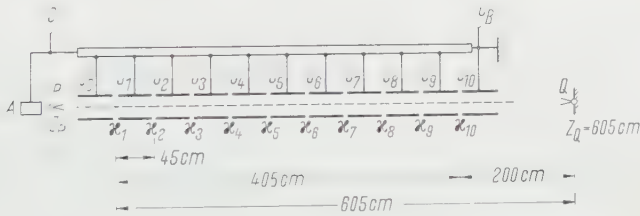
B. ZWICKER

Über die relativistische Elektronenoptik elektrostatischer Beschleuniger

Von ENIS B. BAŞ, LUCIEN PREUSS und WERNER SCHNEIDER, Zürich¹⁾

1. Einleitung

Ein elektrostatischer Partikelbeschleuniger besteht aus einer Kette von Beschleunigungsstufen, zum Beispiel in der Form von Lochblenden- oder Rohr-Immersionslinsen (Figur 1). Die Aufgabe dieser Linsenkette ist erstens die



Figur 1

Prinzipschema eines elektrostatischen Beschleunigers (Abmessungen gelten für ein praktisches Beispiel). $u_1 = U_0/U_1$ usw.

Beschleunigung der von der Partikelquelle A emittierten Ionen bzw. Elektronen auf die Endenergie U_B . Zweitens muss sie den schmalsten Querschnitt des Ionen- bzw. Elektronenstrahles am Eingang im Punkte P auf das Target im Punkte Q abbilden. Die Elektronenoptik dieser Abbildung ist der Inhalt dieser Mitteilung. Die Aufgabe ist, dabei die Beziehung zwischen den Achsenkoordinaten der beiden konjugierten Punkte P und Q aufzustellen, wobei noch die laterale Vergrößerung β und die Winkelvergrößerung γ anzugeben ist.

Für die achsennahen Elektronen- bzw. Ionenbahnen in einem rein elektrischen Feld gilt allgemein folgende Differentialgleichung²⁾:

$$\sqrt{1 + \epsilon \Phi} \Phi \frac{d}{dz} \left[\sqrt{1 + \epsilon \Phi} \Phi \frac{dr}{dz} \right] + \frac{1}{4} (1 + 2 \epsilon \Phi) \Phi'' r = 0. \quad (1)$$

¹⁾ Institut für technische Physik der Eidgenössischen Technischen Hochschule.
²⁾ W. GLASER, *Grundlagen der Elektronenoptik* (Springer, Wien 1952), S. 144.

Φ bezeichnet das elektrische Potential entlang der Achse, und $(1 + \varepsilon \Phi)$ bzw. $(1 + 2 \varepsilon \Phi)$ ist das relativistische Korrekturglied mit

$$\varepsilon = \frac{e}{2 m_0 c^2}. \quad (2)$$

e Ladung des Elektrons bzw. Ions;

m_0 Ruhemasse des Elektrons bzw. Ions;

c Lichtgeschwindigkeit.

Wir erhalten

$$\text{für Elektronen } \varepsilon = 0,978 \cdot 10^{-6} [\text{V}^{-1}];$$

$$\text{für Protonen } \varepsilon = 0,539 \cdot 10^{-9} [\text{V}^{-1}].$$

Für das relativistische Korrekturglied $1 + \varepsilon \Phi$ erhält man somit zum Beispiel bei einem Potential von $\Phi = 5 \cdot 10^6 \text{ V}$

$$\text{für Elektron } 1 + \varepsilon \Phi = 5,88;$$

$$\text{für Proton } 1 + \varepsilon \Phi = 1,0027.$$

Da elektrostatische Beschleuniger nur bis zu einer Spannung von $U_B \approx 5 \cdot 10^6 \text{ V}$ gebaut werden, kann bei den Ionenbeschleunigern die Relativität stets unberücksichtigt bleiben. Hingegen sehen wir, dass bei den Elektronenbeschleunigern der Relativitätsfaktor beträchtliche Werte annehmen kann, so dass es sich hier aufdrängt, über dessen Einfluss Rechenschaft zu geben.

2. Relativistische Linsendaten einer elektrischen Zweirohr-Immersionlinse

Ein elektrostatischer Beschleuniger mit niedriger Stufenzahl, wie es für die Freiluftausführungen üblich ist, besteht aus einer Kette von sogenannten elektrischen Zweirohr-Immersionslinsen. Eine typische Geometrie einer solchen Zweirohrlinse ist in Figur 2 dargestellt. Die elektrischen und geometrischen Parameter der Linse findet man in Figur 2 ebenfalls angegeben. Die Kardinaalelemente der Linse werden in dieser Arbeit wie folgt bezeichnet:

Bildseitig: Brennweite = f' ;

auf die Mittelebene bezogene Brennpunktcoordinate $z_{F'} = F'$;

auf die Mittelebene bezogene Hauptebenencoordinate $z_{H'} = H'$.

Dingseitig: Wie oben, jedoch ohne Strich.

U' bezeichnet die bildseitige und U die dingseitige Elektrodenspannung.

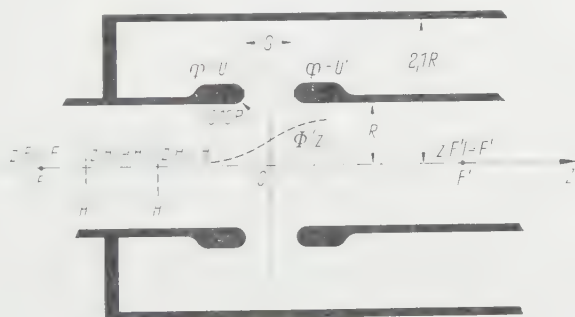
$\kappa = U/U'$ ist der elektrische Linsenparameter; da es sich um eine Beschleunigungslinse handelt, ist stets

$$0 < \kappa < 1.$$

Die Brechkraft einer nicht relativistischen Linse wird durch die beiden Parameter, den elektrischen Parameter und den geometrischen Parameter S/R , bestimmt. Bei den *relativistischen* Linsen kommt noch die Abhängigkeit von U' hinzu. In dieser Arbeit werden wir uns übersichtlichkeithalber nur auf einen Wert des Geometrieparameters,

$$\frac{S}{R} = 0,8,$$

beschränken. Die Ergebnisse für andere S/R -Werte werden in einer späteren Arbeit publiziert.



Figur 2

Geometrie einer typischen elektrischen Zweirohr-Immersionslinse für elektrostatische Beschleuniger.
Brennweiten: $f = z(H) - z(F)$; $f' = z(H') - z(F')$; $f'' = \sqrt{\kappa} f$; $\kappa = U/U'$.

Zur Berechnung der Kardinalelemente der Linse muss man als erstes den Verlauf des Achsenpotentials $\Phi(z)$ kennen. Wir haben diesen Verlauf in einem Widerstandsnetzwerk-Modell nach LIEBMANN³⁾ ermittelt. Die Maschenweite im Netzwerkmodell entsprach $1/20 R$. Der Messbereich entlang der Linsenachse betrug 160 Maschenweiten. Die Potentialverteilung entlang der Linsenachse wurde nur einmal für die Elektroden Spannungen 0 und 1 V gemessen. Bezeichnen wir dieses Potential mit $\psi(z)$,

$$0 < \psi(z) < 1, \quad (3)$$

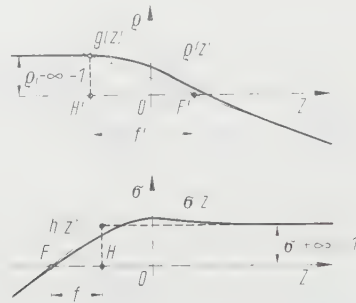
so ergibt sich bei einer vorgegebenen κ und U' für den tatsächlichen Potentialverlauf auf der Linsenachse

$$\Phi(z) = (1 - \kappa) U' \left[\frac{\kappa}{1 - \kappa} + \psi(z) \right]. \quad (4)$$

Die Berechnung von $\Phi(z)$ nach dieser Beziehung wurde in das – im folgenden noch zu besprechende – Rechenprogramm einer elektronischen Rechenmaschine eingebaut.

³⁾ G. LIEBMANN, *Solution of Partial Differential Equation with a Resistance Network Analogue*, Brit. J. appl. Physics 1, 92 (1950).

Zur Berechnung der Kardinalpunkte einer elektrischen Immersionslinse müssen zwei Elektronenbahnen im Linsenfeld durchgerechnet werden, das heisst, wir müssen zwei partikuläre Lösungen der Differentialgleichung (1) bestimmen. Hierfür ist es am zweckmässigsten, zwei besondere Elektronenbahnen zu betrachten: eine von links parallel zur Achse im Abstand 1 einfallende Bahn $\varrho(z)$ und eine von rechts parallel zur Achse im Abstand 1 einfallende Bahn $\sigma(z)$ (siehe Figur 3). Bezeichnen wir die Asymptoten dieser



Figur 3

Hilfsbahnen für die numerische Berechnung der Kardinalpunkte einer Immersionslinse.

Bahnen nach dem Verlassen des Linsenfeldes mit $g(z)$ bzw. $h(z)$, so sind die asymptotischen Kardinalpunkte der Linse gegeben durch:

$$F' = z_g^0, \quad (5)$$

$$f' = \frac{1}{dg/dz}, \quad (6)$$

$$F = z_h^0, \quad (7)$$

$$f = \frac{1}{dh/dz}, \quad (8)$$

wobei z_g^0 und z_h^0 die Schnittpunkte der Geraden g bzw. h mit der z -Achse bedeuten.

Die Differentialgleichung der Bahnen in der Form von Gleichung (1) ist für die numerische Integration nicht sehr geeignet, da dort die zweite Ableitung von $\Phi(z)$ auftritt, was eine zweimalige numerische Differentiation von $\Phi(z)$ verlangt. Es ist deswegen zweckmässig, nach PICHT die Gleichung (1) wie folgt umzuformen: Man führt eine neue Bahnvariable $R(z)$ ein, nach der folgenden Transformationsgleichung:

$$r(z) = \frac{1}{\sqrt[4]{1 + \varepsilon \Phi}} R(z). \quad (9)$$

Für $R(z)$ gilt dann folgende Differentialgleichung:

$$R'' + G \frac{3}{16} \left(\frac{\Phi'}{\Phi} \right)^2 R = 0 \quad (10)$$

mit

$$G(\Phi) = \frac{1 + \frac{4}{3} \Phi (1 + \varepsilon \Phi)}{(1 + \varepsilon \Phi)^2} \quad (11)$$

Bei den nichtrelativistischen Linsen ist $G = 1$, und die Bahngleichung erhält folgende Form:

$$r(z) = \frac{1}{\sqrt[4]{\Phi}} R(z), \quad (12)$$

$$R'' + \frac{3}{16} \left(\frac{\Phi'}{\Phi} \right)^2 R = 0. \quad (13)$$

Für das Verhältnis zwischen der relativistisch gerechneten Bahn $r_R(z)$ und der nichtrelativistisch gerechneten $r_N(z)$ können wir damit schreiben:

$$\frac{r_R(z)}{r_N(z)} = \frac{1}{\sqrt[4]{1 + \varepsilon \Phi}} \cdot \frac{R_R(z)}{R_N(z)} = K \frac{R_R(z)}{R_N(z)} \quad (14)$$

mit

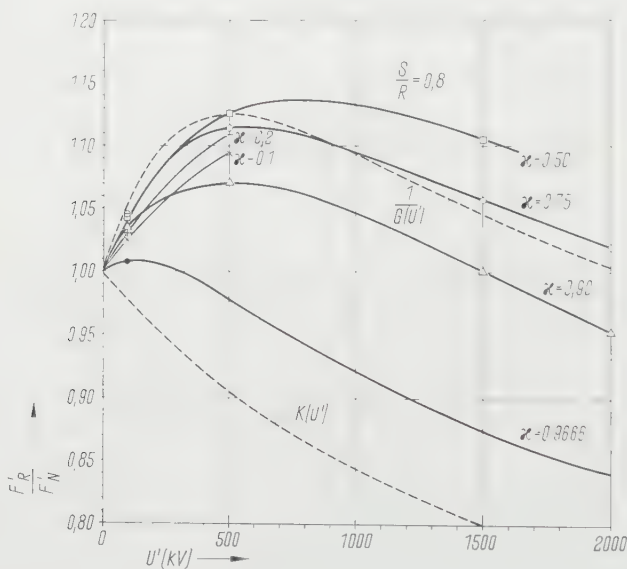
$$K(\Phi) = \frac{1}{\sqrt[4]{1 + \varepsilon \Phi}}. \quad (15)$$

$R_R(z)/R_N(z)$ wird nur durch den Verlauf von G innerhalb der Linse beeinflusst, das heisst, das Verhältnis zwischen relativistischen und nichtrelativistischen Bahnen wird durch Einwirken zweier Faktoren K und G (besser gesagt durch $1/G$) bestimmt. Wir werden darauf noch zurückkommen.

Die Integration der Bahngleichung (1) bzw. (10) wurde nach dem Verfahren von RUNGE-KUTTA mit Hilfe einer elektronischen Rechenmaschine durchgeführt. Die Φ -Werte wurden aus den im Netzwerk gemessenen Werten nach Gleichung (4) von der Rechenmaschine ermittelt. Dabei wurden nach der kubischen Interpolationsformel noch Zwischenwerte berechnet, so dass für die Integration der Rechenschritt auf die halbe Maschenweite (1/40 des Rohrradius der Linse) reduziert wurde. Das automatische Rechenprogramm der elektronischen Rechenmaschine umfasst die Berechnung von $\Phi(z)$ nach Gleichung (4), Interpolation, Integration der Gleichung (10), Rücktransformation nach Gleichung (9) und die Berechnung der Kardinalpunkte der Linse nach den Gleichungen (5) bis (8), so dass die Kardinalpunkte direkt aus den Registrierstreifen der Maschine abgelesen werden konnten.

In Figur 4 ist das Verhältnis zwischen relativistischen und nichtrelativistischen Koordinaten der bildseitigen Brennpunkte F'_R/F'_N in Abhängigkeit von U' mit ε als Parameter eingetragen. Dort findet man auch versuchsweise

$K(\Phi)$ und $1/G(\Phi)$ für das bildseitige Potential U' berechnet und eingetragen. Der Einfluss von K und G auf den Verlauf der Kurven ist deutlich. Während bei den kleineren κ -Werten, das heisst stärkeren Linsen, hauptsächlich G den Kurvenlauf bestimmt, zeigt sich bei schwächeren Linsen immer mehr der Einfluss von K . In Figur 5 findet man die entsprechende Darstellung für



Figur 4

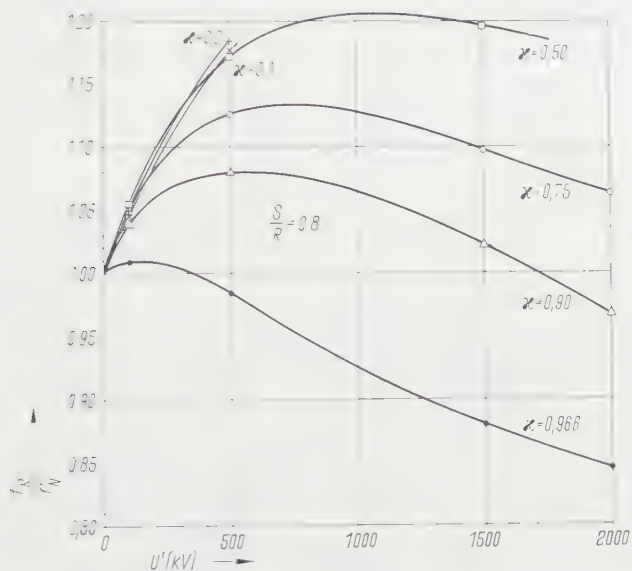
Bezogene bildseitige Brennpunktlage der relativistischen Zweirohr-Immersionslinse in Abhängigkeit vom bildseitigen Linsenpotential U' .

f'_R/f'_N . Auch diese Kurven haben ganz ähnlichen Verlauf wie die Kurven für F'_R/F'_N . Auffallend ist noch, dass die Kurven für sehr starke Linsen ($\kappa = 0,1$ und $0,2$) durch die Überschneidungen einen rückläufigen Charakter aufweisen. Dies ist in der Darstellung in Figur 6, wo f'_R/f'_N in Abhängigkeit von κ bei konstantem U' aufgetragen ist, besser zu übersehen. Bei kleineren Linsenspannungen hat κ sehr geringen Einfluss auf f'_R/f'_N .

Für die praktische Benützung der wiedergegebenen Rechnungsergebnisse ist es meistens günstiger, anstelle von Brennpunktkoordinaten von den Hauptebenenkoordinaten H und H' auszugehen; es gilt dabei

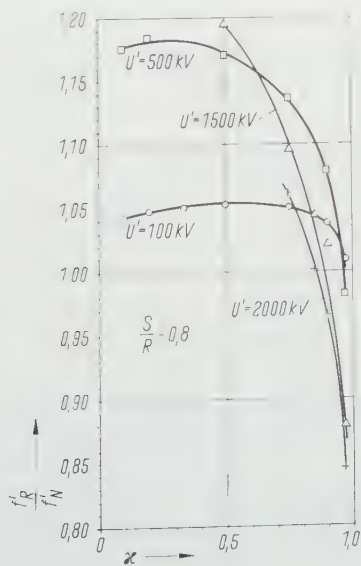
$$H' = f' + F'; \quad (16)$$

$$H = f + F. \quad (17)$$



Figur 5

Bezogene bildseitige Brennweite der relativistischen Zweirohr-Immersionslinse in Abhängigkeit vom bildseitigen Linsenpotential U' .



Figur 6

Bezogene bildseitige Brennweite der relativistischen Zweirohr-Immersionslinse in Abhängigkeit vom Spannungsverhältnis $\kappa = U/U'$.

In Figur 7 findet man $H'_R - H'_N$ und in Figur 8 $H_R - H_N$ in Funktion von U' mit κ als Parameter graphisch dargestellt. Eine Wiedergabe von f_R/f_N erübrigt sich, da f_R nach der Beziehung:

$$f_R = \sqrt{\frac{U(1 + \varepsilon U)}{U'(1 + \varepsilon U')}} f'_R \quad (18)$$

aus f'_R berechnet werden kann. Damit sind wir in der Lage, aus den nicht-relativistischen Linsendaten die relativistischen Linsendaten der Rohrlinse $S/R = 0,8$ für alle praktisch interessierenden Werte von κ und U' zu ermitteln. Die Zahlenwerte der Kardinal Elemente f, f', H und H' einer nichtrelativistischen Zweirohr-Immersionlinse mit $S/R = 0,8$ sind in der Tabelle 1 zusammengestellt. Die Elektronenbahnen in den nichtrelativistischen Linsen sind vom Verhältnis der angelegten Elektrodenspannungen und nicht von ihren Absolutwerten abhängig, so dass in der Tabelle 1 nur κ als elektrischer Parameter auftritt. Sowohl die Daten in der Tabelle 1 wie die Angaben in den Figuren 4 bis 8 beziehen sich auf eine Beschleunigungslinse. Sie können selbstverständlich auch für eine Verzögerungslinse benützt werden, wenn sinngemäss die Bezeichnung «bildseitig» und «dingseitig» vertauscht wird.

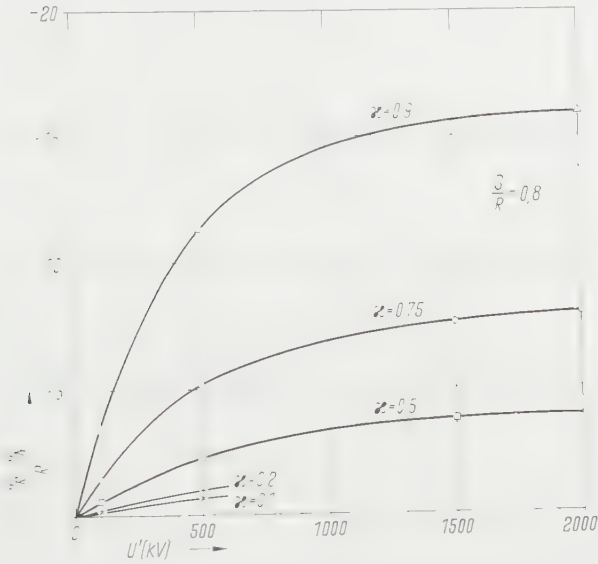
Tabelle 1

Kardinal Elemente der nichtrelativistischen Zweirohr-Immersionlinse mit $S/R = 0,8$
($\kappa = U/U'$, Beschleunigungslinse)

κ	0,0666	0,1	0,2	0,333	0,5	0,666	0,75	0,85	0,95	0,9666
$\frac{f}{R}$	1,312	1,865	4,103	9,468	25,40	77,53	155,6	481,8	1107	8473
$\frac{f'}{R}$	-4,818	-5,687	-9,009	-16,23	-35,71	-94,64	-179,3	-521,9	-1166	-8616
$\frac{H}{R}$	-1,547	-1,651	-2,060	-2,832	-4,387	-7,447	-10,42	-17,93	-26,52	-64,78
$\frac{H'}{R}$	-2,680	-2,712	-3,022	-3,740	-5,261	-8,295	-11,25	-18,72	-27,27	-65,37

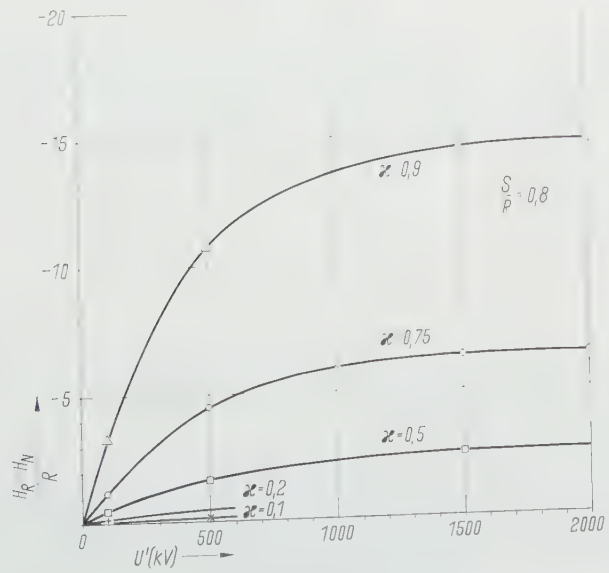
3. Relativistische Elektronenbahnen in einem praktischen Beschleuniger

Wie im vorigen Abschnitt gezeigt wurde, können sich die relativistischen und die nichtrelativistischen Brennweiten bis zu 20% voneinander unterscheiden und die relativistischen Hauptebenen bis zum fünfzehnfachen Wert des Rohrradius von den nichtrelativistischen Hauptebenen entfernt liegen. Es ist nun interessant zu untersuchen, wie sich diese Differenzen bei der Berech-



Figur 7

Bezogene Hauptebenenlage der relativistischen Zweirohr-Immersionslinse in Abhängigkeit vom bildseitigen Linsenpotential U' .



Figur 8

Bezogene dingsseitige Hauptebenenlage der relativistischen Zweirohr-Immersionslinse in Abhängigkeit vom bildseitigen Linsenpotential U' .

nung eines mehrstufigen Elektronenbeschleunigers auswirken. Wir betrachten dafür einen praktisch ausgeführten 10stufigen Elektronenbeschleuniger für 1500 kV. Die Linsenschichten und die Linsenspannungen bzw. κ -Werte sind in Figur 1 angegeben. Das Target Q befindet sich 650 cm von der als Koordinatenursprung gewählten Mittelebene der ersten Linse entfernt, also

$$z_Q = 605 \text{ cm.}$$

Der Radius R der Rohrlinsen beträgt 5 cm. Der κ -Wert der ersten Linse κ_1 ist als veränderlich anzusehen, da die Wahl der Elektroneneinschussenergie, das heisst der Anodenspannung U_0 der Elektronenkanone, noch freisteht. Wir werden also die Lagekoordinate z_p des Dingpunktes P sowie die Lateralvergrößerung β und die Angularvergrößerung γ in Abhängigkeit von κ_1 (bzw. der Anodenspannung U_0) zu berechnen haben, wobei noch zu beachten ist, dass zwischen β und γ folgende Beziehung besteht:

$$\gamma = \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{U_0(1 + \varepsilon U_0)}{U_B(1 + \varepsilon U_B)}}. \quad (19)$$

In Figur 9 ist das Ergebnis der relativistischen und nichtrelativistischen Rechnung graphisch dargestellt. Wie man sieht, ist der relativistische Effekt im Endresultat nicht sehr gross. Der maximale Fehler in der Angabe von z_p beträgt nur 11 cm bei $\kappa_1 = 1$. Auch die Lateralvergrößerung wird gegenüber dem relativistischen Fall maximal um etwa 40% zu gross berechnet. Interessant ist es, dass durch die Beziehung (19) diese Differenz der Lateralvergrößerungen wieder kompensiert wird, womit der Unterschied bei den Angularvergrößerungen fast vollständig verschwindet.

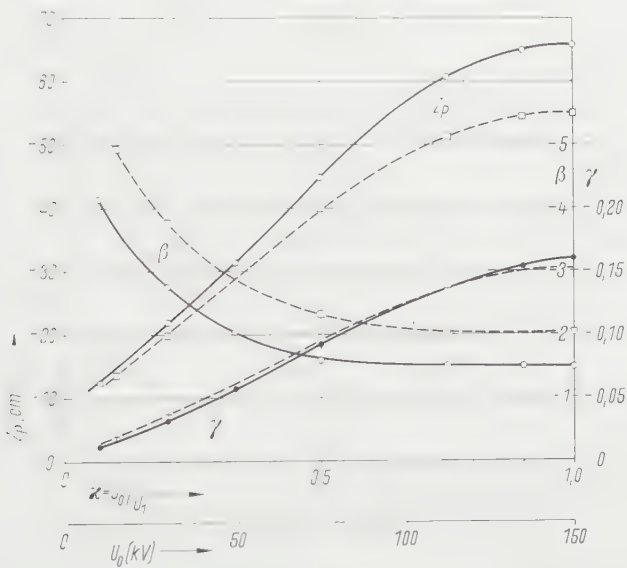
In Figur 10 ist für $U_0 = 50 \text{ kV}$ die Elektronenbahn durch den ganzen Beschleuniger dargestellt. Die Bahn ist rückwärtsgerechnet. Der Winkel gegen die Achse am Ausgang des Beschleunigers betrug in beiden Fällen

$$\Theta_Q = 10^{-3}.$$

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass in den meisten Fällen die Elektronenoptik eines elektrostatischen Elektronenbeschleunigers nichtrelativistisch berechnet werden kann.

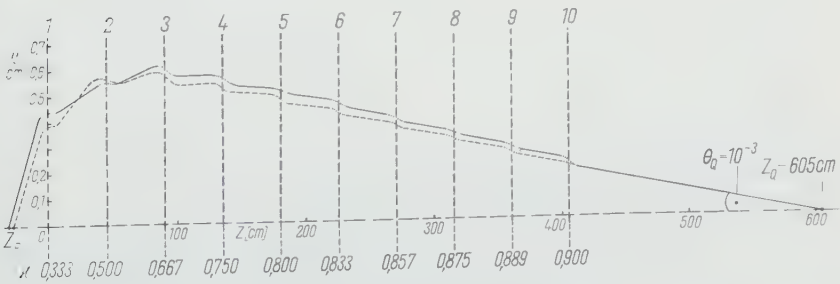
Für die numerische Rechnung wurde die elektronische Rechenmaschine ERMETH des Institutes für angewandte Mathematik der Eidgenössischen Technischen Hochschule verwendet. Wir möchten auch an dieser Stelle dem Leiter des Institutes für angewandte Mathematik, Herrn Prof. Dr. E. STIEFEL, für sein freundliches Entgegenkommen sowie Herrn Prof. Dr. H. RUTISHAUSER und seinen Mitarbeitern für ihre wertvollen Ratschläge unsern besten Dank aussprechen. Wir danken auch Herrn Prof. E. BAUMANN, Leiter des

Institutes für technische Physik der Eidgenössischen Technischen Hochschule,
für die Erlaubnis zur Veröffentlichung dieser Arbeit.



Figur 9

Ergebnisse der relativistischen und nichtrelativistischen Berechnung eines elektrostatischen 10stufigen Elektronenbeschleunigers. z_0 Dmzlage bei einer Bildlage $z_0 = 605$ cm (bezogen auf die Mittelebene der ersten Beschleunigungslinse), β Lateralvergrößerung, γ Angularvergrößerung, U_0 Einschussenergie der Elektronen. 1500 kV, $S/R = 0,8$, $R = 5$ cm. — relativistisch; --- nichtrelativistisch.



Figur 10

Eine relativistisch und nichtrelativistisch berechnete Elektronenbahn in einem 10stufigen Elektronenbeschleuniger. $U_0 = 50$ kV; $U_B = 1500$ kV; — relativistisch; - - nichtrelativistisch.

Summary

Relativistic and nonrelativistic data for the coaxial two-cylinder electrostatic electron-lens are compared. Values of the potential along the axis were measured on a resistance network analogue, whilst trajectories were calculated on a high speed digital computer.

Index R indicating relativistic values, and N non-relativistic ones, quotients F'_R/F_N of the focal point coordinates (image sided), f'_R/f_N of the focal length (image sided) and differences of the principal plane coordinates $(H_R - H_N)/R$ (object sided) and $(H'_R - H'_N)/R$ (image sided) are represented graphically as functions of the imagespace potential and U' . The gap between the cylinders was in all cases $0,8 R$ (R radius of the cylinders). U being the potential on the object side, and U' on the image side, $\kappa = U/U'$ was varied from 0,1 to 0,966 and U' from 0 to 2,000 kV; in the relativistic case a maximal departure of about 20% from the nonrelativistic values was found for focal length. A ten-lens accelerator of 1,5 MeV overall tension has been calculated both ways.

(Eingegangen: 16. Mai 1959.)

Reverse *in situ* Combustion

By ROBERT P. GILBERT, Pittsburgh, Pa., USA¹⁾

Introduction

In this paper we are going to investigate the *in situ* combustion of crude oil, that is the 'burning in place' of oil which has saturated a porous rock formation. This phenomenon is of interest to the petroleum industry as a thermal-recovery method for residual oil in a reservoir; the underlying concept of all such methods is that by raising the temperature of the reservoir, the viscosity of the oil is lowered and thereby its mobility is increased.

Usually, *in situ* combustion is instigated by first heating a local region and then supplying sufficient oxygen to support combustion. The physical phenomena which then take place are quite involved, for instance, heat is transferred by three different mechanisms:

- (1) Convection by gases which flow through the porous rock carrying their heat content with them,
- (2) conduction in the oil-bearing rock formation, and
- (3) exchange of heat between the rock formation and the gas.

Hydrodynamic effects, such as varying oil-water-gas ratios, condensation of hot vapors outside of the combustion zone, and the gravity segregation of various fluids, are usually influential factors in burning. Furthermore, the

¹⁾ Mathematics Department, The University of Pittsburgh.

heat-source describing combustion is a non-linear function of the temperature and the concentration of the reactants.

In order to simplify the problem somewhat, we are going to investigate the case of tar-sand reservoirs. Here, the initial viscosity of the oil before heating is so high that it may be considered immobile.

Mathematical Formulation of the Problem

It would be well to list here the symbols used in the following work.

Variables

x	distance along the direction of burning;
t	time;
v_z	combustion zone velocity;
v_g	gas velocity;
$z = x - v_z t$	distance measured in a coordinate frame moving with the combustion zone;
T	temperature;
T_s	temperature of the solid matrix;
T_g	temperature of the gases;
p	partial pressure of oxygen;
$R(p, T)$	an arbitrary heat-source function, measured in units of mass hydrocarbon consumed per unit of time.

Constants

f	porosity of the solid;
ρ_s	density of the solid;
ρ_g	density of the gases;
ρ_o	density of the oil;
c_s	heat capacity of the solid;
c_g	heat capacity of the gas;
c_o	heat capacity of the oil;
s_o	residual oil saturation;
P_i	partial pressure of the oxygen before entering the combustion zone;
ΔH^0	the heat of combustion of the oil in units of heat per unit of mass;
K	conductivity of the solid matrix containing the oil and gas;
k	diffusivity of the solid matrix;
h_g	heat exchange coefficient between solids and gases;
L	the steady-state combustion zone length;
T_m	the maximum temperature;
T_0	the ambient temperature.

Let us consider the situation where oxygen is supplied to the reaction zone from its cold side; in this instance because of the immobility of the cold oil, any hydrodynamic effects must occur in the combustion region itself, or in that region through which it has just passed. We shall refer to this situation, where oxidant and reaction zone proceed in opposite directions, as reverse *in situ* combustion.

Now, let us investigate reverse *in situ* combustion occurring in a one-dimensional model of a porous medium, where the pores are partially filled with an immobile hydrocarbon. Let us assume that the rate at which hydrocarbon is consumed at any one point is described completely by a continuous function of p and T , where p and T are measured at that point. Furthermore, let us assume that the important mechanisms of heat transfer involved here are (1) convection and (2) conduction. In this case, within the combustion zone, the differential equation,

$$\left. \begin{aligned} \{ (1-f) \varrho_s c_s + f [(1-s_0) c_g \varrho_g + s_0 \varrho_0 c_0] \} \frac{\partial T}{\partial t} - f v_g \frac{\partial}{\partial x} (c_g \varrho_g T) \\ + \Delta H^0 R(p, T) = K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

governs the transfer of heat. If the heat content of the oxidant and that of the products of combustion are relatively the same, then

$$\frac{\partial}{\partial x} (c_g \varrho_g T) \sim c_g \varrho_g \frac{\partial T}{\partial x}$$

and

$$\alpha \frac{\partial T}{\partial t} - f c_g \varrho_g v_g \frac{\partial T}{\partial x} + \Delta H^0 R(p, T) = K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (2)$$

where

$$\alpha = \{ (1-f) \varrho_s c_s + f [(1-s_0) \varrho_g c_g + s_0 \varrho_0 c_0] \}.$$

We introduce the heat diffusibility of the solid matrix as $K/\alpha = k$ measured in length² per unit time, and the 'velocity' $w = f c_g \varrho_g v_g / \alpha$; equation (2) then becomes

$$\frac{\partial T}{\partial t} - w \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\Delta H^0}{\alpha} R(p, T) = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (2a)$$

By assuming a steadily-propagated combustion exists, that is a steady-state condition in a coordinate frame moving along with the combustion zone, we can simplify this problem considerably. If distance in the combustion zone is measured in terms of z , where $z = x - v_c t$, then equation (2a) can be written as

$$- (w + v_c) \frac{dT}{dz} + \frac{\Delta H^0}{\alpha} R(p, T) = k \frac{d^2 T}{dz^2}. \quad (3)$$

If the rate at which heat is produced is proportional to the rate at which

oxygen is consumed, then for any point in the reaction zone we may write

$$\frac{dp}{dz} = c_1 R(p, T), \quad (4)$$

where c_1 is a constant of proportionality. We can determine this constant, by integrating equation (4) over the combustion-zone and introducing the boundary condition $p = P_i$ when $z = L$. It follows that

$$c_1 = P_i \left(\int_0^L R(p, T) dz \right)^{-1}$$

and that

$$p(z) = \frac{\int_0^z R(p, T) dz}{\int_0^L R(p, T) dz} P_i$$

Now, since

$$\int_0^L R(p, T) dz$$

is the total rate of oxidant consumption in the reaction zone, this quantity must be equal to the influx of oxidant in the moving zone, that is

$$f(v_g + v_c) = \int_0^L R(p, T) dz.$$

We obtain from this the following integral relationship

$$p(z) = \frac{P_i}{f(v_g + v_c)} \int_0^z R(p, T) dz. \quad (5)$$

Our problem now, is to solve equations (3) and (5) simultaneously. By introducing a change of dependent and independent variables we are able to reduce these equations to a single first-order differential equation. We proceed as follows by letting

$$\frac{dT}{dz} = \left(\frac{dz}{dT} \right)^{-1} \equiv \varphi(T), \quad (6)$$

whereby

$$\frac{d^2 T}{dz^2} = \varphi \frac{d\varphi}{dT} \quad \text{and} \quad \frac{dp}{dz} = \varphi \frac{dp}{dT}.$$

(It is assumed of course that all necessary terms are monotonic.) Equation (3) becomes

$$-(w + v_c) \varphi + \frac{\Delta H^0}{\alpha} c_1 \varphi \frac{d\varphi}{dT} = k \varphi \frac{d\varphi}{dT},$$

or

$$-(w + v_c) dT + \frac{\Delta H^0}{\alpha} c_1 d\varphi = k d\varphi, \quad (7)$$

which integrates into

$$-(w + v_c) T + \frac{\Delta H^0}{\alpha} c_1 \varphi + c_2 = k \varphi. \quad (8)$$

c_2 is a constant of integration, which may be determined from a boundary-condition such as $T = T_0$ and $\varphi = 0$ at $z = L$; this leads to an equation of the form

$$-(w + v_c) (T - T_0) + \frac{\Delta H^0}{\alpha} c_1 (\varphi - \varphi_i) = k \varphi. \quad (9)$$

Making the previous change of dependency in the differential form of equation (5), and substituting the result of equation (9) into this yields

$$\frac{dT}{d\varphi} = \frac{c_1 \varphi(p, T)}{R(p, T)} \equiv \frac{c_1 (w + v_c) (T_0 - T) + \frac{\Delta H^0}{\alpha} (\varphi - \varphi_i)}{R(p, T)}. \quad (10)$$

An equation of this form frequently may be solved by an iteration method: the requirements necessary for a solution are known as the Cauchy-Lipschitz conditions.

Consider the general, first-order, ordinary, differential equation

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = F(p, T).$$

A unique, continuous, solution exists for this differential equation, which passes through the point (p_1, T_1) , if there is a region containing this point in which $F(p, T)$ is continuous, and if the following requirements hold:

- (1) $|F(p, T_1) - F(p, T_2)| \leq L |T_1 - T_2|$, where L is the Lipschitz constant.
- (2) $|F(p, T)| \leq M$, that is F is bounded in this region.
- (3) We can bound our region by the inequalities $|p - p_1| \leq A$ and $|T - T_1| \leq B$.

Referring back to equation (10), we notice that if $R(p, T) \neq 0$ anywhere in the combustion zone our requirements are satisfied. We now define the

functions

$$\left. \begin{aligned} T_1(p) &= T_0 + \int_0^p F(p, T_0) dp, \\ T_2(p) &= T_0 + \int_0^p F(p, T_1(p)) dp, \\ T_n(p) &= T_0 + \int_0^p F(p, T_{n-1}(p)) dp. \end{aligned} \right\}$$

(11)

By the Cauchy-Lipschitz theorem these successive approximations to the solution of equation (11) converge, and furthermore the function

$$T(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(p)$$

is actually the solution to our differential equation.

Now, assuming that a solution has been found we have

$$\frac{dp}{dz} = \left(\frac{dT}{dp}\right)^{-1} \frac{dT}{dz} = c_1 R(p, T),$$

so that one may write

$$z = c_1 \int_{T_0}^T \left(\frac{dT}{dp}\right)^{-1} \frac{dT}{R(p, T(p))}. \tag{12}$$

Equation (12) is the steadily-propagated temperature profile. The corresponding oxidant partial-pressure profile may be obtained from

$$z = c_1 \int_0^p \frac{dp}{R(p, T(p))}. \tag{13}$$

In all of the indicated computations, one must be aware which functions are monotonic, and be careful to choose the correct branches of non-monotonic functions.

Next, we turn to the situation where there are three modes of heat transfer (1) convection, (2) conduction, and (3) exchange between gases and solids. The differential equations which govern the transfer of heat in the reaction zone for the gaseous and solid media are respectively

$$\frac{\partial T_g}{\partial t} - v_g \frac{\partial T_g}{\partial x} = R(p, T_s) - h_g(T_g - T_s) \tag{14}$$

and

$$\frac{\partial T_s}{\partial t} - k \frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2} = h_s (T_g - T_s). \quad (15)$$

Equations (14) and (15) obey a general equation of the form

$$\left. \begin{aligned} (h_g + h_s) \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - k \left(\frac{\partial^3 T}{\partial t \partial x^2} - v_g \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} + h_g \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) \\ - v_g \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial t} + h_s \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \psi(p, T), \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$\text{where } \psi(p, T) = \begin{cases} h_s R(p, T_s), & \text{when } T = T_s, \\ h_g R(p, T_s) + \frac{\partial R}{\partial t} - k \frac{\partial^2 R}{\partial x^2}, & \text{when } T = T_g. \end{cases}$$

As we did earlier, we again transfer coordinates to the moving frame $z = x - v_c t$, and make use of our change of dependency

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial x}{\partial T} \right)^{-1} &\rightarrow \left(\frac{dz}{dT} \right)^{-1} \equiv \varphi(T), \\ \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) &\rightarrow \frac{d^2 T}{dz^2} = \varphi \frac{d\varphi}{dT}, \\ \left(\frac{\partial^3 T}{\partial x^3} \right) &\rightarrow \frac{d^3 T}{dz^3} = \varphi^2 \frac{d^2 \varphi}{dT^2} + \varphi \left(\frac{d\varphi}{dT} \right)^2, \\ \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) &= - \frac{(\partial x / \partial t)}{(\partial x / \partial T)} \rightarrow -v_c \varphi, \\ \left(\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right) &\rightarrow -v_c \varphi \frac{d\varphi}{dT}, \\ \left(\frac{\partial^3 T}{\partial t \partial x^2} \right) &\rightarrow -v_c \varphi \left(\frac{d\varphi}{dT} \right)^3. \end{aligned}$$

Upon using these transformations and the notation $\varphi' = d\varphi/dT$, equation (16) becomes

$$\left. \begin{aligned} v_c (h_s + h_g) \varphi - v_c^2 \varphi \varphi' + k [v_c \varphi (\varphi \varphi')' + v_g \varphi (\varphi \varphi')' - h_g \varphi \varphi'] \\ + v_g [v_c \varphi (\varphi \varphi')' - h_s \varphi] = \psi(p, T). \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

For the case $T = T_s$, $\psi(p, T) = h_s R(p, T_s)$, and as before we have

$$\frac{dp}{dz} - \varphi \frac{d\varphi}{dT} = c_1 R(p, T).$$

Equation (17) then becomes

$$v_c (\dot{h}_s + h_g) - v_c^2 \varphi'_s + k [(v_c + v_g) \varphi_s \varphi'_s - h_g \varphi_s]' + v_g v_c (\varphi_s \varphi'_s)' - v_g h_s = c_1 \dot{p}', \quad (18)$$

which integrates into

$$\left. \begin{aligned} [v_c (\dot{h}_s + h_g) - v_g h_s] T_s - v_c^2 \varphi_s + k [(v_c + v_g) \varphi_s \varphi'_s - h_g \varphi_s] \\ + v_g v_c \varphi_s \varphi'_s = c_1 \dot{p} + c_4, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

or

$$\varphi'_s = F(p, T_s, \varphi_s) \equiv \frac{-[v_c (\dot{h}_s + h_g) - v_g h_s] T_s + (v_c^2 + k h_g) \varphi_s + c_1 \dot{p} + c_4}{[k (v_c + v_g) + v_g v_c] \varphi_s}.$$

However, from above we have $\varphi_s \dot{p}' = c_1 R$, so

$$\varphi'_s \dot{p}' + \varphi_s \dot{p}'' = c_1 \left(\frac{\partial R}{\partial T_s} + \frac{\partial R}{\partial p} \dot{p}' \right) = c_1 \mathcal{R}(p, T_s),$$

or

$$\dot{p}' F(p, T_s, \varphi_s) + \varphi_s \dot{p}'' = c_1 \mathcal{R}(p, T_s). \quad (19)$$

We may now remove φ_s , by substituting in

$$\varphi_s = \frac{R(p, T_s)}{c_1 \dot{p}'};$$

from this we are led to an equation of the form

$$\dot{p}'' = G(p, \dot{p}', T_s),$$

which may be solved by reducing it to two first-order simultaneous differential equations

$$\dot{p}' = u, \quad u' = G(p, u, T_s).$$

Zusammenfassung

Für den Fall einer hinsichtlich Temperatur und Partialdruck des Oxydenden nichtlinearen Quellenfunktion wird die in-situ-Verbrennung von Rohöl untersucht. Die Wärmeübertragung wird in ihrer Abhängigkeit von den Mechanismen der Konvektion, der Leitung und des Wärmeübergangs zwischen festem und Gaszustand erörtert. Es wird gezeigt, dass es eine stetige Lösung gibt, und eine konvergierende Iterationsmethode wird angegeben.

(Received: March 2, 1959.)

Impulsive Rotatory Motion of a Circular Disk in a Viscous Fluid¹⁾

By RAM PRAKASH KANWAL²⁾, Madison, Wisconsin, USA

Introduction

The analysis of rotatory oscillations of an infinitesimally thin circular disk in a viscous fluid has been found useful in the theory of oscillation type viscometers. In our attempt [1-3] at finding the solution of the problem both in the case of rotatory as well as longitudinal oscillations of the disk we have used the spheroidal wave functions of imaginary arguments. The results thus obtained are not easily amenable to numerical calculations. In the discussions of the other workers [2-4], it was assumed that the drag per unit area exerted on the disk by the fluid is the same as that which would be exerted on a disk of an infinite radius oscillating at the same rate. They have further attempted to include the influence of the edge by making corrections of semi-empirical type.

AZPEITIA and NEWELL [5] have extended the above-mentioned theory of infinite disk by assuming that the radius of the disk is large compared with the boundary layer thickness. Their theory is, though *approximate*, an improvement over the earlier work inasmuch as the accuracy, as well as the range of applicability, of their formulae are well defined and they have checked them with the available experimental data.

In this paper we attempt to give an *exact* analytic solution, amenable to numerical work, of the flow when an infinitesimally thin circular disk of radius r_0 is given an impulsive moment $G \delta(t)$: $-\delta(t)$ being DIRAC's delta function.

The Equations of Motion and Their Solution

Employing cylindrical coordinates r, θ, z , and taking into account the rotational symmetry of the problem we have $u(r, \theta, z) = w(r, \theta, z) = 0$, while $v(r, \theta, z)$ satisfies the linearized Navier-Stokes differential equation [6]

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{v}{r^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial t}, \quad (1)$$

¹⁾ This research was sponsored by the US. Army under contract no. DA-11-022-ORD-2059 with the University of Wisconsin.

²⁾ Mathematics Research Center, University of Wisconsin.

³⁾ Numbers in brackets refer to References, page 557.

where $c^2 = \mu/\rho$. The symmetry of the problem also suggests that we may consider the problem for the region $z \geq 0$; the solution for $z \leq 0$ can be obtained by putting $-z$ for z in the following analysis.

Multiply by e^{-st} throughout the equation (1) and integrating from 0 to ∞ we obtain

$$\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} - \frac{\bar{v}}{r^2} = \frac{s}{c^2} \bar{v}, \quad (2)$$

where \bar{v} is the Laplace transform of v .

An appropriate particular solution of this equation is

$$\bar{v} = A(\xi, s) J_1(r, \xi) e^{-z\sqrt{c^2\xi^2+s/c}}, \quad (3)$$

which can be generalized by integrating it with respect to ξ from 0 to ∞ , yielding

$$\bar{v} = \int_0^\infty A(\xi, s) J_1(r, \xi) e^{-z\sqrt{c^2\xi^2+s/c}} d\xi. \quad (4)$$

The stress component $\bar{p}_{\theta z}$ is [6]

$$\bar{p}_{\theta z} = \mu \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = -\frac{\mu}{c} \int_0^\infty \sqrt{c^2\xi^2+s} A(\xi, s) J_1(r, \xi) d\xi. \quad (5)$$

The boundary conditions are:

- (1) The couple experienced by the disk is $G \delta(t)$,
- (2) $\bar{p}_{\theta z}$ and therefore $\bar{p}_{\theta z} = 0$ for $r \leq r_0$, where r_0 is the radius of the disk.

Therefore

$$\begin{aligned} & -\frac{4\pi\mu}{c} \int_0^\infty \sqrt{c^2\xi^2+s} A(\xi, s) \left\{ \int_0^{r_0} r^2 J_1(r, \xi) dr \right\} d\xi \\ &= -\frac{4\pi\mu r_0^2}{c} \int_0^\infty \sqrt{c^2\xi^2+s} A(\xi, s) \frac{J_2(r, \xi)}{\xi} d\xi = G, \end{aligned} \quad (6)$$

and

$$-\frac{\mu}{c} \int_0^\infty \sqrt{c^2\xi^2+s} A(\xi, s) J_1(r, \xi) d\xi = 0. \quad (7)$$

The solution of these two simultaneous equations for $A(\xi, s)$ is indeterminate [7a], but we can make it determinate in the following way. The solution for the steady case of this problem is known and for that case the

relation between the moment G and the shearing stress $p_{\theta z}$ is [8]

$$(p_{\theta z})_{steady} = \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{3 G r}{8 \pi r_0^3 \sqrt{r_0^2 - r^2}}, & \text{for } r \leq r_0, \\ 0, & \text{for } r \geq r_0. \end{array} \right\} \quad (8)$$

We assume that the impulsive couple $G \delta(t)$ produces the stress

$$p_{\theta z} = \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{3 G r \delta(t)}{8 \pi r_0^3 \sqrt{r_0^2 - r^2}}, & \text{for } r \leq r_0, \\ 0, & \text{for } r \geq r_0. \end{array} \right\} \quad (9)$$

The conditions [9] are equivalent to

$$\int_0^\infty \sqrt{c^2 \xi^2 + s} A(\xi, s) J_1(r, \xi) d\xi = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{3 G c r}{8 \pi \mu r_0^3 \sqrt{r_0^2 - r^2}}, & \text{for } r \geq r_0, \\ 0, & \text{for } r \leq r_0. \end{array} \right\} \quad (10)$$

It may be observed that the equation (10₂) is the same as the equation (7). The solution to these equations is unique and we have [7b]

$$A(\xi, s) = \frac{3 G c}{8 \pi \mu r_0^3} \left\{ \frac{\sin \xi r_0}{\xi r_0} - \cos \xi r_0 \right\} \frac{1}{\sqrt{c^2 \xi^2 + s}}. \quad (11)$$

We have now to verify that this value of $A(\xi, s)$ is also a solution of the equations (6) and (7). As already pointed out equations (7) and (10₂) being the same we have only to show that the integral equation (6) is satisfied. In order to do that we observe that

$$\left(\frac{\sin \xi r_0}{\xi r_0} - \cos \xi r_0 \right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\xi r_0} J_{3/2}(\xi, r_0). \quad (12)$$

Putting the value of $A(\xi, s)$ in terms of $J_{3/2}(r_0, \xi)$ in the equation [6] we get

$$\int_0^\infty \frac{J_{3/2}(r_0, \xi) J_2(r_0, \xi)}{\xi^{1/2}} d\xi = \frac{2 \sqrt{2}}{3 \sqrt{\pi} r_0}. \quad (13)$$

Now it is known that [7c]

$$\int_0^\infty \frac{J_\mu(r_0, \xi) J_\nu(r_0, \xi)}{\xi^\lambda} d\xi = \frac{\left(\frac{1}{2} r_0 \right)^{\lambda-1} \Gamma(\lambda) \Gamma\left(\frac{1}{2} \mu + \frac{1}{2} \nu - \frac{1}{2} \lambda + \frac{1}{2} \right)}{2 \Gamma\left(\frac{1}{2} \lambda + \frac{1}{2} \nu - \frac{1}{2} \mu + \frac{1}{2} \right) \Gamma\left(\frac{1}{2} \lambda + \frac{1}{2} \mu + \frac{1}{2} \nu + \frac{1}{2} \right) \Gamma\left(\frac{1}{2} \lambda + \frac{1}{2} \mu - \frac{1}{2} \nu + \frac{1}{2} \right)}$$

Putting $\lambda = 1/2$, $\mu = 3/2$ and $\nu = 2$, it is a matter of simple calculation to see that the equation (13) is just an identity. Therefore the value of $A(\xi, s)$ given by the equation (11) is an appropriate solution of equations (6) and (7). Substituting this value of $A(\xi, s)$ in the equation (4) we have

$$\bar{v} = \frac{3 G c}{8 \sqrt{2} \pi \mu r_0^{3/2}} \int_0^\infty \sqrt{\xi} J_{3/2}(r_0, \xi) J_1(r, \xi) \frac{e^{-\frac{1}{2} \sqrt{c^2 \xi^2 + s^2}}}{\sqrt{c^2 \xi^2 + s^2}} d\xi. \quad (15)$$

Now

$$\frac{1}{2 \pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{st} \frac{z \sqrt{c^2 \xi^2 + s^2}}{\sqrt{c^2 \xi^2 + s^2}}}{\sqrt{c^2 \xi^2 + s^2}} ds = \frac{1}{2 \pi i} e^{-c^2 \xi^2 t} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{e^{yt} - z \sqrt{y^2/c}}{\sqrt{y}} dy, \quad (16)$$

where

$$\lambda = c^2 \xi^2 + s^2, \quad \delta = c^2 \xi^2 + \sigma^2.$$

The value of the right-hand side integral of the equation (16) is known and is given as [9]

$$\frac{1}{2 \pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{e^{yt} - z \sqrt{y^2/c}}{\sqrt{y}} dy = \frac{e^{-c^2 \xi^2 t}}{\sqrt{\pi t}}. \quad (17)$$

Therefore from (16) we have

$$\frac{1}{2 \pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{st} \frac{z \sqrt{c^2 \xi^2 + s^2}}{\sqrt{c^2 \xi^2 + s^2}}}{\sqrt{c^2 \xi^2 + s^2}} ds = \frac{e^{-c^2 \xi^2 t} - z^2/4c^2}{\sqrt{\pi t}}. \quad (18)$$

We are now able to invert the equation (15) and obtain

$$v = \frac{3 G c e^{-z^2/4c^2 t}}{8 \sqrt{2} \pi \mu r_0^{3/2} \sqrt{t}} \int_0^\infty e^{-t c^2 \xi^2} \sqrt{\xi} J_{3/2}(r_0, \xi) J_1(r, \xi) d\xi. \quad (19)$$

To evaluate the integral on the right-hand side of the equation (19) we observe that [10]

$$\left. \begin{aligned} J_{3/2}(r_0, \xi) J_1(r, \xi) &= \left(\frac{1}{2}\right)^{5/2} r_0^{3/2} r \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\xi^{2m+5/2}}{m! \Gamma(m+5/2)} - \left(\frac{r_0^2}{4}\right)^m \\ &\quad \times {}_2F_1\left(-m, -\frac{3}{2} - m; 2; \frac{r^2}{r_0^2}\right). \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Therefore

$$\left. \begin{aligned} e^{-t c^2 \xi^2} \xi^{1/2} J_{3/2}(r_0, \xi) J_1(r, \xi) &= \left(\frac{1}{2}\right)^{5/2} r_0^{3/2} r \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\xi^{2m+3} e^{-t c^2 \xi^2}}{m! \Gamma(m+5/2)} \left(-\frac{r_0^2}{4}\right)^m \\ &\quad \times {}_2F_1\left(-m, -\frac{3}{2} - m; 2; \frac{r^2}{r_0^2}\right). \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

We are thus required to find the value of the integral

$$\int_0^{\infty} \xi^{2m+3} e^{-t c^2 \xi^2} d\xi, \quad (22)$$

which can be readily done by the help of the relation

$$\int_0^{\infty} \xi^{2m+3} e^{-t c^2 \xi^2} d\xi = \frac{m+1}{t c^2} \int_0^{\infty} \xi^{2m+1} e^{-t c^2 \xi^2} d\xi. \quad (23)$$

Thus

$$\int_0^{\infty} \xi^{2m+3} e^{-t c^2 \xi^2} d\xi = \frac{(m+1)!}{2 (t c^2)^{m+2}}. \quad (24)$$

From the relations (24), (21) and (19) we finally have

$$\left. \begin{aligned} v &= \frac{3 G r e^{-r^2/4 c^2 t}}{128 \pi \mu t^{5/2} c^3} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m+1}{\Gamma(m+5/2)} \left(-\frac{r_0^2}{4 t c^2}\right)^m \\ &\quad \times {}_2F_1\left(-m, -\frac{3}{2} - m; 2; \frac{r^2}{r_0^2}\right). \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Since ${}_2F_1(-m, -3/2 - m; 2; r^2/r_0^2)$ are polynomials, the value of v can be calculated to any desired degree of accuracy. In fact if we put

$$f_m(r, t) = \frac{3 \sqrt{\pi}}{4} \cdot \frac{m+1}{\Gamma(m+5/2)} \left(-\frac{r_0^2}{4 t c^2}\right)^m {}_2F_1\left(-m, -\frac{3}{2} - m; 2; \frac{r^2}{r_0^2}\right), \quad (26)$$

then we have

$$\left. \begin{aligned} f_0 &= 1, \quad f_1 = -\frac{r_0^2}{5 t c^2} \left\{1 + \frac{5}{4} \cdot \frac{r^2}{r_0^2}\right\}, \\ f_2 &= \frac{3 r_0^4}{140 t^2 c^4} \left\{1 + \frac{7}{2} \cdot \frac{r^2}{r_0^2} + \frac{35}{40} \cdot \frac{r^4}{r_0^4}\right\}, \\ f_3 &= -\frac{r_0^6}{630 t^3 c^6} \left\{1 + \frac{27}{4} \cdot \frac{r^2}{r_0^2} + \frac{63}{8} \cdot \frac{r^4}{r_0^4} + \frac{105}{64} \cdot \frac{r^6}{r_0^6}\right\}, \\ f_4 &= \frac{r_0^8}{11088 t^4 c^8} \left\{1 + 11 \frac{r^2}{r_0^2} + \frac{99}{4} \cdot \frac{r^4}{r_0^4} + \frac{231}{16} \cdot \frac{r^6}{r_0^6} + \frac{231}{128} \cdot \frac{r^8}{r_0^8}\right\}. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Angular Velocity of the Disk

The angular velocity of the disk is given from the relations (25), (26) and (27) as

$$\omega_0 = \left\{ \frac{v}{r_0} \right\}_{r=r_0}^{z=0} = \frac{G}{32 \pi^{3/2} \mu t^{5/2} c^3} \left\{ 1 - \frac{9 r_0^2}{20 t c^2} + \frac{143 r_0^4}{1120 t^2 c^4} - \frac{221 r_0^6}{8064 t^3 c^6} + \frac{323 r_0^8}{67584 t^4 c^8} - \dots \right\}. \quad (28)$$

This result can be written in a closed form [7d]

$$\omega_0 = \frac{G}{32 \pi^{3/2} \mu t^{5/2} c^3} {}_2F_2 \left(\frac{7}{4}, \frac{9}{4}; \frac{5}{2}, \frac{7}{2}; -\frac{r_0^2}{t c^2} \right)^4. \quad (29)$$

REFERENCES

- [1] R. P. KANWAL, *Rotatory and Longitudinal Oscillations of Axisymmetric Bodies in a Viscous Fluid*, Quart. J. Mech. appl. Math. 8, 146 (1955).
- [2] J. KESTIN and H. E. WANG, *Corrections for the Oscillating Disk Viscometer*, J. appl. Mech. 24, 197 (1957). This paper contains references to their previous work.
- [3] P. MARIENS and O. VAN PAEMEL, *Theory and Experimental Verification of the Oscillating Disk Method for Viscosity Measurements in Fluids*, Appl. Sci. Res. 5, 411 (1956).
- [4] J. G. DASH and K. D. TAYLOR, *Hydrodynamics of Oscillating Disks in Viscous Fluids*, Phys. Rev. 105, 7 (1957).
- [5] A. G. AZPEITIA and G. F. NEWELL, *Theory of Oscillation Type Viscometers, III: A Thin Disk*, Z. angew. Math. Phys. 9, 97 (1958).
- [6] S. GOLDSTEIN (Ed.), *Modern Developments in Fluid Dynamics* (Oxford 1938), p. 103.
- [7] G. N. WATSON, *Theory of Bessel Functions* (Cambridge 1944), (a) p. 403 and p. 411; (b) p. 411; (c) p. 403; (d) p. 396.
- [8] G. B. JEFFERY, *On the Steady Rotation of a Solid of Revolution in a Viscous Fluid*, Proc. London math. Soc. 14, 332-333 (1915).
- [9] Bateman Manuscript Project, *Tables of Integral Transforms*, vol. 1 (McGraw-Hill, 1956), p. 246.
- [10] Bateman Manuscript Project, *Higher Transcendental Functions*, vol. 2, p. 11.

Zusammenfassung

Es wird eine analytische Methode für die Bestimmung der Geschwindigkeit der Strömung und der Winkelgeschwindigkeit einer kreisförmigen Scheibe gegeben, die in einer zähen, inkompressiblen Flüssigkeit einen Drehstoss erhält.

(Received: February 28, 1959.)

4) There is apparently the factor $(1/2)$ missing in the result in WATSON's book.

On Relative Measurements of the Viscosity of Gases by the Oscillating-Disk Method

By JOSEPH KESTIN¹⁾, WOLFGANG LEIDENFROST²⁾, and C. Y. LIU³⁾,
Providence, R. I., USA

1. Introduction

Until recently it was impossible to perform absolute determinations of the viscosity of fluids by the oscillating-disk method owing to the absence of an exact theory which included the edge effect in a rigorous way. Such a theory was recently provided by NEWELL [1]⁴⁾ who obtained a series approximation for the case of a thin disk oscillating between two fixed plates. NEWELL's theory can be used for absolute measurements on condition that the boundary layer thickness, δ , is not smaller than a certain specified quantity. A thorough experimental verification of this theory was undertaken and will be described elsewhere [2]; it provided an excellent experimental verification of NEWELL's result.

It must, however, be realized that the restriction on the magnitude of the boundary layer thickness, δ , i.e. actually on the magnitude of the dimensionless ratio δ/b , where b denotes the separation, makes it unsuitable for an important class of conditions which are otherwise desirable from the experimental point of view. Consequently, it is still necessary to devote a good deal of attention to relative methods of measurement which rely on suitable calibration procedures.

In an earlier paper [3], KESTIN and WANG provided working formulae for the relative method, treating two limiting cases, namely those when the dimensionless separation

$$\beta = \frac{b}{\delta} \quad (1)$$

is either very small or very large ('infinite' spacing). In certain applications, particularly when operation at elevated temperatures is envisaged, it is found necessary to use intermediate separations, and it is useful to extend their method to include this case as well. Furthermore, with the results of [2] now

¹⁾ Professor of Engineering, Brown University, Providence, R. I.

²⁾ Research Associate, Brown University; now at Institut Verfahrenstechnik der G.V.T., Aachen, Germany.

³⁾ Graduate Assistant, Brown University; now at California Institute of Technology, Pasadena, Calif.

⁴⁾ Numbers in brackets refer to References, page 564.

available it is possible to provide a very precise verification of the dimensional argument given in [3]. This showed that the dimensionless ratio

$$C = \frac{M}{M_{\infty}} \quad (2)$$

of the actual viscous torque M experienced by the disk to the ideal torque M_{∞} evaluated without regard to edge effects is a function of the geometrical dimensions of the system, all expressed as dimensionless ratios with respect to the boundary-layer thickness. Since the values of viscosity in [2] are accurate to 0.05%, the test is a very critical one.

The present paper contains a derivation of the extended formulae and an experimental verification of the soundness of the calibration procedure.

2. Working Formula for Moderate Spacings

The characteristic equation of the motion of the system was given already in [3], but will be repeated here for ease of reference in a slightly modified version. It has the form

$$(s + A_0)^2 + 1 + C \frac{\pi \rho R^4 \delta}{I} s^{3/2} \left\{ \frac{1}{2} [\coth(\beta_1 s^{1/2}) + \coth(\beta_2 s^{1/2})] + 2 \frac{d}{R} \cdot \frac{K_2(\xi_0 s^{1/2})}{K_1(\xi_0 s^{1/2})} \right\} = 0. \quad (3)$$

The preceding equation has been written for a disk of thickness d and radius R . $\xi_0 \delta$ oscillating between two plates separated from it by distances $b_1 - \beta_1 \delta$ and $b_2 - \beta_2 \delta$ respectively, the lateral separation being 'infinite'. The factor C which can be regarded as a function of δ/b , with $b = (b_1 + b_2)/2$, has been defined in equation (2); s denotes the complex frequency of the motion, A_0 is the damping decrement of the wire and K_1 and K_2 denote the modified Bessel functions of the second kind and of orders 1 and 2 respectively. Finally, δ denotes the boundary layer thickness given by

$$\delta = \sqrt{\frac{\nu}{\omega_0}}, \quad (4)$$

where ν is the kinematic viscosity of the fluid, and ω_0 is the natural frequency of the oscillating system whose moment of inertia has been denoted by I .

For large lateral separations [3], we may approximate

$$\frac{K_2(\xi_0 s^{1/2})}{K_1(\xi_0 s^{1/2})} \approx 1 + \frac{3}{2 \xi_0 s^{1/2}},$$

and the remaining task is to find a suitable approximation for $\coth(\beta s^{1/2})$,

remembering that the complex conjugate frequencies s and \bar{s} are given by

$$s, \bar{s} = -\frac{1 \mp i}{\theta},$$

where $\theta = T/T_0$ is the ratio of the actual period T to its value in a vacuum, T_0 , and where

$$\Delta = \frac{1}{2\pi m} \ln \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+m}} \quad (5)$$

is the decrement of damping, taken with respect to two amplitudes, α_n and α_{n+m} , m full cycles apart.

We note that

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{2} [\coth(\beta_1 s^{1/2}) + \coth(\beta_2 s^{1/2})] \\ &= \frac{\sinh(X + Y i)}{\cosh(X + Y i) - \cosh[(X + Y i)(\beta_1 - \beta_2)/(\beta_1 + \beta_2)]}, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

where

$$X, Y = \frac{2}{(2\theta)^{1/2}} \left[1 \mp \frac{1}{2} \Delta + \frac{1}{8} \Delta^2 \right] (\beta_1 + \beta_2). \quad (6a)$$

It is easy to see that in most realistic installations the difference $|\beta_2 - \beta_1|$ is much smaller than the sum $\beta_1 + \beta_2$. Denoting the mean separation by

$$\beta = \frac{1}{2} (\beta_1 + \beta_2)$$

and assuming

$$|\beta_2 - \beta_1| \ll 2\beta, \quad (7)$$

we find that

$$\frac{1}{2} [\coth(\beta_1 s^{1/2}) + \coth(\beta_2 s^{1/2})] \approx \frac{\sinh(X + Y i)}{\cosh(X + Y i) - 1}$$

if we put

$$\cosh[(X + Y i) \frac{\beta_1 - \beta_2}{\beta_1 + \beta_2}] \approx 1. \quad (7a)$$

We find from equations (6) that

$$\frac{X + Y i}{\beta_1 + \beta_2} = \frac{1}{(2\theta)^{1/2}} \left(1 - \frac{1}{2} \Delta + \dots \right) + i \left(1 + \frac{1}{2} \Delta + \dots \right)$$

so that

$$\left| \frac{X + Y i}{\beta_1 + \beta_2} \right| = O(1).$$

Hence, the error in the approximation (7a) is of the order

$$\cosh(\beta_1 - \beta_2) - 1$$

compared with the leading term $\cosh(X + Yi)$ in the denominator of equation (6). Taking the series expansion

$$\cosh(\beta_1 - \beta_2) - 1 = \frac{1}{2} (\beta_1 - \beta_2)^2 + \frac{1}{24} (\beta_1 - \beta_2)^4 + \dots$$

we prove that the error is quadratic in $(\beta_1 - \beta_2)$. Supposing that the disk is exactly in center at room temperature (say 20° C), and that it moves off center so that $|\beta_1 - \beta_2|$ becomes as high as 5% of $(\beta_1 + \beta_2)$, which is very unlikely, we find that the error will amount to only 0.0025% of the term retained. The effect of this on the viscosity will amount to $\pm 0.005\%$ because the latter is proportional to δ^2 . In most calculations an error of this magnitude can be ignored.

Substitution into equation (3) and separation into real and imaginary parts yields for the imaginary part the following working formula:

$$\left. \begin{aligned} \frac{2}{\theta} \left(\frac{\Delta}{\theta} - \Delta_0 \right) - C \frac{\pi \varrho R^4 \delta}{I} \left[H_1 K_2 - H_2 K_1 + \frac{2d}{R} \left(H_1 + \frac{3\delta}{2R\theta} \right) \right] &= 0, \\ \text{where} \quad H_1 &= \frac{1 - (3/2) \frac{\Delta}{\theta} - (3/8) \frac{\Delta^2}{\theta^2}}{2^{1/2} \theta^{3/2}}, \quad H_2 = \frac{1 + (3/2) \frac{\Delta}{\theta} - (3/8) \frac{\Delta^2}{\theta^2}}{2^{1/2} \theta^{3/2}}, \\ K_1 &= \frac{\sin Y}{\cosh X - \cos Y}, \quad K_2 = \frac{\sinh Y}{\cosh X - \cos Y}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Owing to the complexity of the resulting expressions, calculations must be performed with the aid of a digital computer.

The formula in equation (8) shows that when moderate separations are used, but provided that condition (7) is satisfied, i.e. provided that

$$|b_2 - b_1| \ll 2b, \quad (7a)$$

the evaluation of the results demands only the knowledge of the sum of the separations $2b$ and not of each of them separately. This is very convenient, because it is much easier to measure it accurately. It can be predetermined when proper spacers (such as Johanssen blocks) are used, as in [2].

3. Further Verification of the Hypothesis

Using equation (8) and the data in [2], the edge correction factor could be calculated for the 132 experimental points provided in it. The gases range

from the very light hydrogen to the very heavy xenon and include: air, argon, carbon dioxide, deuterium, helium, hydrogen, krypton, neon, nitrogen, oxygen, water vapor and xenon. The result is shown in Figure 1 as a plot of C against the dimensionless boundary layer thickness δ/b . This is a slight departure from

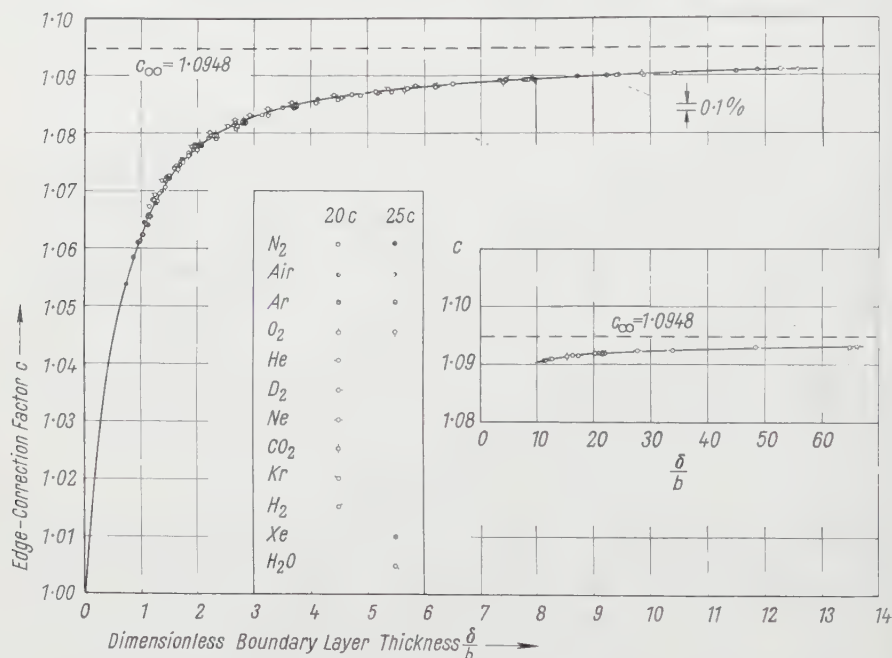


Figure 1
Edge-correction factor C for twelve gases: small separation.

[3] where the variable $x_0 = \delta/R_0$ was used. It is essentially equivalent because for a given arrangement the previous variable is proportional to the present one and differs from it only by the constant factor b/R_0 . The diagram in Figure 1 fully confirms the hypothesis as not a single one of the 132 points deviates from a smooth curve by more than 0.1%. Furthermore, the curve passes through the point $C = 1$, $\delta/b = 0$ and is asymptotic to NEWELL'S theoretical value

$$C_{\infty} = 1.0948.$$

The characteristics of the suspension system used in [2] are repeated here for convenience:

$$\begin{aligned} R &= 35.021 \pm 0.05 \text{ mm,} \\ d &= 0.8258 \pm 0.00038 \text{ mm,} \end{aligned}$$

$$I = 43.1672 \pm 0.0063 \text{ g cm}^2,$$

$$b_1 = 1.0094 \pm 0.00254 \text{ mm},$$

$$b_2 = 1.0094 \pm 0.00254 \text{ mm},$$

$$T_0 = 25.757 \pm 0.001 \text{ s}.$$

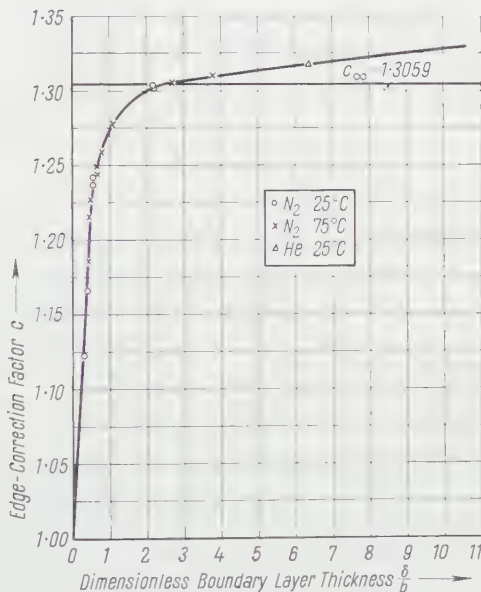


Figure 2

Edge-correction factor C at two temperatures: moderate separation.

A further verification is provided in Figure 2 which contains measurements performed with nitrogen at 25°C and 75°C at intermediate separations as well as one point obtained with helium. The suspension system had the characteristics:

$$R = 34.994 \pm 0.0025 \text{ mm},$$

$$d = 1.0992 \pm 0.0005 \text{ mm},$$

$$I = 56.740 \pm 0.087 \text{ g cm}^2,$$

$$b_1 + b_2 = 7.7980 \pm 0.005 \text{ mm},$$

$$T_0 = 34.805 \pm 0.001 \text{ s},$$

and the values given by MICHELS and GIBSON [4] were used in the evaluation. Once again, a single curve is traced at the two temperatures; the curve passes through $C = 1$, $\delta/b = 0$, but is no longer asymptotic to NEWELL'S value

$$C_\infty = 1.3059.$$

This is as expected, because the latter value is applicable to small separations only.

In concluding, the authors wish to note that although operation at large separations b is desirable, there seems to exist a natural practical limit for it. When the separations b are increased unduly, in the authors' experience to about 50 mm, the reproducibility deteriorates to an unacceptable degree. This seems to be due to convective currents and instabilities caused by small temperature differences throughout the mass of the gas and accentuated by the evolution of frictional heat in the boundary layer. At large separations the Rayleigh number seems to exceed its critical value for stability.

4. Acknowledgements

The funds for the work described in this paper were provided by the Office of Scientific Research, US Air Force under Contract AF 18(600)891 with Brown University. The authors wish gratefully to acknowledge this financial support. They also wish to thank Messrs. E. SOFTLEY and H. E. WANG for their help with the preparation of the drawings.

REFERENCES

- [1] G. F. NEWELL, *Theory of Oscillation Type Viscometers, V. Disk Oscillating Between Two Plates*, Z. angew. Math. Phys. 10, 160 (1959).
- [2] J. KESTIN and W. LEIDENFROST, *An Absolute Determination of the Viscosity of Eleven Gases Over a Range of Pressures* (to be published in Physica).
- [3] J. KESTIN and H. E. WANG, *Corrections for the Oscillating-Disk Viscometer*, J. appl. Mech., Trans. ASME 79, 197 (1957).
- [4] A. MICHELS and R. O. GIBSON, *The Measurement of the Viscosity of Gases at High Pressures; the Viscosity of Nitrogen to 1000 atm*, Proc. Roy. Soc., London [A] 134, 288 (1931).

Zusammenfassung

Die Abhandlung enthält die Ableitung einer Arbeitsgleichung für Relativmessung der Zähigkeit, bei der nach der Methode der oszillierenden Scheibe eine dünne Scheibe zwischen zwei feststehenden Platten Drehschwingungen ausführt. In der Formel ist der Randeinfluss nach KESTIN und WANG durch den sogenannten Randkorrekturfaktor berücksichtigt. Dieser aus dem Verhältnis des wirklichen Reibungsmomentes zum theoretischen sich ergebende Faktor ist abhängig von der Geometrie der experimentellen Anordnung, deren Abmessungen mit der Grenzschichtdicke dimensionslos gemacht sind.

Da von KESTIN und WANG für Anordnungen mit sehr grossen und sehr engen Spalten früher schon Formeln gebracht wurden, beschränkt sich die Ableitung hier auf mittlere Spaltweiten.

Um die Richtigkeit der der Arbeitsgleichung zugrunde liegenden hauptsächlichen Annahmen zu überprüfen, wurden die nach dem Relativverfahren gewonnenen Werte mit neuen und sehr genauen kürzlich von KESTIN und LEIDENFROST durchgeführten Absolutmessungen verglichen. Es ergab sich eine Übereinstimmung von 0,1%.

(Received: February 19, 1959.)

Thermoelastic Problem for an Isotropic Sphere with Temperature Dependent Properties¹⁾

By JERZY NOWINSKI, Madison, Wis., USA²⁾

Introduction

Modern structural elements are often subjected to temperature fields of such intensity that their mechanical behavior approaches that of viscoelastic bodies, and a representation by means of a classical Hookean model does not adequately describe their actual properties.

In spite of this fact, it was shown recently that the elastic thermostress if based on temperature dependent properties of a material corresponds to the upper value of stress in an inelastic problem for the incompressible viscoelastic Maxwell body [1]³⁾. The results obtained for rotationally symmetrical plane states of stress and strain with steady-state radial temperature gradient make it plausible that also in other cases the elastic thermostress, defining the initial conditions of a viscoelastic thermal process, might serve as an estimate of the decisive thermostress in actual structural elements.

Such a postulate will be also adopted in the sequel for metallic elements under consideration.

On the other hand, experimental data for common steels evidence that at elevated temperatures Poisson's ratio approaches its upper bound for isotropic materials namely 0.5 [5]. Of course, this is only approximately true and the respective values oscillate between 0.4 or 0.45 and 0.5.

The assumption of the elastic incompressibility of a body at elevated temperatures, however, permits us to obtain a simple solution to the problem, in a closed form convenient for numerical computations. Moreover, the solution may pertain to any polarly symmetrical temperature field $T = T(r)$, r being a position vector, as well as to any variation of YOUNG's modulus $E = E(T)$, shear modulus $G = G(T)$ and coefficient of thermal expansion $\alpha = \alpha(T)$, with temperature.

This assumption will be, therefore, adopted in subsequent arguments as the second basic postulate.

¹⁾ This research was sponsored by the United States Army under Contract No. DA-11-022-ORD-2059.

²⁾ United States Army Mathematics Research Center, University of Wisconsin.

³⁾ Numbers in brackets refer to References, page 575.

As far as the influence of the temperature dependent properties of a material on the thermostress is concerned, it has been investigated, to the present writer's knowledge, in the case of an infinite thick-walled tube and a circular ring, only in four papers [1-4]. The first two papers treat elastic incompressible material, the last two an arbitrary but constant Poisson ratio⁴).

The scope of the present paper is confined to an extension of the previous solutions to the case of a solid or hollow sphere subjected to spherically symmetrical temperature fields. Formulae have been derived for thermal stress dealing with arbitrary variation of temperature as well as arbitrary variation of YOUNG'S modulus, coefficient of thermal expansion and thermal conductivity with temperature.

Strain and Stress Fields

Consider an isotropic elastic sphere, with the pole of spherical coordinates at the center of the sphere, subjected to spherically symmetrical external tractions and spherically symmetrical temperature field $T = T(r)$, with r as position vector. Assume that YOUNG'S modulus E and coefficient of thermal expansion of the material of the sphere show marked dependence on temperature, and that Poisson's ratio ν is constant and equal to 0.5.

With usual notation, we obtain, in the case considered, the Hooke-Duhamel equations

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E(T)} (\sigma_r - \sigma_\varphi) + \int_0^{T(r)} \alpha(\tau) d\tau, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{1}{2 E(T)} (\sigma_\varphi - \sigma_r) + \int_0^{T(r)} \alpha(\tau) d\tau, \quad (1)$$

whereas all other components of stress and strain tensors vanish. In fact, $T(r)$ denotes the excess of temperature above the uniform ambient conditions at which thermostress disappears, and elastic and thermal coefficients have their usual values.

With u as radial displacement we have for the only non-vanishing unit elongations in the radial and tangent directions,

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r}. \quad (2)$$

Since the elastic dilatation of the body is zero, by hypothesis, equations (1)

⁴) *Addendum by Proofreading:* The author wishes to express his thanks to Professor CHANG, University of Minnesota, for drawing attention to the paper *Stresses in a Metal Tube Under Both High Radial Temperature Variation and Internal Pressure* by C. C. CHANG and W. H. CHU, J. appl. Mech. 21, 101 (1954), in which a related problem has been investigated on the basis of experimental data. Also a recent paper by R. TROSTEL, *Stationäre Wärmespannungen mit temperaturabhängigen Stoffwerten*, Ing.-Archiv 26, 416 (1958), giving a general solution to the thermoelastic problem for temperature dependent material properties, using the perturbation method, should be mentioned.

and (2) yield simply

$$\frac{d}{dr} (r^2 u) = 3 r^2 \Phi, \quad (3)$$

with a notation

$$\Phi = \int_0^{T(r)} \alpha(\tau) d\tau. \quad (4)$$

An integration of the differential equation (3) yields the radial displacement

$$u = \frac{3}{r^2} \chi_{a1}(r) + \frac{C_1}{r^2}, \quad (5)$$

where C_1 is a constant of integration to be determined later from the boundary conditions, and

$$\chi_{a1}(r) = \int_a^r \varrho^2 \Phi d\varrho; \quad (6)$$

a is any convenient lower limit for the integral, such as the inner radius of a hollow sphere.

Clearly now

$$\epsilon_r = -\frac{2}{r^3} \left[3 \chi_{a1}(r) - \frac{3}{2} \Phi r^3 + C_1 \right], \quad \epsilon_\varphi = -\frac{1}{r^3} [3 \chi_{a1}(r) + C_1], \quad (7)$$

and the second equation (1) gives

$$\sigma_r - \sigma_\varphi = -\frac{2 E(T)}{r^3} [3 \chi_{a1}(r) - r^3 \Phi + C_1]. \quad (8)$$

In addition to the foregoing equation, in the absence of body forces, we have the following well-known stress equation of equilibrium

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2}{r} (\sigma_r - \sigma_\varphi) = 0. \quad (9)$$

By virtue of these two equations a trivial integration gives finally the radial and hoop stresses

$$\sigma_r = 4 [3 \Psi_a(r) - \psi_a(r) + C_1 \chi_{a2}(r)] + C_2, \quad (10)$$

$$\sigma_\varphi = 6 \left\{ 2 \Psi_a(r) + \frac{E(T)}{r^3} \chi_{a1}(r) \right\} - 2 \left\{ 2 \psi_a(r) + E(T) \Phi \right. \\ \left. + 2 \left[2 \chi_{a2}(r) + \frac{E(T)}{r^3} \right] C_1 + C_2 \right\}, \quad (11)$$

with the notation

$$\left. \begin{aligned} \Psi_a(r) &= \int_a^r \frac{E(T)}{\sigma^4} \int_a^\sigma \varrho^2 \Phi d\varrho d\sigma, \quad \psi_a(r) = \int_a^r E(T) \frac{\Phi}{\varrho} d\varrho, \\ \chi_{a2}(r) &= \int_a^r \frac{E(T)}{\varrho^4} d\varrho; \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

and C_2 as constant of integration.

Thus we have obtained, as was announced earlier, a solution in a closed form and valid for any symmetrical temperature distribution as well as for any variation of $T(r)$ and $\alpha(r)$.

Let us now investigate two characteristic cases.

Solid Sphere

In this particular case the lower limit a of the integrals may be put equal to zero.

For $r = 0$, because of symmetry, we ought to have $u = 0$. This yields $C_1 = 0$ in equation (5) since by virtue of the theorem of the mean value of an integral,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^2} \chi_{01}(r) = 0, \quad (13)$$

with 0 substituted for the subscript a in χ_{a1} . A similar notation will be subsequently used, for $a = 0$, in the symbols Ψ_a , ψ_a and χ_{a2} .

We proceed now to show that σ_r and σ_φ also remain bounded, for $a \rightarrow 0$ and $r \rightarrow 0$, if we take $C_1 = 0$. In fact, since, for $a = 0$, the integrands in $\Psi_a(r)$ and $\chi_{a2}(r)$ increase infinitely by approaching the lower limit of the interval of integration, we have to compute the difference of the improper integrals $\Psi_a(r)$ and $\psi_a(r)$,

$$D_{ar} = 3 \Psi_a(r) - \psi_a(r) \quad (14)$$

assuming $a \neq 0$, and then pass to the limit by allowing $a \rightarrow 0$. This yields

$$\lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ r \rightarrow 0}} D_{ar} = -\frac{1}{3} E(0) \Phi(0). \quad (15)$$

Now, in order that χ_{a2} in equation (10) and the last bracketed term in (11) remain bounded as $a \rightarrow 0$ and $r \rightarrow 0$, it suffices to put $C_1 = 0$, as was asserted.

Thus, finally, we obtain for the stress at the center of a solid sphere the bounded expression

$$\sigma_r(0) = \sigma_\varphi(0) = -\frac{4}{3} E(0) \Phi(0) + C_2. \quad (16)$$

Let us write explicitly the difference $\sigma_r - \sigma_t$, for $C_1 = 0$ and $a = 0$, from (8) in the form

$$\sigma_r - \sigma_t = 2 E(T) \left(\Phi - \frac{\int_0^r 4 \pi \varrho^2 \Phi d\varrho}{\frac{4}{3} \pi r^3} \right). \quad (17)$$

Clearly the second bracketed term in the foregoing equation represents the mean unit thermal expansion of the sphere with radius r . Hence, the following theorem holds: In a solid sphere with temperature dependent properties subjected to radial temperature gradient, the difference between the local hoop and radial stresses at a point r is in direct proportion to the difference between the local value of the thermal expansion and its mean value within the sphere with radius r . The factor of proportionality is double the local value of YOUNG'S modulus.

Since half a difference between each two principal normal stresses at a point designates a principal shear stress at the point, the foregoing theorem provides us with direct data for the Tresca-Saint Venant or Huber-Mises-Hencky criterion of plastic yielding at the point. Furthermore, the factor of proportionality being equal to the modulus of elasticity, we can at once perceive in what degree the temperature dependent properties of a material influence its tendency to plastic yielding. It appears, at this early stage of our investigation, that the assumption of a temperature-independent elastic modulus and the use of its value corresponding to the ambient conditions lead to an overestimation of the intensity of stress, provoking plastic yielding at elevated temperatures.

The constant of integration C_2 can be now computed from the boundary conditions at the surface of the sphere $r = b$. For a tractionfree surface, for instance, we get

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= 12 [\Psi_0(r) - \Psi_0(b)] - 4 [\psi_0(r) - \psi_0(b)], \\ \sigma_\varphi &= 12 [\Psi_0(r) - \Psi_0(b)] - 4 [\psi_0(r) - \psi_0(b)] + 2 \left[\frac{3 E(T)}{r^3} \chi_{01}(r) - E(T) \Phi \right]. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Sphere with a Central Hole

Let us denote, in this particular case, the inner and outer radii of the hollow sphere by a and b , respectively. Suppose, furthermore, that in addition to a steady-state radial temperature gradient, the spherical container is submitted to an action of an internal uniform pressure \bar{p} , and embedded in an elastic medium of Winkler type characterized by the modulus κ . These assumptions clearly yield,

$$\sigma_r(a) = -\bar{p}, \quad \sigma_r(b) = -\kappa u(b). \quad (19)$$

From (5) and (10) a trivial computation yields the following values of the constant of integration:

$$C_1 = - \frac{3 \Psi_{ab} - \psi_{ab} + \frac{3\kappa}{4b^2} \chi_{a1b} - \frac{p}{4}}{\chi_{a2b} + \frac{\kappa}{4b^2}}, \quad C_2 = -p, \quad (20)$$

an additional subscript in the notation of the functions (6) and (12) being required to indicate their value on the outer surface $r = b$.

For $\kappa = 0$, one deals with an instance of a sphere free from external load on the outer surface.

For $\kappa = \infty$, an instance of a container embedded in an absolutely rigid medium is obtained. In this particular case

$$C_1 = -3 \chi_{a1b}, \quad (21)$$

and $u(b) = 0$.

The elastic medium which, in a general case, surrounds the container may be, of course, represented by a second hollow sphere, constituting an outer layer of a composite double layer sphere. It is easy then to compute the respective modulus of the medium κ .

To this purpose, let us assume that the medium is also temperature sensitive, and denote all quantities concerning the medium by an asterisk. We can adapt all the foregoing equations by substituting b for a , for the inner radius of the outer sphere, and c for b , for the outer radius of that sphere. Moreover, we have to take $\kappa = 0$ and denote inner pressure p by κ . This procedure leads to the following equations:

$$\left. \begin{aligned} u^* &= \frac{3}{r^2} \int_b^r \varrho^2 \Phi^* d\varrho + \frac{C_1^*}{r^2}, \\ \sigma_r^* &= 12 \int_b^r \frac{E^*(T)}{\sigma^4} \int_b^\sigma \varrho^2 \Phi^* d\varrho d\sigma - 4 \int_b^r E^*(T) \frac{\Phi^*}{\varrho} d\varrho \\ &\quad + 4 C_1^* \int_b^r \frac{E^*(T)}{\varrho^4} d\varrho + C_2^*, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

with $\Phi^* = \int_0^{T(r)} \alpha^*(\tau) d\tau$.

Using notation similar to that used previously one gets from (20) the constants of integration,

$$C_1^* = - \frac{3 \Psi_{bc}^* - \psi_{bc}^* - \frac{\kappa}{4}}{4 \chi_{b2c}^*}, \quad C_2^* = -\kappa. \quad (23)$$

Now the condition $u^*(b) = 1$, which expresses the true nature of the modulus κ , as being a pressure which provokes a unit radial displacement on the inner surface $r = b$ of the outer sphere, yields

$$\kappa = 4 (3 \Psi_{bc}^* - \psi_{bc}^* + \chi_{b2c}^* b^2) . \quad (24)$$

If the improper integrals in the last equation converge for $c \rightarrow \infty$, then the limit of the right-hand member in (24) will represent a unit response of a temperature sensitive infinite elastic space produced by an expansion of the (inner) sphere. It follows that we shall be concerned with a thermo-elastic problem for a temperature sensitive container embedded in an ideal temperature sensitive elastic medium.

Let us now take the situation as it often occurs in actuality, namely that of a medium at zero excess temperature, $T^* = 0$. Then $\Phi^* = 0$, $E^*(0) = E_0^*$, and one obtains simply

$$\kappa = \frac{4 E_0^*}{3 b} , \quad (25)$$

which is a known result [6].

Temperature Field

Let us suppose that the thermal conductivity of a material k has a marked dependence on local temperature. Then the general equation of the temperature field, for a steady-state conduction in a system free of sources and sinks, becomes

$$k \nabla^2 T + \nabla k \cdot \nabla T = 0 ,$$

with ∇ and ∇^2 denoting a gradient and a Laplace operator, respectively, and the dot denoting the scalar product.

In the polarly symmetrical case we get in polar coordinates simply

$$\frac{d}{dr} \left(k r^2 \frac{dT}{dr} \right) = 0 , \quad (27)$$

or after integration

$$\int k dT = -\frac{K_1}{r} + K_2 \quad (28)$$

with K_1 and K_2 as constants of integration.

For most practical situations the nonuniformity of k can be expressed without any substantial error by a linear function

$$k = k_0 (1 - \beta T) , \quad (29)$$

where k_0 is the known conductivity at the ambient temperature and β is a coefficient, in general, positive for homogeneous metals.

To be specific, let us assume the isothermal boundary conditions at the surfaces of the container discussed,

$$r = a, \quad T = T_a, \quad r = b, \quad T = T_b. \quad (30)$$

Then integration of (28) and solution of the quadratic equation in T yields, by virtue of (30), the following distribution of temperature:

$$T = \frac{1}{\beta} - \sqrt{\frac{1}{b-a} \left[\left(\frac{1}{\beta} - T_b \right)^2 b \left(1 - \frac{a}{r} \right) - \left(\frac{1}{\beta} - T_a \right)^2 a \left(1 - \frac{b}{r} \right) \right]}. \quad (31)$$

Following the procedure of [3] it is easy to show that using TAYLOR's formula for the right-hand member of equation (31) and passing to the limit, with $\beta \rightarrow 0$, yields the well-known temperature distribution for uniform conductivity:

$$T = \frac{1}{b-a} \left[T_b b \left(1 - \frac{a}{r} \right) - T_a a \left(1 - \frac{b}{r} \right) \right]. \quad (32)$$

It will be shown later that for moderate temperature gradients, such as assumed in the following numerical example involving prescribed steady temperature values on the surfaces of the container, no significant difference exists between the temperature fields for temperature dependent and independent conductivities⁵⁾. In view of this, the simple temperature distribution (32) instead of the complex one (31) can sometimes be adopted.

Numerical Example

Let us consider a hollow sphere under steady-state radial temperature gradient and no surface tractions. Using our previous notation we assume that $a = 50$ [cm], $b = 100$ [cm], $T_a = 500$ [°C], $T_b = 400$ [°C]. For a steel container we take

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= (1200 + T^\circ\text{C}) \cdot 10^{-8} \quad [^\circ\text{C}^{-1}], \\ E &= [1758.2 - 3.573 (T^\circ\text{C} - 400)] \quad [\text{kg cm}^{-2}]. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

The last expression has been computed for the interval $750 \leq T^\circ\text{F} \leq 1000$, which includes the interval $400 \leq T^\circ\text{C} \leq 500$, from the experimental data given in [5] for the S.A.E. 1095 steel.

⁵⁾ It was shown, however, in [3] for a circular tube, that this is not always the case if instead of the prescribed boundary temperatures a heat exchange between a surface of the body and the surrounding medium is assumed.

Assume in (29) that $k_0 = 0.11$ [cal cm⁻¹ s⁻¹ °C⁻¹] and $\beta = 0.0007$ [°C⁻¹]. Then equations (32) and (31) yield the following temperature fields:

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= 300 + \frac{10000}{r}, \\ T_2 &= 1428.57 - \sqrt{2,115,912 \left(1 - \frac{50}{r}\right) - 862,242 \left(1 - \frac{100}{r}\right)}, \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

which for specific values of $r = 60$ and 80 become

r	T_1	T_2	Difference per cent
60	466.67	465.51	1.16
80	425.00	424.07	0.93

In view of an insignificant difference between the respective values of temperature just obtained we shall use the simpler equation (32). By substituting its right-hand member in the second relation (33) we get finally Young's modulus in terms of the position vector,

$$E = \left(2.116 - \frac{35.73}{r}\right) 10^6.$$

Consequently, we compute Φ from (4) and then the stresses from (10) and (11). They are shown in Figures 1 and 2 being denoted by (temp. dep.). Along with

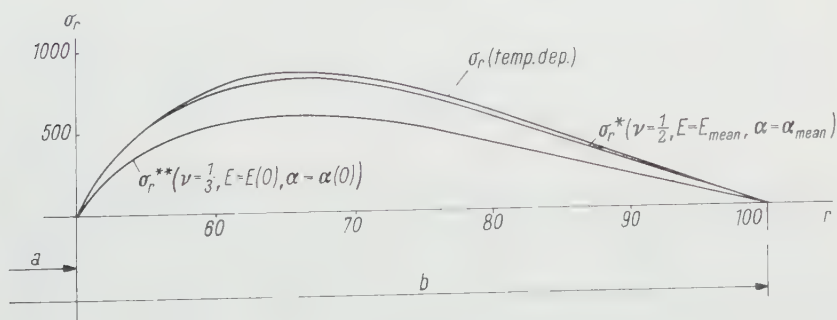


Figure 1
The radial stress.

the curves related to the latter stresses two other pairs of curves are plotted in the figures marked by one or two asterisks. Those marked with one asterisk correspond to the well-known formulae for a temperature insensitive material,

given, for instance, in [7]. There have been computed for Poisson's ratio equal to 0.5 and for the values of α and E from (33) corresponding to the arithmetic mean of the boundary temperatures, that is to 450°C. It may be seen that, at least in the particular case considered, the difference between the corresponding stress fields is meaningless as far as the accuracy usually required is concerned.

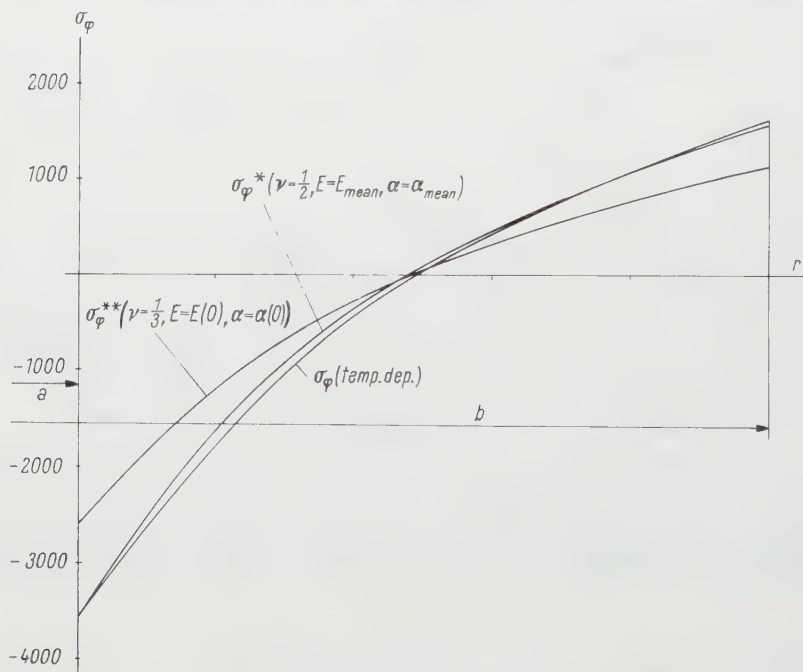


Figure 2
The hoop stress.

Hence, in this instance, we could calculate with orthodox equations for temperature independent material using mean values of α and E . For the sake of comparison, in Figures 1 and 2 the stress field for temperature independent material has also been shown assuming $\nu = 1/3$ and the values of E and α corresponding to the ambient conditions. Clearly, in this case the actual influence of the temperature on the intensity of the stress field would be considerably underestimated. Thus, for instance, the maximum compressive hoop stress on the inner surface of the sphere would be almost 27% less than that computed from the more accurate equation.

It should be noted that in the foregoing numerical example the temperature field is of such an intensity that it induces stress locally exceeding the proportional

limit of the material. Consequently, the numerical values of stress in these regions may serve only as an illustration of the influence of the temperature sensitive properties of the material on the magnitude of thermal stress.

REFERENCES

- [1] H. H. HILTON, *Thermal Stresses in Bodies Exhibiting Temperature-Dependent Properties*, J. appl. Mech. **74**, 350 (1952).
- [2] H. JUNG, *Zur Theorie der Wärmespannungen*, Wiss. Z. Hochsch. Schwermasch. Magdeburg **1**, 15 (1957).
- [3] R. TROSTEL, *Wärmespannungen in Hohlzylindern mit temperaturabhängigen Stoffwerten*, Ing.-Arch. **26**, 134 (1958).
- [4] J. NOWINSKI, *Thermal Stresses in a Thick-Walled Cylinder with Variable Elastic Properties*, Arch. Mech. Stos. **5**, 629 (1953).
- [5] F. L. EVERETT and J. MIKLOVITZ, *Poisson's Ratio at High Temperatures*, J. appl. Phys. **15**, 592 (1944).
- [6] J. NOWINSKI, *Note on a Thermoelastic Problem for a Transversely Isotropic Hollow Sphere Embedded in an Elastic Medium*, J. appl. Mech. (in print).
- [7] S. TIMOSHENKO and J. N. GOODIER, *Theory of Elasticity* (McGraw-Hill, New-York, Toronto, and London 1951).

Zusammenfassung

Es werden Wärmespannungen infolge polarsymmetrischer stationärer Temperaturfelder in einer isotropen Kugel mit temperaturabhängigen Stoffwerten untersucht. Das Material wird als inkompressibel vorausgesetzt, was einem oberen Grenzwert der viskoelastischen Spannungen in einem Maxwell'schen Körper entspricht. Diese Annahme erlaubt, die Lösung in einer geschlossenen Form und für jede Temperaturverteilung und Temperaturabhängigkeit der Materialkonstanten und des Wärmeausdehnungskoeffizienten aufzustellen. Es werden allgemeine Formeln für die Spannungs- und Verschiebungsfelder in einer vollen Kugel und in einer kugelförmigen Schale gegeben und die Einwirkung der variablen Wärmeleitzahl auf das Temperaturfeld untersucht. Ein numerisches Beispiel für lineare Temperaturabhängigkeit des Elastizitätsmoduls und des Wärmeausdehnungskoeffizienten wird berechnet.

(Received: April 22, 1959.)

Eine Kuppel gleicher Festigkeit

VON WERNER ISSLER, Zürich

Einleitung

Um den Membranspannungszustand einer beliebigen Schale zu beschreiben, genügt es, für jeden Punkt der Schale die Richtungen und die Beträge der Hauptspannungen σ_1 und σ_2 anzugeben.

Speziell spricht man von einer Schale gleicher Festigkeit, wenn für jeden Punkt der Schale die Gleichung

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \mp \sigma_0 \quad (1)$$

gilt, wobei mit σ_0 die Fließgrenze (bzw. Bruchgrenze) bei reinem Zug oder Druck bezeichnet ist. Die Festigkeit des Materials einer solchen Schale ist offensichtlich optimal ausgenützt, wenn für das Fließen (bzw. für den Bruch) die grösste auftretende Normalspannung massgebend ist. Genügt hingegen das Material einer andern Fließ- bzw. Bruchhypothese, so ist die obige Definition der gleichen Festigkeit weniger sinnvoll.

ZIEGLER¹⁾ hat daher kürzlich den Begriff der gleichen Festigkeit in einer neuen Form verwendet. Er ersetzt die Forderung (1) durch die Fließbedingung von TRESCA (bzw. Bruchhypothese konstanter Schubspannung)

$$\text{Max} (|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_2|) = \sigma_0 \quad (2)$$

oder durch die Fließbedingung von v. MISES (bzw. Bruchhypothese konstanter Gestaltänderungsarbeit)

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 = \sigma_0^2 \quad (3)$$

In der Spannungsebene (σ_1, σ_2) (Figur 1) wird die Bedingung (1) durch den Punkt A, (2) durch das Sechseck von TRESCA und (3) durch die umgeschriebene Ellipse dargestellt.

Die sphärische Kuppel gleicher Festigkeit

Wir betrachten die sphärische Kuppel, die nur durch ihr Eigengewicht belastet ist.

Wie ZIEGLER¹⁾ gezeigt hat, existiert eine solche Kuppel gleicher Festigkeit im Sinne der Bedingung von TRESCA. Dieselbe Kuppel lässt sich aber auch als Kuppel gleicher Festigkeit im Sinne der Bedingung von v. MISES ausbilden. Die Lösung dieser Aufgabe ist im folgenden kurz dargestellt.

Als Koordinatennetz auf der Kugel wählen wir das geographische, wobei wir mit ϑ die Länge und mit φ das Komplement der Breite bezeichnen. Für die gewählte, rotationssymmetrische Belastung hat die eine Hauptspannung, zum Beispiel σ_1 , überall die Richtung der Meridiantangente und damit σ_2 die Richtung der Breitenkreistangente. Ist a der Radius, $t(\varphi)$ die Wandstärke und γ das spezifische Gewicht

¹⁾ H. ZIEGLER, *Kuppeln gleicher Festigkeit*, Ing.-Archiv 26, 378 (1958).

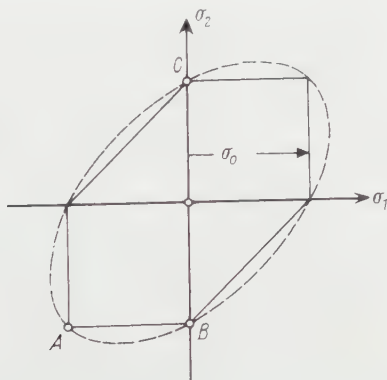
der Schale, so erhält man durch Spezialisierung der bekannten Membrangleichungen²⁾ auf unser Problem die Beziehungen

$$\frac{d}{d\varphi}(t \sigma_1 \sin \varphi) - t \sigma_2 \cos \varphi + a \gamma t \sin^2 \varphi = 0, \quad \sigma_1 + \sigma_2 + a \gamma \cos \varphi = 0.$$

Zusammen mit der Bedingung (3)

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 = \sigma_0^2$$

und der Schalenstärke t_0 im Scheitel bestimmen sie den Verlauf der Wandstärke $t(\varphi)$. Man erhält zwei Lösungen, da man für den Spannungspunkt (σ_1, σ_2) , ausgehend von A (Figur 1), den Ellipsenast AB oder AC vorschreiben kann.



Figur 1

Fließfigur (oder Bruchfigur).

Lösung 1

Der Spannungspunkt (σ_1, σ_2) wandert auf der Ellipse (Figur 1) von A nach B . Die Lösung

$$t(\varphi) = t_0 \left[\frac{\cos \pi/6}{\cos(\varphi + \pi/6)} \right]^3$$

bleibt auf das Intervall $0 \leq \varphi < \pi/3$ beschränkt, da t/t_0 für $\varphi \rightarrow \pi/3$ gegen ∞ strebt.

Lösung 2

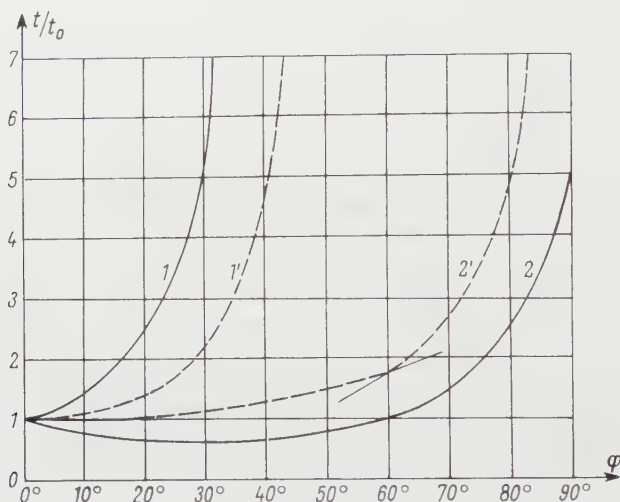
Der Spannungspunkt (σ_1, σ_2) wandert auf der Ellipse (Figur 1) von A nach C . Die Lösung

$$t(\varphi) = t_0 \left[\frac{\cos \pi/6}{\cos(\varphi - \pi/6)} \right]^3$$

gilt für das Intervall $0 \leq \varphi < 2\pi/3$.

²⁾ W. FLÜGGE, *Statik und Dynamik der Schalen*, 2. Aufl. (Springer, Berlin 1957), S. 26.

Interessant ist der Vergleich dieser Lösungen 1 und 2 (Figur 2) mit den entsprechenden 1' und 2' (Figur 2), die ZIEGLER¹) für die sphärische Kuppel gleicher Festig-



Figur 2

Verlauf der Wandstärke.

keit im Sinne der Bedingung von TRESKA ermittelt hat. Die Lösung 2 ist offensichtlich ökonomischer als die übrigen drei, da sie für alle zulässigen Winkel φ mit der geringsten Wandstärke auskommt.

Summary

Thin shells of optimum strength are usually defined by the condition that the two principal stresses in any point are equal to the yield stress. This definition is too restrictive; it is sufficient that principal stresses satisfy the yield condition of v. MISES or the one of TRESKA.

In this paper a proof is supplied for the existence of spherical cupolas of equal strength on the basis of v. MISES' yield condition, and an exact solution is presented for the distribution of thickness.

(Eingegangen: 12. Mai 1959.)

Propagation of Elastic Waves in an Infinite Plate of Cylindrically Aelotropic Material

By MANINDRA MITRA, Calcutta, India¹⁾

Introduction

The oscillations of an infinite, isotropic elastic plate have been studied by RAYLEIGH [1]²⁾, LAMB [2], SATÔ [3] and others. In this paper free oscillations of an infinite plate of cylindrical aelotropy are considered for motions symmetrical about an axis perpendicular to the plate. The frequency equations obtained were used to calculate numerically, for the first two modes of propagation only, the dependence of the wave-velocity on the wave-length of progressive waves in such plates.

Solution of the Problem

Cylindrical co-ordinates are chosen in such a way that the free surfaces of the plates have equations $z = \pm a$ in the equilibrium position. It is assumed that the oscillations are symmetrical about the z -axis and that the stress-strain relations are given by

$$\left. \begin{aligned} \widehat{rr} &= c_{11} e_{rr} + c_{12} e_{\theta\theta} + c_{13} e_{zz}, \\ \widehat{\theta\theta} &= c_{12} e_{rr} + c_{11} e_{\theta\theta} + c_{13} e_{zz}, \\ \widehat{zz} &= c_{13} e_{rr} + c_{13} e_{\theta\theta} + c_{33} e_{zz}, \\ \widehat{r\theta} &= c_{44} e_{\theta z}, \quad \widehat{zr} = c_{44} e_{zr}, \quad \widehat{r\theta} = \frac{c_{11} - c_{12}}{2} e_{r\theta}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

where \widehat{rr} , $\widehat{\theta\theta}$, \widehat{zz} etc. are the components of the stress and e_{rr} , $e_{\theta\theta}$, e_{zz} etc. the components of the strain. Using the well-known expressions for the components of the strain in terms of the components (u , v , w) of the displacement, noting that for motions symmetrical about the z -axis $v = 0$, and substituting in the equations of motion, one obtains

$$\left. \begin{aligned} \left[c_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{c_{11}}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + c_{44} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ (c_{13} + c_{44}) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \left[c_{44} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{c_{44}}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + c_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

the other equation of motion being satisfied identically.

On putting

$$u = A' J_1(\xi r) e^{i\xi ct + \xi yz}, \quad w = B' J_0(\xi r) e^{i\xi ct + \xi yz},$$

¹⁾ Department of Mathematics, Jadavpur University.

²⁾ Numbers in brackets refer to References, page 583.

A' , B' being constants, it is easily seen that the differential equations (2) are satisfied if

$$(c_{44} \gamma^2 + \varrho c^2 - c_{11}) A' - \gamma (c_{13} + c_{44}) B' = 0, \quad (3)$$

$$\gamma (c_{13} + c_{44}) A' + (c_{33} \gamma^2 + \varrho c^2 - c_{44}) B' = 0,$$

that is, if

$$(c_{44} \gamma^2 + \varrho c^2 - c_{11}) (c_{33} \gamma^2 + \varrho c^2 - c_{44}) + \gamma^2 (c_{13} + c_{44})^2 = 0. \quad (4)$$

Let $\pm h_1$, $\pm k_1$ be the roots of this equation in γ . The general solution for (u, w) may then be taken as

$$\left. \begin{aligned} u &= [A e^{\xi h_1 z} + B e^{-\xi h_1 z} + C e^{\xi k_1 z} + D e^{-\xi k_1 z}] J_1(\xi r) e^{t \xi c t}, \\ w &= \left[\frac{c_{44} h_1^2 + \varrho c^2 - c_{11}}{h_1 (c_{13} + c_{44})} \{A e^{\xi h_1 z} - B e^{-\xi h_1 z}\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{c_{44} k_1^2 + \varrho c^2 - c_{11}}{k_1 (c_{13} + c_{44})} \{C e^{\xi k_1 z} - D e^{-\xi k_1 z}\} \right] J_0(\xi r) e^{t \xi c t}, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

the expression for w being determined with the help of equation (3).

The boundary conditions at $z = \pm a$ are the vanishing of the stress components \widehat{zz} , \widehat{zr} , $\widehat{z\theta}$. These conditions, written down with the help of (1), (5) and the expressions for e_{rr} , $e_{\theta\theta}$, etc. in terms of (u, v, w) , are satisfied if

$$\left. \begin{aligned} \left[h_1 - \frac{c_{44} h_1^2 + \varrho c^2 - c_{11}}{h_1 (c_{13} + c_{44})} \right] A_1 \sinh(\xi h_1 a) \\ + \left[k_1 - \frac{c_{44} k_1^2 + \varrho c^2 - c_{11}}{k_1 (c_{13} + c_{44})} \right] C_1 \sinh(\xi k_1 a) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} \left[c_{13} + c_{33} \frac{c_{44} h_1^2 + \varrho c^2 - c_{11}}{c_{13} + c_{44}} \right] A_1 \cosh(\xi h_1 a) \\ + \left[c_{13} + c_{33} \frac{c_{44} k_1^2 + \varrho c^2 - c_{11}}{c_{13} + c_{44}} \right] C_1 \cosh(\xi k_1 a) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \left[h_1 - \frac{c_{44} h_1^2 + \varrho c^2 - c_{11}}{h_1 (c_{13} + c_{44})} \right] B_1 \cosh(\xi h_1 a) \\ + \left[k_1 - \frac{c_{44} k_1^2 + \varrho c^2 - c_{11}}{k_1 (c_{13} + c_{44})} \right] D_1 \cosh(\xi k_1 a) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \left[c_{13} + c_{33} \frac{c_{44} h_1^2 + \varrho c^2 - c_{11}}{c_{13} + c_{44}} \right] B_1 \sinh(\xi h_1 a) \\ + \left[c_{13} + c_{33} \frac{c_{44} k_1^2 + \varrho c^2 - c_{11}}{c_{13} + c_{44}} \right] D_1 \sinh(\xi k_1 a) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

where

$$A = \frac{A_1 + B_1}{2}, \quad B = \frac{A_1 - B_1}{2}, \quad C = \frac{C_1 + D_1}{2}, \quad D = \frac{C_1 - D_1}{2}.$$

The above equations will be satisfied for different values of ϱc^2 if one of the following conditions hold.

(i) $B_1 = D_1 = 0$ and

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tanh(a \xi h_1)}{\tanh(a \xi h_1)} &= \frac{h_1}{h_1} \cdot \frac{c_{13} h_1^2 - \varrho c^2 + c_{11}}{c_{13} h_1^2 - \varrho c^2 + c_{11}} \\ &< \frac{c_{13} (c_{13} + c_{44}) - c_{11} c_{33} + c_{33} c_{44} h_1^2 + c_{33} \varrho c^2}{c_{13} (c_{13} + c_{44}) - c_{11} c_{33} + c_{33} c_{44} h_1^2 + c_{33} \varrho c^2} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

In this case

$$u \propto [A_1 \cosh(\xi h_1 z) + C_1 \cosh(\xi h_1 z)]$$

and

$$u \propto \left[\frac{c_{44} h_1^2 - \varrho c^2 - c_{11}}{h_1} A_1 \sinh(\xi h_1 z) + \frac{c_{44} h_1^2 + \varrho c^2 - c_{11}}{h_1} C_1 \sinh(\xi h_1 z) \right].$$

Hence $u_{z=c} = u_{z=-c}$ and $w_{z=c} = -w_{z=-c}$.

Thus the oscillations are symmetrical about the plane $z = 0$.

(ii) $A_1 = C_1 = 0$ and

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tanh(a \xi h_1)}{\tanh(a \xi h_1)} &= \frac{h_1}{h_1} \cdot \frac{c_{13} h_1^2 - \varrho c^2 + c_{11}}{c_{13} h_1^2 - \varrho c^2 + c_{11}} \\ &< \frac{c_{13} (c_{13} + c_{44}) - c_{11} c_{33} + c_{33} c_{44} h_1^2 + c_{33} \varrho c^2}{c_{13} (c_{13} + c_{44}) - c_{11} c_{33} + c_{33} c_{44} h_1^2 + c_{33} \varrho c^2} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

It is easily seen that this frequency equation corresponds to vibrations anti-symmetrical about the plane $z = 0$.

If h_1^2 , say, is negative, on putting $h_1^2 = -h_1'^2$, and writing

$$\tanh(h_1 a \xi) = i \tan(h_1' a \xi), \quad h_1 = i h_1',$$

one obtains equations (10) and (11) in terms of real quantities.

Similar changes are made if h_1^2 is negative.

As $a \rightarrow \infty$, the above equations reduce to

$$1 = \frac{h_1}{h_1} \cdot \frac{c_{13} h_1^2 - \varrho c^2 + c_{11}}{c_{13} h_1^2 - \varrho c^2 + c_{11}} \cdot \frac{c_{13} (c_{13} + c_{44}) - c_{11} c_{33} + c_{33} c_{44} h_1^2 + c_{33} \varrho c^2}{c_{13} (c_{13} + c_{44}) - c_{11} c_{33} + c_{33} c_{44} h_1^2 + c_{33} \varrho c^2}$$

which is the equation giving the Rayleigh wave velocity in the medium. It is assumed here that $h_1^2 > 0$, $h_1'^2 > 0$.

These equations reduce to the corresponding equations in the case of isotropy if

$$c_{11} = c_{33} = \lambda + 2\mu, \quad c_{12} = c_{13} = \lambda, \quad c_{44} = \mu.$$

The oscillations considered correspond to periods $2\pi/\xi c$, and $2\pi/\xi$ is approximately the length of the wave-form of the surface of the plate for large values of r since the asymptotic expansion of $J_0(\xi r)$ and $J_1(\xi r)$ involve $\cos(\xi r)$ and $\sin(\xi r)$. However, if the propagation of elastic waves are considered, $2\pi/\xi$ is the wave-length and c the wave-velocity for large values of r . The dependence of c on ξ has been determined numerically from equations (10) and (11) for the first two modes of propagation only. It has been assumed that

$$c_{11} = 2.694, \quad c_{33} = 2.363, \quad c_{12} = 0.961, \quad c_{13} = 0.661, \quad c_{44} = 0.653.$$

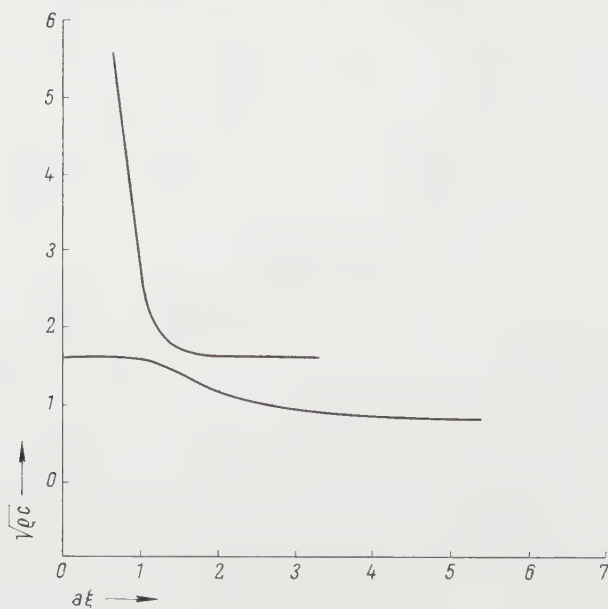


Figure 1
Symmetrical vibrations.

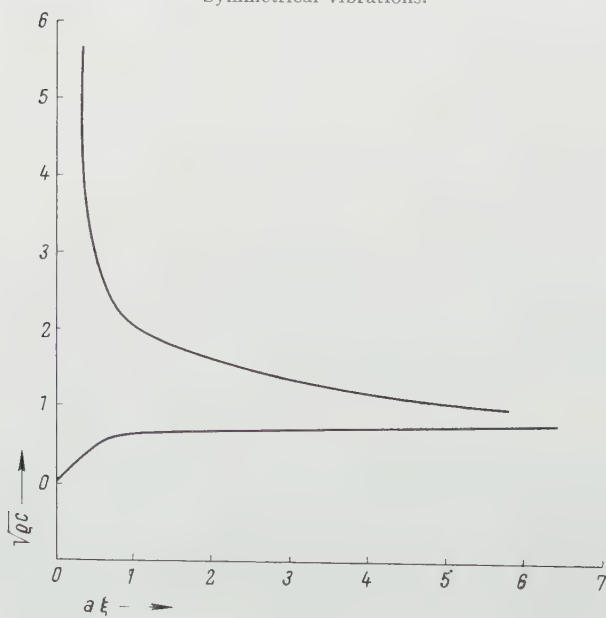


Figure 2
Anti-symmetrical vibrations.

These are such that the values of h_1^2 and h_2^2 obtained from equation (4) are always real. (For transversely isotropic materials these values correspond to beryl.)

The values of $\sqrt{\rho} c$ are given with corresponding values of $a \xi$ in the following table, and plotted in Figures 1 and 2.

Symmetrical case		Anti-symmetrical case	
$a \xi$	$\sqrt{\rho} c$	$a \xi$	$\sqrt{\rho} c$
∞	0.7724	0	0
5.369	0.8081	0.636	0.5477
2.616	1.0000	1.394	0.6325
1.855	1.2247	2.407	0.7071
1.463	1.4142	6.457	0.7681
1.246	1.5000	∞	0.7724
0.990	1.5492	13.263	0.8367
0.361	1.5811	5.806	1.0000
0	1.584	3.802	1.2247
3.260	1.5906	2.926	1.4142
2.951	1.6125	2.254	1.5811
1.515	1.7321	1.647	1.7321
1.289	1.8708	1.277	1.8708
1.174	2.0000	1.064	2.0000
1.005	3.1623	0.473	3.1623
0.644	5.4772	0.307	5.4772

A comparison with the corresponding curves in the isotropic case obtained by previous investigators shows that the curves are similar in the two cases (see reference [4]). Thus, the propagation of elastic waves in isotropic and cylindrically anisotropic plates are similar in character.

The author is grateful to Prof. B. B. SEN for his kind help and guidance.

REFERENCES

- [1] Lord RAYLEIGH, Proc. Lond. Math. Soc. 20, 225 (1889),
- [2] H. LAMB, Proc. Roy. Soc., London [A] 93, 114–128 (1917).
- [3] Y. SATO, Bull. Earth. Res. Inst., Tokyo 29, 223–261 (1951).
- [4] W. M. EWING, W. S. JARDETZKY, and F. PRESS, *Elastic Waves in Layered Media* (McGraw Hill Book Co., 1957), pp. 284, 286.

Zusammenfassung

Die Abhängigkeit der Wellengeschwindigkeit von der Wellenlänge elastischer Wellen, die sich in einer unendlichen Platte mit zylindrischer Aelotropie ausbreiten, ist auf numerischem Weg aus der vorgängig hergeleiteten «Frequenzgleichung» ermittelt worden. Die Ergebnisse sind denen des isotropen Falles ähnlich.

(Received: May 22, 1959.)

Constant Shear Flow Past Two Circular Cylinders

By LAKSHMI N. NIGAM, Kharagpur, India¹⁾

1. Introduction

The problem of two-dimensional flow with constant shear past cylinders having various cross sections has received considerable attention in recent times. The main interest in the problem lies in studying the location of the stagnation points and their shift when a non-dimensional parameter $N = U/\omega c$, where U and c are a typical velocity and length and ω is the vorticity, is varied from 0 to ∞ . The problem taken up in this paper has been studied by RAY²⁾ who used the method of images to obtain an approximate solution. His solution does not appear to be suitable, however, for studying the location of the stagnation points. In this paper the same problem has been studied using orthogonal curvilinear di-polar co-ordinates and the location of the stagnation points for different values of N has been found. The forces on the cylinders are calculated.

2. Equations of Motion

In the absence of external forces, the equations of two-dimensional steady motion of an inviscid incompressible fluid are

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (2.1)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y}. \quad (2.2)$$

The equation of continuity is

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2.3)$$

where u, v are the velocity components, p is the pressure and ρ the density. In terms of the stream function ψ the equations (2.1) – (2.3) reduce to

$$\frac{\partial(\psi, \nabla^2 \psi)}{\partial(x, y)} = 0, \quad (2.4)$$

where $u = -\partial\psi/\partial y$, $v = \partial\psi/\partial x$ and $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$. The general solution of (2.4) is

$$\nabla^2 \psi = f(\psi). \quad (2.5)$$

In the case when vorticity is constant everywhere (2.5) reduces to

$$\nabla^2 \psi = -\omega. \quad (2.6)$$

¹⁾ Indian Institute of Technology.

²⁾ M. RAY, Bull. Cal. math. Soc. 29, 125 (1937).

The undisturbed flow is given by

$$\psi_0 = U y - \frac{1}{2} \omega y^2. \quad (2.7)$$

Putting $\psi = \psi_0 + \psi_1$, the equation for ψ_1 is $\nabla^2 \psi_1 = 0$. The equations (2.1) and (2.2) can be integrated to find p as

$$-\frac{p}{\rho} = \frac{1}{2} (u^2 - v^2) - \omega \psi + k, \quad (2.8)$$

where k is a constant.

3. Two Cylinders with Line of Centres Perpendicular to Undisturbed Stream

Two cylinders are placed in the stream (2.7) as shown in Figure 1. The cylinders are defined by

$$\eta = \alpha, \quad \eta = -\beta, \quad (3.1)$$

where $z = c \tan \xi/2$, $z = x + i y$, $\xi = \xi + i \eta$. The solution of (2.6) which satisfies the boundary conditions

$$h \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \Big|_{\eta=\alpha} = 0, \quad (3.2)$$

$$h \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \Big|_{\eta=-\beta} = 0, \quad (3.3)$$

where

$$h = \frac{\cos \xi + \cosh \eta}{c}$$

is

$$\psi = U y - \frac{1}{2} \omega y^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \cos n \xi (A_n \cosh n \eta + B_n \sinh n \eta). \quad (3.4)$$

Making use of the boundary conditions (3.2) and (3.3), (3.4) gives

$$\frac{U c \sinh \alpha \sin \xi}{(\cos \xi + \cosh \alpha)^2} - \frac{\omega c^2 \sinh^2 \alpha \sin \xi}{(\cos \xi + \cosh \alpha)^3} = \sum_1^{\infty} n \sin n \xi (A_n \cosh n \alpha + B_n \sinh n \alpha), \quad (3.5)$$

and

$$\frac{U c \sinh \beta \sin \xi}{(\cos \xi + \cosh \beta)^2} + \frac{\omega c^2 \sinh^2 \beta \sin \xi}{(\cos \xi + \cosh \beta)^3} = \sum_1^{\infty} n \sin n \xi (A_n \cosh n \beta + B_n \sinh n \beta). \quad (3.6)$$

The constants A_n and B_n may be evaluated by multiplying (3.5) and (3.6) by $\sin n \xi$ and integrating both sides with respect to ξ between $-\pi < \xi < \pi$.

Making use of the integrals (for proof see appendix)

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos n \xi d\xi}{(\cos \xi + \cosh \alpha)^2} = \frac{(-1)^n \pi e^{-n\alpha}}{\sinh^3 \alpha} (n \sinh \alpha + \cosh \alpha)$$

and

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos n \xi d\xi}{(\cos \xi + \cosh \alpha)^3} = \frac{(-1)^n \pi e^{-n\alpha}}{2 \sinh^5 \alpha} [(n^2 - 1) \sinh^2 \alpha + 3 \cosh^2 \alpha + 3 n \sinh \alpha \cosh \alpha]$$

in integration, the equations for A_n and B_n are

$$\left. \begin{aligned} 2n(-1)^{n+1} U c e^{-n\alpha} - \frac{\omega c^2 e^{-n\alpha} n (-1)^n}{\sinh \alpha} (n \sinh \alpha + \cosh \alpha) \\ = n(A_n \cosh n\alpha + B_n \sinh n\alpha) \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

and

$$\left. \begin{aligned} 2n(-1)^{n+1} U c e^{-n\beta} - \frac{\omega c^2 e^{-n\beta} n (-1)^n}{\sinh \beta} (n \sinh \beta + \cosh \beta) \\ = -n(A_n \cosh n\beta - B_n \sinh n\beta). \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

Substituting for A_n and B_n from (3.7) and (3.8) in (3.4), ψ becomes

$$\left. \begin{aligned} \psi = \frac{U c \sinh \eta}{\cos \xi + \cosh \eta} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\omega c^2 \sinh^2 \eta}{(\cos \xi + \cosh \eta)^2} \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \cos n \xi \left[\frac{2(-1)^{n+1} U c}{\sinh n(\alpha + \beta)} (e^{n(\eta - \alpha)} \cosh n\beta - e^{-n(\eta + \beta)} \cosh n\alpha) \right. \\ \left. + \frac{(-1)^n \omega c^2}{\sinh n(\alpha + \beta)} \{n e^{n(\eta - \alpha)} \sinh n\beta + n e^{-n(\eta + \beta)} \sinh n\alpha \right. \\ \left. + e^{-n\alpha} \coth \alpha \sinh n(\eta + \beta) - e^{-n\beta} \coth \beta \sinh n(\eta - \alpha) \} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

It can be shown that the velocity components due to disturbance vanish at infinity ($\eta = 0$, $\xi = \pi$). The forces per unit length of the cylinders are given by

$$X = - \oint p \cos \theta ds, \quad Y = \oint p \sin \theta ds, \quad (3.10)$$

where θ is the angle with the normal makes with the x -axis and ds is an element of the contour of the cylinder. On the surface of the cylinders,

$$(u^2 + v^2) = \left(h \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right)_{\substack{\eta = \alpha \\ \eta = -\beta}}^2. \quad (3.11)$$

Substituting for p , from (2.8) and (3.11), in (3.10) and integrating, the forces on $\eta = \alpha$ are obtained to be

$$X = 0, \quad Y = - \frac{\pi \varrho c}{2} \left(2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \right) - \frac{\pi \varrho c}{2} \cosh \alpha \left(2a_0 a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1} \right), \quad (3.12)$$

where

$$a_0 = \frac{\omega c}{2 \sinh^2 \alpha},$$

$$\begin{aligned} a_n = \frac{(-1)^n \omega c}{\sinh n(\alpha + \beta)} \left[2n^2 \sinh n\beta + n e^{n\beta} \coth \alpha - n e^{-n\beta} \coth \beta \right. \\ \left. + \frac{e^{-n\alpha} \sinh n(\alpha + \beta)}{\sinh^2 \alpha} - \frac{4n U \cosh n\beta}{\omega c} \right]. \end{aligned}$$

The forces on $\eta = -\beta$ are

$$X = 0, \quad Y = \frac{\pi \varrho c}{2} \left(2b_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \right) + \frac{\pi \varrho c}{2} \cosh \beta \left(2b_0 b_1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n b_{n+1} \right), \quad (3.13)$$

where

$$b_0 = \frac{\omega c}{2 \sinh^2 \beta} ,$$
$$b_n = \frac{(-1)^n \omega c}{\sinh n (\alpha + \beta)} \left[2 n^2 \sinh n \alpha + n e^{n \alpha} \coth \beta - n e^{-n \alpha} \coth \alpha \right. \\ \left. - \frac{e^{-n \beta} \sinh n (\alpha + \beta)}{\sinh^2 \beta} + \frac{4 n U \cosh n \alpha}{\omega c} \right] .$$

Stagnation points on the cylinder $\eta = \alpha$.

The normal velocity is zero on the cylinder. The stagnation points can be obtained by equating to zero the tangential component of velocity on the cylinder, i.e.

$$h \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \Big|_{\eta = \alpha} = 0 .$$

This gives

$$F(\xi) = \left. \begin{aligned} & \frac{N (1 + \cos \xi \cosh \alpha)}{(\cos \xi + \cosh \alpha)^2} - \frac{\sinh \alpha (1 + \cos \xi \cosh \alpha)}{(\cos \xi + \cosh \alpha)^3} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n N + D_n) \cos n \xi = 0 , \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

where $N = U/\omega c$ is a non-dimensional parameter, and

$$C_n = \frac{2 n (-1)^{n+1}}{\sinh n (\alpha + \beta)} \{ \cosh n \beta + e^{-n(\alpha + \beta)} \cosh n \alpha \} ,$$
$$D_n = \frac{n (-1)^n}{\sinh n (\alpha + \beta)} \{ n \sinh n \beta - n e^{-n(\alpha + \beta)} \sinh n \alpha + e^{-n \alpha} \coth \alpha \cosh n (\alpha + \beta) \\ - e^{-n \beta} \coth \beta \} .$$

The zeros of $F(\xi)$ for different values of N can be found graphically. The calculation for $\alpha = \log 2$, $\beta = \log 3$ is shown in Table 1.

Table 1

	ξ	0°	20°	40°	60°	80°	100°	120°	140°	160°	180°
Value of $F(\xi)$	$N = 0$	-0.18	-0.47	-0.56	-0.73	-0.93	-1.55	-2.24	2.08	6.58	21.11
	$N = 1$	0.97	0.68	0.61	0.48	0.23	-0.22	-1.04	-1.94	2.50	12.81
	$N = 5$	5.58	5.30	5.32	5.34	5.33	5.09	3.77	-1.38	-13.16	-20.45
	$N = \infty$	1.15	1.16	1.17	1.22	1.27	1.33	1.20	0.14	-3.91	-8.32

Positions of the stagnation points on $\eta = \alpha$ are given by

- (1) $\xi = \pm 149^\circ$ for $N = 0$,
- (2) $\xi = \pm 91^\circ, \pm 153^\circ$ for $N = 1$,
- (3) $\xi = \pm 137^\circ$ for $N = 5$,
- (4) $\xi = \pm 143^\circ$ for $N = \infty$.

In Figure 1 four stagnation points S_1, S_2, S_3 and S_4

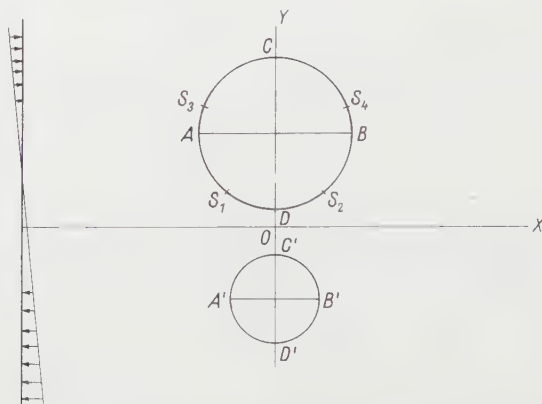


Figure 1

Shear flow perpendicular to line of centres.

are shown for $N = 1$. As N tends to ∞ , S_1, S_2 shift towards A, B , ends of the diameter AB , respectively. S_3, S_4 move away from the diameter AB until they coincide with C on the y -axis for certain positive value of $N > 1$, whence the combined point moves on the y -axis to infinity.

4. Two Cylinders with Line of Centres Parallel to Undisturbed Stream

Two cylinders (Figure 2) defined by (3.1) are placed in the stream

$$\psi_0 = Vx - \frac{1}{2} \omega x^2. \quad (4.1)$$

The stream function for this case can be determined as explained in part 3. It is found to be

$$\begin{aligned} \psi = & \frac{Vc \sin \xi}{(\cos \xi + \cosh \eta)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\omega c^2 \sin^2 \xi}{(\cos \xi + \cosh \eta)^2} \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n Vc \sin n \xi}{\sinh n(\alpha + \beta)} [e^{n(\eta - \alpha)} \sinh n \beta + e^{-n(\eta + \beta)} \sinh n \alpha] \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \omega c^2 \cos n \xi}{\sinh n(\alpha + \beta)} [e^{n(\eta - \alpha)} \sinh n \beta + n e^{-n(\eta + \beta)} \sinh n \alpha \\ & + e^{-n\beta} \coth \beta \sinh n(\eta - \alpha) - e^{-n\alpha} \coth \alpha \sinh n(\eta + \beta)]. \end{aligned} \quad (4.2)$$

The forces on the cylinder $\eta = \alpha$ are

$$X = \frac{\pi \rho c}{2} \sinh \alpha \left[2a_0 b_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n b_{n+1} - b_n a_{n+1}) \right], \quad (4.3)$$

$$Y = -\frac{\pi \varrho c}{2} \left[2 a_0^2 + \sum_1^{\infty} a_n^2 \right] - \frac{\pi \varrho c}{2} \cosh \alpha \left[2 a_0 a_1 + \sum_1^{\infty} a_n a_{n+1} + b_n b_{n+1} \right], \quad (4.4)$$

where

$$a_0 = \frac{\omega c}{2 \sinh^2 \alpha},$$

$$a_n = \frac{\omega c (-1)^{n+1}}{\sinh n (\alpha + \beta)} \left[2 n^2 \sinh n \beta - n e^{n\beta} \coth \alpha - \frac{e^{-n\alpha} \sinh n (\alpha + \beta)}{\sinh^2 \alpha} + n e^{-n\beta} \coth \beta \right],$$

$$b_n = \frac{4 n (-1)^n V \sinh n \beta}{\sinh n (\alpha + \beta)}.$$

The forces on $\eta = -\beta$ are

$$X = -\frac{\pi \varrho c}{2} \sinh \beta \left[2 a'_0 b'_1 + \sum_1^{\infty} (a'_n b'_{n+1} - b'_n a'_{n+1}) \right], \quad (4.5)$$

$$Y = \frac{\pi \varrho c'}{2} \left[2 a'^2_0 + \sum_1^{\infty} a'^2_n \right] + \frac{\pi \varrho c'}{2} \cosh \beta \left[2 a'_0 a'_1 + \sum_1^{\infty} (a'_n a'_{n+1} - b'_n b'_{n+1}) \right], \quad (4.6)$$

where

$$a'_0 = \frac{-\omega c}{2 \sinh^2 \beta},$$

$$a'_n = \frac{\omega c (-1)^n}{\sinh n (\alpha + \beta)} \times \left[2 n^2 \sinh n \alpha - e^{n\alpha} n \coth \beta + n e^{-n\alpha} \coth \alpha - \frac{e^{-n\beta} \sinh n (\alpha + \beta)}{\sinh^2 \beta} \right],$$

$$b'_n = \frac{4 n (-1)^{n+1} V \sinh n \alpha}{\sinh n (\alpha + \beta)}.$$

The stagnation points on the cylinder $\eta = -\beta$ may be found by equating to zero the tangential velocity on the surface of the cylinder. This gives

$$F(\xi) = \frac{N \sin \xi \sinh \beta}{(\cos \xi + \cosh \beta)^2} - \frac{\sin^2 \xi \sinh \beta}{(\cos \xi + \cosh \beta)^3} + \sum_1^{\infty} (N A'_n \sin n \xi + B'_n \cos n \xi) = 0, \quad (4.7)$$

where

$$N = \frac{V}{\omega c}, \quad A'_n = \frac{2 n (-1)^n}{\sinh n (\alpha + \beta)} (e^{-n(\alpha+\beta)} \sinh n \beta - \sinh n \alpha),$$

$$B_n = \frac{(-1)^{n+1} n}{\sinh n (\alpha + \beta)}$$

$$\times [n e^{-n(\alpha+\beta)} \sinh n \beta - n \sinh n \alpha + e^{-n\beta} \coth \beta \cosh n (\alpha + \beta) - e^{-n\alpha} \coth \alpha].$$

The zeros of $F(\xi)$ for some values of N have been obtained graphically and the values of $F(\xi)$ for $\alpha = \log 2, \beta = \log 3$ are shown in Table 2.

Table 2

Value of $F(\xi)$						Value of $F(\xi)$					
ξ	$N = 0$	$N = 1/2$	$N = 1$	$N = 5$	$N = \infty$	ξ	$N = 0$	$N = 1/2$	$N = 1$	$N = 5$	$N = \infty$
0°	0.026	0.026	0.026	0.026	0.000	0°	0.026	0.026	0.026	0.026	0.000
20°	0.018	0.048	0.078	0.318	0.060	20°	0.018	0.011	0.041	0.281	0.060
40°	0.009	0.061	0.132	0.700	0.142	40°	0.009	0.081	0.152	0.719	0.142
60°	0.078	0.059	0.197	1.296	0.274	60°	0.078	0.215	0.353	1.452	0.275
80°	0.224	0.025	0.275	2.273	0.499	80°	0.224	0.474	0.742	2.723	0.499
100°	0.497	0.064	0.368	3.831	0.865	100°	0.497	0.929	1.363	4.826	0.866
120°	0.873	0.181	0.512	6.055	1.385	120°	0.874	1.566	2.259	7.803	1.386
140°	1.006	0.077	0.851	8.278	1.856	140°	1.006	1.935	2.863	10.290	1.856
160°	0.202	0.587	1.376	7.693	1.579	160°	0.202	0.992	1.781	8.097	1.579
180°	0.657	0.657	0.657	0.657	0.000	180°	0.657	0.657	0.657	0.657	0.000

The stagnation points on the cylinder $\eta = -\beta$ are given by

- (1) $\xi = \pm 36^\circ, \pm 163^\circ$ for $N = 0$,
- (2) $\xi = 88^\circ, 144^\circ, -15^\circ, -171^\circ$ for $N = 1/2$,
- (3) $\xi = -9^\circ, -175^\circ$ for $N = 1$,
- (4) $\xi = -2^\circ, -178^\circ$ for $N = 5$,
- (5) $\xi = 0^\circ, -180^\circ$ for $N = \infty$.

For $N = 0$ the stagnation points S_1, S_2, S_3 and S_4 are shown in Figure 2. As $N \rightarrow \infty$, points S_1, S_2 tend to C', D' respectively. The points S_3, S_4 move away from the y -axis until they coincide with B' for certain positive value of N . For greater values of N the combined point moves along the line $A'B'$ produced to ∞ .

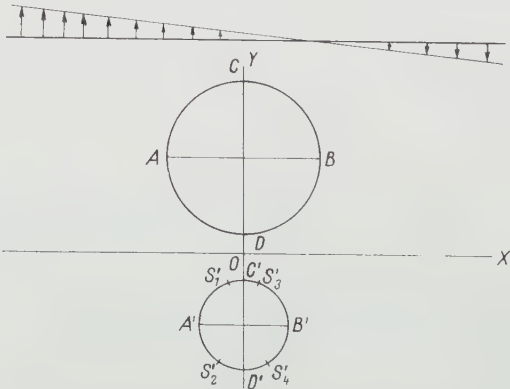


Figure 2

Shear flow parallel to line of centres.

In conclusion I should like to thank Dr. S. D. NIGAM for his help in the preparation of this paper.

APPENDIX

$$I_n = \int_0^\pi \frac{\cos n \theta}{\cos \theta + \cosh \varphi} d\theta.$$

The recurrence formula is

$$I_{n+1} + 2 \cosh \varphi I_n + I_{n-1} = 0. \quad (1)$$

I_0 and I_1 can be evaluated easily and their values are

$$I_0 = \int_0^\pi \frac{d\theta}{\cos \theta + \cosh \varphi} = \frac{\pi}{\sinh \varphi}, \quad I_1 = \int_0^\pi \frac{\cos \theta d\theta}{(\cos \theta + \cosh \varphi)} = \pi (1 - \coth \varphi).$$

In (1) put $I_n = x^n$, so

$$x^2 + 2 \cosh \varphi x + 1 = 0,$$

which gives

$$x = -\cosh \varphi \pm \sinh \varphi.$$

Most general solution of I_n is

$$I_n = (-1)^n [A \cosh n \varphi + B \sinh n \varphi], \quad (2)$$

with initial conditions

$$I_0 = \frac{\pi}{\sinh \varphi}, \quad (3)$$

$$I_1 = \pi (1 - \coth \varphi). \quad (4)$$

Constants A and B are evaluated from (2), (3) and (4). Substitution gives

$$I_n = (-1)^n \frac{\pi e^{-n\varphi}}{\sinh \varphi}.$$

Differentiating it with respect to φ , one gets

$$\int_0^\pi \frac{\cos n \theta d\theta}{(\cos \theta + \cosh \varphi)^2} = \frac{(-1)^n \pi e^{-n\varphi}}{\sinh^3 \varphi} (n \sinh \varphi + \cosh \varphi).$$

Again differentiation with respect to φ gives

$$\int_0^\pi \frac{\cos n \theta d\theta}{(\cos \theta + \cosh \varphi)^3} = \frac{(-1)^n \pi e^{-n\varphi}}{2 \sinh^3 \varphi} \times [(n^2 - 1) \sinh^2 \varphi + 3 \cosh^2 \varphi + 3 n \sinh \varphi \cosh \varphi].$$

Zusammenfassung

Es wird die Scherströmung um zwei Kreiszylinder behandelt unter Verwendung orthogonaler krummliniger Bipolar-Koordinaten, wobei die Hauptströmung sowohl normal als auch parallel zu den Zylinderachsen verläuft. Die Kräfte auf die Zylinder werden berechnet, ebenso die Lage der Staupunkte in Abhängigkeit von $N = U/\omega c$.

(Received: January 12, 1959.)

Supersonic Viscous Flow Past a Convex Corner

By AJIT KUMAR ROY, Bangalore, India¹⁾

Introduction

In the case of supersonic viscous flow past a convex corner the local behaviour of the emitted wave near the corner is a pure rarefaction, in which the pressure falls monotonically (and for which, aft of the corner, the flow cannot separate from the boundary). This is borne out by all Schlieren photographs of PRANDTL-MEYER'S [1]²⁾ expansion near the convex corners. Since the corner point lies embedded in the boundary layer, a simple mathematical model has been introduced on the assumption that the effect of viscosity within the boundary layer is as if to round off the corner. Figure 1a gives the picture of the usual Prandtl-Meyer expansion at a convex corner in two-dimensional, steady, non-viscous, supersonic flow. Figure 1b gives the corresponding picture in the viscous case. Figure 1c is the mathematical model posed for the present problem and obtained by rounding the corner by means of the Prandtl-Meyer stream line which approximates to an arc of a circle in the case of a weak expansion (i. e. for very small values of the angle φ). Under these circumstances, the flow is a boundary-layer flow along a curved boundary

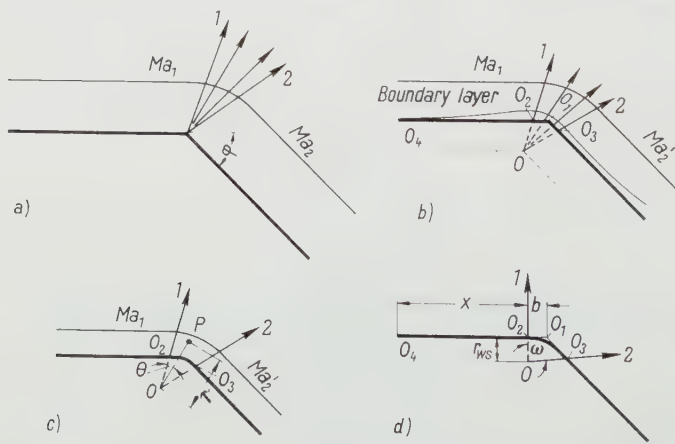


Figure 1

¹⁾ Department of Aeronautical Engineering, Indian Institute of Science.

²⁾ Numbers in brackets refer to References, page 602.

with favourable pressure gradient (and therefore without separation). The usual Polhausen method with different assumed velocity distributions is employed to determine the flow.

Notations

c^*	critical velocity of sound;
C	constant in the temperature viscosity relation
	$= \sqrt{\frac{T_w}{T_\infty} \cdot \frac{T_\infty + S}{T_w + S}}$ (assumed 1.5 for the numerical evaluation in the present case under zero heat-transfer condition);
c_p	specific heat at constant pressure;
i	enthalpy;
k	thermal conductivity;
Ma	Mach number;
p	static pressure;
Pr	PRANDTL'S number;
μ	absolute viscosity;
ρ	density;
ν	μ/ρ ;
(r, θ)	polar coordinates of a field point;
R	gas constant;
Re	free stream Reynolds number ($l v_{s0}/c^*$);
S	SOUTHERLAND'S constant;
T	absolute temperature;
(u, v)	velocity components in the radial and cross radial directions respectively;
ω	angle contained between the terminating Mach lines;
α	angle contained between the directions of the two walls;
τ	shearing stress;
γ	ratio of the specific heats of the air (i. e., c_p/c_v);
λ	second viscosity coefficient (given by MAXWELL'S relation $3\lambda + 2\mu = 0$);
l	length $O_4 O_1$ (Figure 1d);
b	length $O_2 O_1$ (Figure 1d);
x	length $O_4 O_2$ (Figure 1d) $= (l - b)$.

Subscripts

∞	free stream conditions (undisturbed);
0	local free stream conditions (i. e., at the outer edge of the boundary layer);
w	conditions on the boundary wall;
s	standard conditions of the flow parameters attainable on the first Mach line (sonic conditions for $Ma_1 = 1$);
1	conditions upstream of the flow deflection;
2	conditions downstream of the flow deflection.

Analytic Development

The usual stress and strain relations [2] in polar coordinates (Figure 1c) are given in the following:

Strain components:

$$e_{rr} = 2 \frac{\partial u}{\partial r}; \quad e_{\theta\theta} = 2 \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} + 2 \frac{u}{r}; \quad e_{r\theta} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}. \quad (1)$$

Divergence:

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta}. \quad (2)$$

Stress components:

$$p_{rr} = -p + \lambda \Delta + \mu e_{rr} = -p + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial r}, \quad (3)$$

$$p_{\theta\theta} = -p + \lambda \Delta + \mu e_{\theta\theta} = -p + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \mu \left(\frac{2}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} + 2 \frac{u}{r} \right), \quad (4)$$

$$p_{r\theta} = \mu e_{r\theta} = \mu \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right). \quad (5)$$

Radial component of motion:

$$\begin{aligned} \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} \right) &= \frac{\partial p_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial p_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (p_{rr} - p_{\theta\theta}) \\ &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \lambda \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} - \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{u}{r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \\ &\quad + \frac{\partial \lambda}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial r} \\ &\quad + \frac{\mu}{r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{dv}{d\theta} \right) \\ &\quad + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{v}{r} \right) \\ &\quad + \frac{1}{r} 2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{u}{r} \right). \end{aligned}$$

Cross radial component of motion:

$$\begin{aligned} \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{uv}{r} \right) &= \frac{\partial p_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial p_{\theta\theta}}{\partial \theta} - \frac{2}{r} p_{r\theta} \\ &= \mu \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r^2} \right) \\ &\quad + \frac{\partial \mu}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{v}{r} \right) - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial \theta} \\ &\quad + \frac{\lambda}{r} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right) \\ &\quad + \frac{\mu}{r} \left(\frac{2}{r} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \\ &\quad + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial \theta} \left(\frac{2}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \cdot u \right) \\ &\quad - 2 \frac{\mu}{r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right). \end{aligned}$$

Continuity equation:

$$\frac{\partial}{\partial r} (r \varrho u) + \frac{\partial}{\partial \theta} (v \varrho) = 0, \quad (8)$$

Energy equation:

$$\begin{aligned} \varrho \left(u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \cdot \frac{\partial i}{\partial \theta} \right) - \left(u \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{v}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) \\ = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\mu r}{Pr} \cdot \frac{\partial i}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\mu}{Pr} c_p \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \Phi, \end{aligned}$$

which reduces to

$$\left. \begin{aligned} c_p \varrho \left(u \frac{dT}{dr} + \frac{v}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) - \left(u \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{v}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) \\ = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\mu}{Pr} c_p r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\mu}{Pr} c_p \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \Phi \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

by putting

$$i = c_p T,$$

where Φ stands for the dissipation function given by

$$\begin{aligned} 4\Phi &= \lambda (e_{rr} + e_{\theta\theta})^2 + 2(e_{rr}^2 + e_{\theta\theta}^2 + 2e_{r\theta}^2)\mu \\ &= (\lambda + 2\mu)(e_{rr}^2 + e_{\theta\theta}^2) + 2(\lambda e_{rr}e_{\theta\theta} + \mu e_{r\theta}^2). \end{aligned}$$

With the usual boundary layer approximations [3], we assume the following magnitude of the flow parameters within the boundary layer:

- (a) v is of the order (1);
- (b) δ thickness of the boundary layer is very small compared with r . Because of (a) and (b) it follows from the equations (8) and (7) that u is of the order of δ and μ (as well as λ) is of the order of $\varrho \delta^2$; consequently ν is of the order of δ^2 or δ of the order of $\nu^{1/2}$. Then equation (8) reduces to

$$\frac{\partial}{\partial r} (\varrho u) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (\varrho v) = 0. \quad (10)$$

Equation (6) reduces to

$$\varrho \frac{v^2}{r} = \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (11)$$

i. e., the variation of pressure p within the boundary layer is of the order of $\varrho \delta$ and can therefore be neglected. Hence p inside the boundary layer will be given by the pressure outside the boundary layer, namely by the pressure in the Prandtl-Meyer expansion in the non-viscous case $p_0 = p_0(\theta)$. Equation (7) reduces to

$$\varrho \left(u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) = -\frac{1}{r} \cdot \frac{dp_0}{d\theta} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial r} \right). \quad (12)$$

Dissipation function Φ becomes $\mu(\partial v/\partial r)^2$ and equation (9) reduces to

$$\varrho \left(u \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) c_p - \frac{v}{r} \cdot \frac{dp_0}{d\theta} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(k r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \mu \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2. \quad (13)$$

The viscosity-temperature relation [4] is written as

$$\frac{\mu}{\mu_{\infty}} = C \frac{T}{T_{\infty}}, \quad (14)$$

where

$$C = \sqrt{\frac{T_w}{T_{\infty}}} \cdot \frac{T_{\infty} + S}{T_w + S}. \quad (15)$$

The equation of the state of the gas is

$$p = R \varrho T. \quad (16)$$

Thus we have equations (10), (12), (13), (14) and (16) for the determination of the five unknown quantities namely, u , v , T , ϱ and μ . The pressure p is given by its value in the non-viscous case.

Representation of the Temperature Profile

We suppose that $T = T(v)$ is a solution [5] of equation (13). Then equation (13) transforms into

$$\varrho c_p T_v \left(u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) = \frac{v}{r} \cdot \frac{dp_0}{d\theta} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\mu c_p}{Pr} T_v \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \mu \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2$$

by neglecting the variation of r within the boundary layer and observing that

$$Pr = \frac{\mu c_p}{k}, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = T_v \frac{\partial v}{\partial r}; \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = T_v \frac{\partial v}{\partial \theta}.$$

Utilizing equation (12), the above equation further reduces to

$$\begin{aligned} -\frac{1}{r} \cdot \frac{dp_0}{d\theta} (c_p T_v + v) + T_v c_p (Pr - 1) \frac{1}{Pr} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial r} \right) \\ = \frac{\mu}{Pr} (c_p T_v + 1) \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2. \end{aligned}$$

Assuming $Pr = 1$, we find that $c_p T_v + v = 0$ satisfies the equation, i. e.,

$$T = T_0 + \frac{1}{2 c_p} (v_0^2 - v^2)$$

gives the variation of temperature within the boundary layer.

Boundary Layer Momentum Integral

Integrating equation (12) between the limits $r = r_w$ to $r = r_w + \delta$, we have

$$\int_{r_w}^{r_w + \delta} \varrho \left(u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) dr = \frac{dp_0}{d\theta} \int_{r_w}^{r_w + \delta} \frac{1}{r} dr + \int_{r_w}^{r_w + \delta} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial r} \right) dr.$$

The first term of the integral from the L. H. S. is

$$\int_{r_w}^{r_w+\delta} \varrho u \frac{\partial v}{\partial r} = \varrho_0 u_0 v_0 + \int_{r_w}^{r_w+\delta} v \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (\varrho v) dr,$$

and the second term of the integral from the R. H. S. becomes

$$\int_{r_w}^{r_w+\delta} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial r} \right) dr = -\mu_w \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)_w$$

by utilizing the boundary conditions $u = v = 0$ when $r = r_w$ and $u = u_0$

$$v = v_0, \quad \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right) = 0 \quad \text{when} \quad r = r_w + \delta \quad \text{and equation (10).}$$

Neglecting the variation of r within the boundary layer, the momentum integral reduces to

$$\varrho_0 v_0 u_0 + \frac{1}{r_w} \int_{r_w}^{r_w+\delta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\varrho v^2) dr = -\frac{1}{r_w} \cdot \frac{dp_0}{d\theta} \int_{r_w}^{r_w+\delta} dr - \mu_w \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)_w.$$

We define

$$\delta^{**} = \text{momentum thickness} = \int_{r_w}^{r_w+\delta} \frac{\varrho v}{\varrho_0 v_0} \left(1 - \frac{v}{v_0} \right) dr,$$

$$\delta^* = \text{displacement thickness} = \int_{r_w}^{r_w+\delta} \left(1 - \frac{\varrho v}{\varrho_0 v_0} \right) dr.$$

Further from the non-viscous motion outside the boundary layer, we have

$$\varrho_0 v_0 \left(\frac{dv_0}{d\theta} + u_0 \right) = -\frac{dp_0}{d\theta}.$$

Substituting the value of $dp_0/d\theta$, the momentum integral finally is transformed into

$$\frac{d\delta^{**}}{d\theta^2} + \frac{1}{v_0} \cdot \frac{dv_0}{d\theta} (2\delta^{**} + \delta^*) + \frac{\delta^{**}}{\varrho_0} \cdot \frac{d\varrho_0}{d\theta} + \frac{u_0}{v_0} \delta = \frac{\mu_w}{\varrho_0 v_0^2} \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2. \quad (18)$$

We apply the Polhausen method to solve the above equation. We introduce the variable η defined [6] by

$$\eta = \frac{1}{\delta} \int_{r_w}^r \frac{\varrho}{\varrho_0} dr$$

such that $\eta = 1$ when $r = r_w + \delta$, and $\eta = 0$ when $r = r_w$. We assume $v/v_0 = \Phi(\eta)$ where Φ is a polynomial in η , with the boundary conditions $v = u = 0$ for $\eta = 0$, and $v = v_0$, $\Phi = 1$, $\Phi' = 0$, for $\eta = 1$.

Assuming at first a parabolic distribution of velocity, i. e., $\Phi(\eta) = 2\eta - \eta^2$,

$$\delta^* = \delta - \delta \int_0^1 \Phi(\eta) d\eta = \frac{\delta}{3}$$

and

$$\delta^{**} = \delta \int_0^1 \Phi(\eta) [1 - \Phi(\eta)] d\eta = \frac{2}{15} \delta.$$

But

$$\left(\frac{\partial v}{\partial r} \right) = v_0 (2 - 2\eta) \frac{1}{\delta} \cdot \frac{\varrho}{\varrho_0};$$

and hence

$$\left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)_w = 2 \frac{v_0}{\delta} \cdot \frac{\varrho_w}{\varrho_0}.$$

Therefore, equation (18) becomes

$$\frac{d\delta^2}{d\theta^2} + \delta^2 \left(\frac{9}{v_0} \cdot \frac{dv_0}{d\theta} + \frac{2}{\varrho_0} \cdot \frac{d\varrho_0}{d\theta} + 15 \frac{u_0}{v_0} \right) = \frac{30 r_w \varrho_w \mu_w}{\varrho_0^2 v_0}. \quad (19)$$

From the solution of the non-viscous [7] case, we find

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= q_{max} \sin \lambda \theta, & v_0 &= \lambda q_{max} \cos \lambda \theta, & \varrho_0 &= \varrho_{s0} \cos^2 \lambda \theta, \\ p_0 &= p_{s0} \cos^{2\beta+2} \lambda \theta, & T_0 &= T_{s0} \cos^2 \lambda \theta, & r_0 &= r_{s0} \sec^{2\beta+1} \lambda \theta, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

where

$$\frac{1}{\lambda^2} = (2\beta + 1) = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} = 6 \text{ for } \gamma (\text{air}) = 1.4;$$

and

$$q_{max}^2 = u_0^2 + \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} v_0^2 = u_0^2 + 6 v_0^2.$$

Equation (19) with the help of the relations in (20) simplifies to

$$\frac{d\delta^2}{d\theta^2} + \delta^2 \left[- (9 + 4\beta) \lambda \tan \lambda \theta + \frac{15}{\lambda} \tan \lambda \theta \right] = \frac{30 r_w \mu_w \varrho_w}{\varrho_0^2 v_0},$$

which is a linear differential equation whose solution is given by

$$\delta^2 = \left[\delta_0^2 + \int 30 \frac{r_w \mu_w \varrho_w}{\varrho_0^2 v_0} \cos^{(9+4\beta-15/\lambda^2)} \lambda \theta d\theta \right] \cos^{-(9+4\beta-15/\lambda^2)} \lambda \theta, \quad (21)$$

δ_0^2 being the integration constant.

In the present case of flow with pressure gradient [8], $\varrho_w \mu_w$ is not constant but is given by

$$\mu_w \varrho_w = C \left(\frac{\mu_\infty p_{s0}}{R T_\infty} \right) \cos^{2\beta+2} \lambda \theta$$

[from equations (14) and (16)], where C is a constant in the case of constant surface temperature. Replacing r_w by $r_{ws} \sec^{2\beta+1} \lambda \theta$ (equation of the free stream line), solution of δ^2 becomes

$$\delta^2 = \left[\delta_0^2 + 30 \frac{r_{ws} C \mu_\infty p_{s0}}{R T_\infty \varrho_{s0}^2 \lambda^2 q_{max}} \int \cos^{-6\beta} \lambda \theta d(\lambda \theta) \right] \cos^{7\lambda \theta}$$

[after substituting the numerical values of λ and β in equation (21)], or,

$$\delta^2 = \left[\delta_0^2 + 30 \frac{\nu_{ws} C \mu_\infty \dot{p}_{s0}}{R T_\infty \varrho_{s0}^2 \lambda^2 q_{max}} f(\theta) \right] \cos^{71} \lambda \theta \tag{22}$$

(after integration), where

$$f(\theta) = \frac{\sin \lambda \theta}{68 \cos^{68} \lambda \theta} \left[1 + \frac{67}{66} \cos^2 \lambda \theta + \frac{67 \cdot 65}{66 \cdot 64} \cos^4 \lambda \theta + \dots + \frac{67 \cdot 65 \cdot 63 \dots 3}{66 \cdot 64 \cdot 62 \dots 2} \cos^{66} \lambda \theta \right] - \frac{67 \cdot 65 \cdot 63 \dots 3 \cdot 1}{68 \cdot 66 \cdot 64 \dots 4 \cdot 2} \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\lambda \theta}{2} \right).$$

The function $f(\theta)$ is represented graphically in Figure 2.

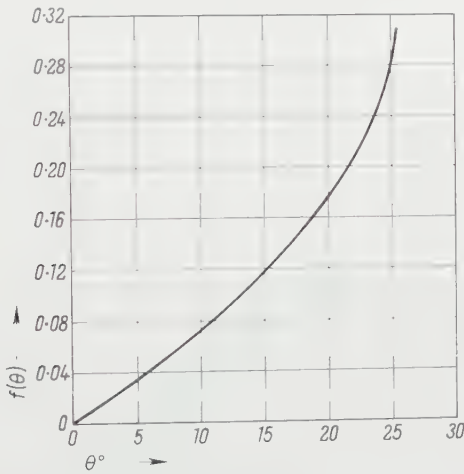


Figure 2

If we now assume the Mach number of the incoming stream to be unity, i. e., $Ma_1 = 1$, the initial Mach line will be perpendicular to the first wall (Figure 1d) and δ_0 is the thickness of the boundary layer at the point O_2 on the first wall; and

its value [9] is $\delta_0 = 0.632 \sqrt{\nu_{s0} \kappa C / c^*}$, κ being the distance of the point O_2 from the leading edge. Further, the sheering stress at the point O_2 is

$$\tau_w = \frac{\mu_{s0} c^*}{3.02} \sqrt{\frac{c^* C}{\nu_{s0} \kappa}}$$

and is same as that from the right hand side obtained by putting $\theta = 0$, i. e., to the value

$$\tau_{w_{\theta=0}} = \frac{2 c^* \mu_\infty \dot{p}_{s0} C}{\delta_0 \varrho_{s0} R T_\infty}.$$

Thus, $p_{s0} \mu_{\infty} / R T_{\infty} = 0.095 \mu_{s0} \varrho_{s0}$, where the suffix so represents values at the outer edge of the boundary layer. This reduces equation (22) to

$$\delta^2 = \left[0.399 \nu_{s0} \frac{\chi C}{c^*} + 7.2 \nu_{s0} \nu_{ws} \frac{C}{c^*} f(\theta) \right] \cos^{71} \lambda \theta. \quad (23)$$

However, we can rewrite equation (23) as

$$\frac{\delta}{\delta_0} = \left[1 + \frac{1}{\chi} f(\theta) \right]^{1/2} \cos^{71/2} \lambda \theta, \quad (24)$$

where

$$\frac{1}{\chi} = 17.5 \frac{\nu_{ws}}{\chi}. \quad (25)$$

Relation (24) is shown in Figure 3 for different values of χ and θ . Further we assume that

$$\nu_{ws} = b \cot \frac{\varphi}{2} \sigma, \quad (26)$$

σ being the deviation factor by which the Prandtl-Meyer stream line differs from a circular arc. Its appropriate values for different Ma'_2 (i. e., for different φ) can

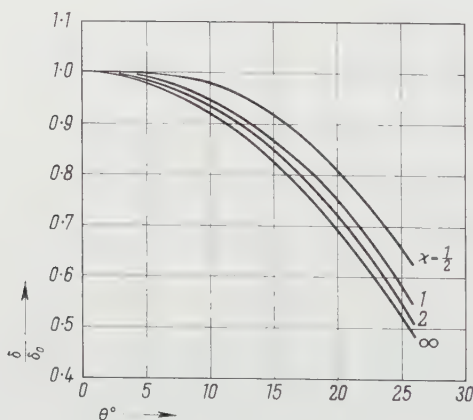


Figure 3

be determined from the equation of the stream line. The limiting value of σ in the case of a circular arc is unity.

Taking $h = \delta_0 / \delta$ and

$$\delta_0 = 0.632 \sqrt{\frac{\nu_{s0} (l - b) C}{c^*}}$$

and replacing θ by ω , we obtain from (24), (25), and (26), for a given expansion

Ma'_2 (i. e., φ) the coordinates of the virtual point O as given by

$$\left(\frac{b}{\delta_0} \right) = \frac{1}{0.632} \sqrt{\frac{Re}{C}} \left\{ \frac{(1 - h^2 \cos^2 \lambda \omega)}{\left[(1 - h^2 \cos^2 \lambda \omega) + 17.5 h^2 f(\omega) \cos^2 \lambda \omega \cot \frac{\varphi}{2} \sigma \right]^{1/2}} \right. \\ \left. \times \frac{1}{\left[17.5 h^2 f(\omega) \cos^2 \lambda \omega \cot \frac{\varphi}{2} \sigma \right]^{1/2}} \right\} \quad (27)$$

$$\left(\frac{r_{ws}}{\delta_0} \right) = \frac{1}{0.632} \sqrt{\frac{Re}{C}} \left\{ \frac{(1 - h^2 \cos^2 \lambda \omega) \cot \frac{\varphi}{2} \sigma}{\left[(1 - h^2 \cos^2 \lambda \omega) + 17.5 h^2 f(\omega) \cos^2 \lambda \omega \cot \frac{\varphi}{2} \sigma \right]^{1/2}} \right. \\ \left. \times \frac{1}{\left[17.5 h^2 f(\omega) \cos^2 \lambda \omega \cot \frac{\varphi}{2} \sigma \right]^{1/2}} \right\} \quad (28)$$

where $1 < h < \sec^{1/2} \lambda \theta$. The relations (27) and (28) are numerically evaluated for different values of Ma'_2 .

From PRANDTL-MEYER's expansion, it is easily seen that if $Ma'_2 = 1.093$, then, $\varphi = 1.4^\circ$, $\omega = 26^\circ$, $\sigma = 1.1$ [10], $f(\omega) = 0.3$ (from Figure 2), $h = 1.84$ (from Figure 3, for $\chi = 2$, say); and similarly for other Ma'_2 . The typical Reynolds number in the case of laminar flow without separation [11] are 10^5 and 10^6 . In the following table the value of REYNOLDS' number has been taken to be 10^6 .

Ma'_2	1.03	1.06	1.093
$\frac{b}{\delta_0}$	1.06	2.06	4.5
$\frac{r_{ws}}{\delta_0}$	3.3×10^2	4.22×10^2	4.75×10^2

Complete Solution of the Expansive Flow

$$v = v_0 (2\eta - \eta^2) = \lambda q_{max} \cos \lambda \theta (2\eta - \eta^2), \quad p = p_0 = p_{s0} \cos^{2\beta+2} \lambda \theta.$$

From equation (16)

$$\frac{p}{R T} = \frac{p_{s0} \cos^{2\beta+2} \lambda \theta}{R \left[T_0 + \frac{v_0^2}{2 C_p} (1 - 2\eta - \eta^2) \right]}.$$

From equation (14)

$$\mu = C \mu_\infty \frac{T}{T_\infty} = C \frac{\mu_\infty}{T_\infty} \left[T_0 + \frac{v_0^2}{2 C_p} (1 - 2\eta - \eta^2) \right].$$

From equation (12)

$$u = \frac{\varrho_0 \delta}{2 v_0 (1 - \eta) \varrho} \left[\frac{1}{r \varrho} (2\beta + 2) \lambda p_{s0} \cos^{2\beta+1} \lambda \theta \sin \lambda \theta - C \frac{\mu_\infty 2 v_0 p_0}{T_\infty \varrho_0^2 \delta^2} \right. \\ \left. + \frac{\lambda^2}{r} v_0 (2\eta - \eta^2)^2 q_{max} \sin \lambda \theta \right].$$

Further Calculation with a Different Velocity Profile

Here we assume a different velocity profile, namely $v/v_0 = \Phi(\eta)$, where $\Phi = C_1 \eta + C_2 \eta^2 + C_3 \eta^3$, a third degree polynomial in η , which becomes

$$\Phi(\eta) = 3\eta - 3\eta^2 + \eta^3,$$

under the boundary conditions $\eta = 0$, $\Phi = 0$ and $\eta = 1$, $\Phi = 1$, $\Phi' = 0$ and $\Phi'' = 0$. Starting with this velocity profile, the differential equation (19) for δ , in the present case, becomes

$$\frac{d\delta^2}{d\theta^2} + \delta^2 \left[\frac{26}{3} \cdot \frac{1}{v_0} \cdot \frac{dv_0}{d\theta} + \frac{2}{\varrho_0} \cdot \frac{d\varrho_0}{d\theta} + \frac{56}{3} \cdot \frac{u_0}{v_0} \right] = \frac{56}{\varrho_0^2} \frac{r_w}{v_0} \mu_w,$$

the solution of which can be written as

$$\delta^2 = \left[0.399 v_{s0} x \frac{C}{c^*} + 9.563 \frac{C}{c^*} f(\theta) \right] \cos^{29.5/3} \lambda \theta,$$

where

$$\begin{aligned} f(\theta) = & \left[\frac{\sin \lambda \theta}{\frac{322}{3} \cos^{322/3} \lambda \theta} \right] \\ & \times \left[1 + \frac{319}{316} \cos^2 \lambda \theta + \frac{319 \cdot 313}{316 \cdot 310} \cos^4 \lambda \theta + \dots + \frac{319 \cdot 313 \dots 3}{316 \cdot 310 \dots 2} \cos^{108} \lambda \theta \right] \\ & - \frac{319 \cdot 313 \cdot 307 \dots 3 \cdot 1}{322 \cdot 316 \cdot 310 \dots 4 \cdot 2} \cdot \frac{3}{2} \\ & \times \left[\cos^{2/3} \lambda \theta - \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos^{8/3} \lambda \theta}{4} - \frac{1}{2! \cdot 2} \cdot \frac{\cos^{14/3} \lambda \theta}{7} \dots \infty \right]. \end{aligned}$$

The complete solution of the expansion in the present case is given by

$$v = v_0 (3\eta - 3\eta^2 + \eta^3),$$

$$p = p_{s0} \cos^{2\beta+2} \lambda \theta,$$

$$\varrho = R \left[T_0 + \frac{v_0^2}{2 C_p} (1 - 3\eta - 3\eta^2 + \eta^3) \right],$$

$$\mu = C \frac{\mu_\infty}{T_\infty} \left[T_0 + \frac{v_0^2}{2 C_p} (1 - 3\eta - 3\eta^2 + \eta^3) \right],$$

$$\begin{aligned} u = & \frac{\varrho_0 \delta}{3 v_0 (1 - \eta)^2 \varrho} \left[\frac{1}{r \varrho} (2\beta + 2) \lambda p_{s0} \cos^{2\beta+1} \lambda \theta \sin \lambda \theta - C \frac{\mu_\infty}{T_\infty} \cdot \frac{6 v_0 p_0}{\varrho_0^2 \delta^2} (1 - \eta) \right. \\ & \left. + \frac{\lambda^2}{r} v_0 (3\eta - 3\eta^2 + \eta^3)^2 q_{max} \sin \lambda \theta \right]. \end{aligned}$$

REFERENCES

- [1] TH. VON MEYER, *Foundations of High Speed Aerodynamics* (Dover Publications), pp. 51.
- [2] M. ROY, Proc. nat. Inst. Sci. of India [A] 21, no. 3, 155 (1955).

- [3] L. SANYAL, Bull. Calcutta math. Soc. 47, no. 2, 65 (1955).
- [4] D. R. CHAPMAN and M. W. RUBESIN, J. aero. Sci. 16, 547 (1949).
- [5] TH. VON KÁRMÁN, Volta Congress (Roma 1935), pp. 216.
- [6] H. W. EMMONS and J. G. BRAINERD, J. appl. Mech. 8, A-105 (1941).
- [7] L. HOWARTH, *Modern Developement in Fluid Mechanics-High Speed Flow*, vol. 1 (Oxford), pp. 169.
- [8] G. KUERTY, *Advances in Applied Mechanics*, vol. 2 (Academic Press, New York), pp. 46.
- [9] G. M. LOW, N.A.C.A. T.N. 2531.
- [10] NAVORD, *Hand-Book of Supersonic Aerodynamics*, vol. 2, A Bureau of Ordnance Publication (Washington).
- [11] H. W. LIEPMANN, A. ROSHKO, and S. DHAWAN, N.A.C.A. T.N. 2334.

Zusammenfassung

Die Wirkung der Reibung auf die Prandtl-Meyer-Expansion wird untersucht mit Hilfe eines einfachen mathematischen Modells und mit der üblichen Grenzschichtapproximation nach POHLHAUSEN.

(Received: January 2, 1959.)

Eine Klasse inhomogener Bessel-Gleichungen

VON VÁCLAV VODIČKA, Pilsen, Tschechoslovakei

Der als Beispiel gewählte Typus von Gleichungen enthält als einen Spezialfall auch die gewöhnliche Gleichung für modifizierte Besselsche Funktionen. Die technische Bedeutung unserer Ergebnisse soll am einfachen Problem aus der Wärmeleitung erläutert werden.

1. Allgemeines

Es sei

$$L_x(y) = \frac{d^2y}{dx^2} + p(x) \frac{dy}{dx} + q(x) y \quad (1)$$

und $f(x, \omega)$ irgendeine Funktion von x und ω .

Setzt man

$$g(x, \omega) = \int L_x [f(x, \omega)] d\omega, \quad (2)$$

so ist für beliebige reelle ϑ_0, ϑ der Ausdruck

$$F(x; \vartheta_0, \vartheta) = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} f(x, \omega) d\omega \quad (3)$$

augenscheinlich ein partikuläres Integral der inhomogenen Gleichung

$$L_x(y) = g(x, \vartheta) - g(x, \vartheta_0). \quad (4)$$

Die Anwendung dieser fast trivialen Bemerkung soll nun am Spezialfall

$$L_x(y) = \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{dy}{dx} - y \quad (5)$$

gezeigt werden.

Beispiel 1. Unter Zugrundelegung von (5) setze man

$$f(x, \omega) = \sin x \omega.$$

Eine kleine Rechnung gibt dann nach (2) und (3)

$$g(x, \omega) = \frac{1}{x^3} [(\pi^2 x^2 + x^2 \omega^2 - 1) \cos \omega x - \omega x \sin \omega x],$$

$$F(x; \vartheta_0, \vartheta) = \frac{1}{x} (\cos \vartheta_0 x - \cos \vartheta x),$$

so dass zum Beispiel die Gleichung

$$L_x(y) = \frac{1}{x^3} [(\pi^2 x^2 + x^2 - 1) \cos \pi x - \pi x \sin \pi x - x^2 + 1]$$

den Ausdruck (I_0, K_0 sind natürlich modifizierte Besselsche Funktionen, C_1, C_2 beliebige Festwerte)

$$y = C_1 I_0(x) + C_2 K_0(x) + \frac{2}{\pi} \sin^2 \frac{\pi x}{2}$$

zur allgemeinen Lösung hat.

Von diesem verhältnismässig künstlichen Spezialfalle, welcher nur aus methodischen Gründen eingeführt worden ist, gehen wir nun zu mehr sinnvollen Erwägungen über.

Beispiel 2. Es sei – natürlich stets mit (5) –

$$f(x, \omega) = e^{x \cos \omega}$$

und damit

$$L_x[f(x, \omega)] = \frac{1}{x} (\cos \omega - x \sin^2 \omega) e^{x \cos \omega} = \frac{1}{x} \cdot \frac{d}{d\omega} (\sin \omega e^{x \cos \omega}).$$

Nach (2) und (3) haben wir in diesem Falle

$$g(x, \omega) = \frac{1}{x} \sin \omega e^{x \cos \omega}, \quad F(x; \vartheta_0, \vartheta) = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} e^{x \cos \omega} d\omega,$$

und der Ausdruck

$$y = C_1 I_0(x) + C_2 K_0(x) + \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} e^{x \cos \omega} d\omega \quad (6)$$

erscheint damit als allgemeine Lösung von

$$L_x(y) = \frac{1}{x} (\sin \vartheta e^{x \cos \vartheta} - \sin \vartheta_0 e^{x \cos \vartheta_0}). \quad (7)$$

Danach hat man zum Beispiel in

$$y = C_1 I_0(x) + C_2 K_0(x) + \int_0^{\vartheta} e^{x \cos \omega} d\omega$$

die allgemeine Lösung der Gleichung

$$L_x(y) = \frac{1}{x} \sin \vartheta e^{x \cos \vartheta}.$$

Es gibt Werte von ϑ_0 , ϑ , für welche sich (7) in die homogene Gleichung der modifizierten Besselschen Funktionen verwandelt. Dies gilt offenbar für

$$\vartheta_0 = m\pi, \quad \vartheta = n\pi; \quad m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

und die Tatsache

$$\int_{m\pi}^{n\pi} e^{x \cos \omega} d\omega = (n - m)\pi I_0(x); \quad m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

steht damit im vollen Einklang.

Beispiel 3. Es sei nun

$$L_x(y) = \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{dy}{dx} - \left(1 - \frac{v^2}{x^2}\right) y \quad (8)$$

und

$$f(x, \omega) = \sinh(x \cosh \omega - v \omega).$$

Es ergibt sich

$$\begin{aligned} L_x[f(x, \omega)] &= \left(\sinh^2 \omega - \frac{v^2}{x^2}\right) \sinh(x \cosh \omega - v \omega) + \frac{1}{x} \cosh \omega \cosh(x \cosh \omega - v \omega) \\ &\quad - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{d}{d\omega} [(x \sinh \omega + v) \cosh(x \cosh \omega - v \omega)] \end{aligned}$$

und nach (2), (3) ist daher

$$g(x, \omega) = \frac{1}{x^2} [(x \sinh \omega + v) \cosh(x \cosh \omega - v \omega)],$$

$$F(x; \vartheta_0, \vartheta) = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \sinh(x \cosh \omega - v \omega) d\omega.$$

Wir gelangen so zur Erkenntnis, dass der Ausdruck

$$y = C_1 I_v(x) + C_2 K_v(x) + \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \sinh(x \cosh \omega - v \omega) d\omega \quad (9)$$

die vollständige Lösung von

$$L_x(y) = \frac{1}{x^2} \left[(x \sinh \vartheta + \nu) \cosh (x \cosh \vartheta - \nu \vartheta) - (x \sinh \vartheta_0 + \nu) \cosh (x \cosh \vartheta_0 - \nu \vartheta_0) \right] \quad (10)$$

darstellt; L_x erklärt sich nach (8).

Im Gegenteil zu (7) enthält der Typus (10) nicht die zugehörige homogene Gleichung $L_x(y) = 0$.

Unser letztes Beispiel gehört zur Theorie gewöhnlicher (das heisst nicht modifizierter) Bessel-Gleichungen.

Beispiel 4. Es sei

$$L_x(y) = \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y, \quad (11)$$

und wählen wir in naheliegender Weise

$$f(x, \omega) = \cos(x \sin \omega - \nu \omega).$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} L_x[f(x, \omega)] &= \left(\cos^2 \omega - \frac{\nu^2}{x^2}\right) \cos(x \sin \omega - \nu \omega) - \frac{1}{x} \sin \omega \sin(x \sin \omega - \nu \omega) \\ &= \frac{1}{x^2} \cdot \frac{d}{d\omega} [(x \cos \omega + \nu) \sin(x \sin \omega - \nu \omega)], \end{aligned}$$

und wir erhalten

$$g(x, \omega) = \frac{1}{x^2} [(x \cos \omega + \nu) \sin(x \sin \omega - \nu \omega)],$$

$$F(x; \vartheta_0, \vartheta) = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \cos(x \sin \omega - \nu \omega) d\omega.$$

Es ist daher

$$y = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x) + \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \cos(x \sin \omega - \nu \omega) d\omega \quad (12)$$

die allgemeine Lösung der Gleichung

$$L_x(y) = \frac{1}{x^2} \left[(x \cos \vartheta + \nu) \sin(x \sin \vartheta - \nu \vartheta) - (x \cos \vartheta_0 + \nu) \sin(x \sin \vartheta_0 - \nu \vartheta_0) \right] \quad (13)$$

Der Leser gebe sich bitte Rechenschaft über die zahlreichen Spezialwerte von ϑ_0 , ϑ und ν , wo sich (13) in die homogene Bessel-Gleichung $L_x(y) = 0$ verwandelt. Er ziehe die Konsequenzen für die zugehörigen, in (12) vorkommenden partikulären Lösungen.

Unsere Betrachtungen liessen sich offenbar zu einem System ausbauen und auf andere (nicht notwendig Besselsche) inhomogene Gleichungen erweitern, wobei man auf ganz neue, merkwürdige Tatsachen kommen würde. Jedoch ist das an

dieser Stelle nicht beabsichtigt – das Ziel dieser Arbeit ist es nämlich, nur eine Grundlage zur mathematischen Behandlung gewisser vom Verfasser verfolgter Fragen aus der Wärmeleitung zu schaffen. Indessen sei im folgenden Abschnitt mindestens eine elementare Frage aufgeworfen, wo unsere Ausführungen zur Geltung kommen.

2. Momentane Wärmequelle längs eines Kreisbogens

Es spiele sich zur Zeit t_0 längs des Kreisbogens

$$\xi - x^{(0)} = R \cos \psi, \quad \eta - y^{(0)} = R \sin \psi, \quad \zeta - z^{(0)} = 0, \quad \varepsilon_0 \leq \psi \leq \varepsilon \quad (14)$$

eine momentane Wärmeexplosion von konstanter Stärke σ ab. In einem allseitig unendlichen, homogenen und isotropen Medium mit physikalischen Festwerten λ , c , ϱ entsteht dadurch das Temperaturfeld

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, z; t) &= \frac{R \sigma}{8 a^3 \pi^{3/2}} \cdot \frac{h(t; t_0)}{(t - t_0)^{3/2}} e^{-[w^2 + (z - z^{(0)})^2 + R^2]/4 a^2 (t - t_0)} \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} e^{\kappa \cos(\psi - \psi_0)} d\psi; \\ a^2 &= \frac{\lambda}{c \varrho}, \quad h(t; t_0) = \frac{1}{2} [1 + \operatorname{sgn}(t - t_0)], \quad \kappa = \frac{R w}{2 a^2 (t - t_0)}, \\ \cos \psi_0 &= \frac{x - x^{(0)}}{w}, \quad \sin \psi_0 = \frac{y - y^{(0)}}{w}, \quad w^2 = (x - x^{(0)})^2 + (y - y^{(0)})^2. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Durch Einführung der neuen Integrationsvariablen $\omega = \psi - \psi_0$, $d\omega = d\psi$ erscheint unsere Temperaturfunktion (15) in der Form

$$u(x, y, z; t) = \frac{R \sigma}{8 a^3 \pi^{3/2}} \cdot \frac{h(t; t_0)}{(t - t_0)^{3/2}} e^{-[w^2 + (z - z^{(0)})^2 + R^2]/4 a^2 (t - t_0)} \int_{\varepsilon_0 - \psi_0}^{\varepsilon - \psi_0} e^{\kappa \cos \omega} d\omega. \quad (16)$$

Ist ψ_0 konstant, das heisst, interessiert man sich um die Temperaturverhältnisse in irgendeiner Ebene des Büschels mit der Achse $x = x^{(0)}$, $y = y^{(0)}$, so stellt nach (6) und (7) das bestimmte Integral aus (16) eine partikuläre Lösung der inhomogenen Bessel-Gleichung

$$\frac{d^2 y}{d\kappa^2} + \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{dy}{d\kappa} - y = \frac{1}{\kappa} [\sin(\psi_0 - \varepsilon_0) e^{\kappa \cos(\psi_0 - \varepsilon_0)} + \sin(\varepsilon - \psi_0) e^{\kappa \cos(\varepsilon - \psi_0)}] \quad (17)$$

dar. So kommen unsere obigen Erwägungen zur Geltung.

Im allgemeinen ist jedoch das Temperaturfeld (16) ungewöhnlich kompliziert. Nur im Falle $\varepsilon = \varepsilon_0 + 2\pi$ kommen wir auf die elementare Formel¹⁾ für eine ringförmige Wärmequelle, während sich schon eine Halbkreisquelle mit ihrer Temperaturfunktion

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, z; t) &= \frac{R \sigma}{8 a^3 \pi^{3/2}} \cdot \frac{h(t; t_0)}{(t - t_0)^{3/2}} e^{-[w^2 + (z - z^{(0)})^2 + R^2]/4 a^2 (t - t_0)} \\ &\quad \times \left[\pi I_0(\kappa) + 2 \int_0^{\psi_0 - \varepsilon_0} \sinh(\kappa \cos \omega) d\omega \right] \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

als recht kompliziert erweist.

¹⁾ H. S. CARSLAW und J. C. JAEGER, *Conduction of Heat in Solids* (Oxford 1947), S. 220.

Der Leser möge selbst das Studium der entsprechenden Gleichung (17) vornehmen und sich namentlich mit dem Temperaturzustand in den Ebenen $\psi_0 - \varepsilon_0 = 0$, $\pi/2$, π näher befassen.

Summary

New particular solutions are given for certain types of nonhomogeneous Bessel equations. Previous considerations allow of considerable extension and their technical importance is illustrated by an example in heat conduction.

(Eingegangen: 4. April 1959.)

Varia – Miscellaneous – Divers

6th National Symposium on Reliability and Quality Control in Electronics, Statler Hilton Hotel, Washington, D. C., USA.

In Washington findet vom 11. bis 13. Januar 1960 das 6. *National Symposium on Reliability and Quality Control* statt. Der Zweck dieser Tagung, welche vom Institute of Radio Engineers (IRE) und anderen wissenschaftlichen Vereinigungen durchgeführt wird, ist, Spezialisten, welche auf dem Gebiet der Betriebssicherheit und Qualitätsüberwachung über Erfahrung verfügen, zusammenzuführen. In Vorträgen und Diskussionen wird ein ausgiebiger Gedankenaustausch gepflegt. Programme und Anmeldeformulare sind zu beziehen bei C. M. BEYER, OASD, Room 3D1031, The Pentagon, Washington 25, D. C., USA.

Buchbesprechungen – Book Reviews – Notices bibliographiques

Elementare Informationstheorie. VON HEINZ ZEMANEK (R. Oldenbourg, Wien und München 1959). 120 S., 28. Abb., 2 Tabellen.

Der Verfasser versucht im vorliegenden Büchlein die Informationstheorie in einer dem Ingenieur zugänglicheren Form darzustellen. Er unterscheidet zunächst 2 Hauptprinzipien, welche getrennt betrachtet werden können. Zunächst wird das logische Netz entwickelt, das heisst die Form, in welcher sich «Information» ausdrücken lässt. Dazu gehören die verschiedenen Kodierungsmöglichkeiten. Eine umfangreichere Betrachtung ist der Information als statistischer Vorgang gewidmet. Die Entwicklung des optimalen realisierbaren Codes, zum Beispiel mit Binär-Zeichen, wird auf geometrischem Wege in Abweichung zu SHANNON entwickelt, wobei die angegebene Methode eine kleinere Redundanz ergibt. Beispiele über Informationsgehalt werden aus der Sprache und der Biologie besprochen. Ein drittes Kapitel ist der statistischen Zuordnung gewidmet, welche eine Rolle spielt bei der gestörten Übermittlung, das heisst bei der Berechnung der maximalen Kanalkapazität eines Übertragungsvorganges bei Anwesenheit von Störungen. Der Übergang

auf kontinuierliche Vorgänge und eine kurze Diskussion der Quantisierung eines kontinuierlichen Vorganges beschliessen den Text. Angefügt ist ein recht vollständiges Schrifttumsverzeichnis und 2 Tabellen.

Das Büchlein bietet auf engem Raum eine sehr gute Einführung in die Informationstheorie. Etwas störend scheinen zunächst die zahlreichen neu eingeführten Begriffe mit ihren zugehörigen Zeichen zu sein, sie erleichtern aber doch begrifflich die Trennung des Informationsgehaltes vom Entscheidungsgehalt eines gewählten Kodes für eine bestimmte Informationsquelle.

H. WEBER

Handbuch der Physik - Encyclopedia of Physics. Herausgegeben von S. FLÜGGE und E. CREUTZ. Band 45, 2. Teil: *Instrumentelle Hilfsmittel der Kernphysik* (Springer Verlag, Berlin 1958). 544 S., 293 Abb.; DM 128.—.

In dem in englischer Sprache abgefassten Band vermitteln 12 wohlbekannte Autoren ihre Erfahrungen auf dem Gebiet der Detektoren und Nachweismittel für geladene und ungeladene Teilchen sowie für elektromagnetische Strahlung. Die Wechselwirkungen von Partikeln und Strahlung mit Materie werden an verschiedenen Stellen des Buches diskutiert. Dem Gebiet der *Gaszähler* sind drei Kapitel gewidmet, die sich mit Ionisationskammern, Proportional- und Auslösezählern befassen. Nach einem theoretischen Überblick über die Vorgänge im Kammmergeas werden eine Fülle von Einzelheiten über die technische Ausführung solcher Messgeräte mitgeteilt. Spezielle Anforderungen an Detektoren dieser Art, wie sie zum Beispiel zum Nachweis sehr schwacher Intensitäten, zum Zählen von Gasproben, Messung von Teilchenspektren usw. gestellt werden, sind ausführlich diskutiert.

Das Kapitel über *Scintillations- und Cerenkow-Zähler* ist relativ knapp gehalten. Ein Überblick vermittelt Kenntnisse über die Wirkungsweise und die verschiedenen Konstruktionen von Photomultipliern mit Berücksichtigung der zurzeit handelsüblichen Typen. Die wichtigsten Kristalle, wie NaI, LiI, CsHal, sowie einige organische Phosphore werden im Hinblick auf ihre Herstellung, Lichtausbeuten, Zerfallszeiten usw. besprochen. Edelgase als Szintillatoren werden dabei nicht berücksichtigt. Auch vermisst man einen Hinweis auf diejenigen Vorgänge, die für die Konversion der im Kristall dissipierten Energie in Licht verantwortlich sind. Technische Probleme, wie sie sich bei der Kombination eines Phosphors mit einem Elektronenvervielfacher stellen, so zum Beispiel die Ausbildung von Reflektoren und Lichtleitern, werden kurz berührt. Bei der Behandlung der Anwendungsmöglichkeiten sind einige neuere Methoden, wie die Kombination eines schnellen und eines langsamen Phosphors zu einem sogenannten Phoswich oder die Ausnutzung der Abhängigkeit der Zerfallskonstanten einiger Szintillatoren von der Ionisationsdichte, nicht erwähnt. Der Abschnitt über Cerenkow-Zähler wird durch eine alles Wesentliche enthaltende Charakterisierung der Eigenschaften der Cerenkow-Strahlung eingeleitet. Bei der Diskussion der spezifischen Eignung des Cerenkow-Zählers zum Beispiel als Schwellendetektor, Zähler zur Bestimmung von Teilchengeschwindigkeiten, Teilchenladungen und Flugrichtungen wird dem Gebiet der Hochenergiephysik besondere Aufmerksamkeit gewidmet. Im Kapitel über den *Nachweis von Neutronen* werden diejenigen Streuvorgänge und Kernreaktionen besprochen, die zur Registrierung von Neutronen benutzt werden. Die apparativen Hilfsmittel, wie Gas- und Szintillationszähler, Wilson- und Blaskammern, photographische Emulsionen sowie die Aktivierungsmethode, werden hinsichtlich ihrer spezifischen Brauchbarkeit bei diversen physikalischen Problemen untersucht. Aus der Fülle der Anwendungsmethoden werden die Messung von Neutronenflüssen, die Bestimmung von Quellenstärken, die Neutronendosimetrie und die Aufnahme von Energieverteilungen besonders hervorgehoben. Auch an

dieser Stelle werden Probleme der Hochenergiephysik separat behandelt. Im Hinblick auf die Wichtigkeit der *Koinzidenztechnik* in bezug auf sämtliche mit Detektoren zusammenhängenden Probleme wird dieser Methodik ein separates Kapitel gewidmet, in dem zählstatistische und elektronische Fragen erläutert werden.

Theoretische Betrachtungen über die durch ionisierende Teilchen in übersättigten Dämpfen ausgelöste Tröpfchenbildung und über die Erzeugung einer Übersättigung durch adiabatische Expansion leiten das Kapitel über *Nebelkammern* ein. Anhand der Beschreibung einiger typischer Expansionskammern wird der Leser mit zahlreichen technischen Einzelheiten vertraut gemacht. Zur Kenntnis der Diffusionsnebelkammer vermitteln die Autoren einen Abriss der Theorie dieses Instrumentes und die Beschreibung der praktischen Ausführung einer solchen Kammer. Die Aufzählung der zahlreichen und wohlbekannten Anwendungen ist stets von wertvollen Hinweisen auf die Auswertung und die Interpretation der Messresultate begleitet.

Die *Blasenammer* beschreibt der Erfinder dieses wertvollen Instrumentes in einem kurz abgefassten und doch sehr reichhaltigen Kapitel, in dem er sich mit den Vorgängen in der Kammerflüssigkeit und den verschiedenen Konstruktionsmöglichkeiten auseinandersetzt. Wie an anderen Stellen des Buches fehlt es auch hier nicht an Hinweisen auf zahlreiche Anwendungsmöglichkeiten.

Ein recht umfangreiches Kapitel beschäftigt sich mit der Anwendung der *Photoemulsionstechnik* in der Kern- und Partikelphysik. Die Vorbereitung der Emulsionen zur Exposition, die Entwicklungsmethodik, das mikroskopische Auswertungsverfahren und die physikalische Interpretation von Spuren werden detailliert behandelt. Daneben findet man eine Fülle von numerischen Informationen, wie etwa Energie-Reichweite-Beziehungen, Schrumpfungsfaktoren usw.

Die äussere Gestaltung des Buches entspricht dem Habitus der bekannten Flüggeschen Handbücher. Es umfasst 544 Seiten und enthält 293 Figuren.

Es ist erfreulich, dass auch der Experimentierkunst des Physikers im Rahmen dieser Handbuchreihe gebührend Rechnung getragen wird.

F. HEINRICH

Physikalische Dynamik der Atmosphäre. VON ALBERT UND FRIEDRICH DEFANT (Akademische Verlagsgesellschaft mbH., Frankfurt a. M. 1958). 527 S., 139 Abb.; DM 60.—.

Unter den wenigen deutschen Lehrbüchern der theoretischen Meteorologie fehlte bisher ein Werk, das planetarische Probleme, wie die allgemeine Zirkulation der Atmosphäre und die Grundlagen der numerischen Prognose (Vorausberechnung des Strömungsfeldes mit Hilfe elektronischer Rechenautomaten), behandelt. Diese Lücke schliesst das vorliegende Buch der beiden österreichischen, als Forscher und Hochschullehrer auf dem Gebiete der Meteorologie und Ozeanographie bekannten Autoren Prof. A. und FR. DEFANT (Vater und Sohn).

Der Titel ist offenbar in Anlehnung an die *Physikalische Hydrodynamik* von V. BJERKNES gewählt worden und weist auf die innige Verflechtung verschiedener physikalischer Disziplinen bei der theoretischen Deutung atmosphärischer Vorgänge hin.

Der Stoff ist übersichtlich gegliedert. Bis zum 7. Kapitel entspricht der Aufbau einigermaßen dem Herkömmlichen: Statik, Thermodynamik, Stabilität vertikaler Luftsäulen, Strahlung, Kinematik, Bewegungsgleichungen auf der rotierenden Erde, einfache Horizontalströmungen. In den folgenden Kapiteln werden neuere Begriffe behandelt: Zirkulation, Vorticity, Diskontinuitätsflächen, Turbulenz, Austausch und Reibung. Lebhaft zu begrüßen ist sodann die eingehende Darstellung der atmosphärischen Energetik, der allgemeinen Zirkulation und der numerischen

Vorhersage. Diese neuen, in Entwicklung begriffenen Teilgebiete lassen sich zurzeit noch kaum in ein geschlossenes Lehrgebäude der atmosphärischen Dynamik einordnen; doch haben sich die Autoren bemüht, einen umfassenden Überblick über den heutigen Stand der Theorien zu geben. Das letzte Kapitel ist den atmosphärischen Gezeiten gewidmet.

Der Auswahl des Dargebotenen darf man – von Einzelheiten abgesehen – befriedigt zustimmen. Die Formelsprache bleibt durchwegs elementar. Leider haben sich in Text und Formeln einige Vorzeichen- und andere Fehler eingeschlichen, die bei einer Neuauflage ausgemerzt werden sollten. Der sprachlichen Formulierung ist unseres Erachtens zu wenig Sorgfalt geschenkt worden; einige Sätze wirken geradezu grotesk.

Trotz dieser Schönheitsfehler ist dem Lehrbuch wegen seines umfassenden Inhaltes eine weite Verbreitung an meteorologischen und geophysikalischen Instituten, bei Fachleuten und Studierenden zu wünschen. Der Verlag hat für einen sehr gediegenen Druck gesorgt.

W. KUHN

Ballistik. Von R. E. KUTTERER, 3. Aufl. (Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1959). 304 S., 176 Fig., 21 Tabellen; DM 38.–.

Seit dem Erscheinen der ersten Auflage des Buches von KUTTERER im Jahre 1942 hat die Ballistik dank der Entwicklung der Raketentechnik und der Elektronik bedeutende Fortschritte gemacht, und zwar sowohl im Hinblick auf ihre Aufgaben als auch in bezug auf ihre theoretischen und experimentellen Methoden. Aus diesem Grunde war eine Neuauflage dringend erforderlich und erwünscht. Der Verfasser hat in der kürzlich erschienenen dritten Auflage den zahlreichen Neuerungen Rechnung getragen und nicht nur die einzelnen Kapitel erweitert, sondern auch eine Reihe neuer Kapitel hinzugefügt, so dass nun wieder ein modernes einführendes Werk über Ballistik vorliegt. Ein erster Abschnitt befasst sich mit den Geschossbahnen im luftleeren und luftgefüllten Raum sowie der Pendelung und dem damit zusammenhängenden Problem der Stabilität eines Geschosses. Sehr eingehend sind dann die messtechnischen Probleme (Geschwindigkeit, Flugzeit, Rotation, Flugbahnelemente usw.) behandelt. Die Berechnung und Messung der innerballistischen Größen und die Frage der Leistungssteigerung einer Waffe kommen im zweiten Abschnitt zur Sprache. Der letzte Abschnitt schliesslich geht auf die Innenballistik und die einfacheren Fälle der Aussenballistik von Raketen ein. Das Werk von KUTTERER – das mit nahezu 200 Literaturangaben ein eingehenderes Studium mancher Sonderfragen ermöglicht – hebt vor allem die experimentelle Ballistik und die messtechnischen Probleme hervor. Nicht näher behandelt sind dagegen beispielsweise die Flugbahnstörungen, Extremalprobleme bei Raketenflugbahnen und die Ballistik interkontinentaler Raketen. Das großzügig ausgestattete Buch wird nicht allein den Ballistiker interessieren, sondern dürfte auch wegen den zahlreichen speziellen Messmethoden zur Untersuchung kurzzeitiger oder unter extremen Bedingungen vor sich gehender Vorgänge für manchen Physiker und Ingenieur von einiger Bedeutung sein.

E. ROTH-DESMEULES

Dynamische Vorgänge in linearen Systemen der Nachrichten- und Regelungstechnik. Von H. KAUFMANN (R. Oldenbourg München 1959). 208 S., 96 Abb.; DM 26.50.

Der Autor stellt auf engstem Raum alle modernen grundlegenden Betrachtungen an, wie Gewichtsfunktion und Frequenzgang als Kennzeichnung der Netzwerkeigenschaften im Zeit- und Frequenzbereich, Übertragungsfunktion und Berechnung der zugehörigen Gewichtsfunktion, Minimalphasennetzwerk mit den Zusammen-

hängen zwischen Phase und Betrag, Bode-Diagramm des Frequenzganges, Stabilitätskriterien, Approximationsverfahren für die Analyse und Synthese von Netzwerken, Kennwerte von Übergangsvorgängen, Systeme mit Abtastung. Es wird dabei die richtige Tendenz befolgt, das zeitliche Verhalten mit dem Frequenzgang parallel darzustellen. Für den Ingenieur besonders wertvoll ist die eingehende Behandlung von wirkungsvollen Näherungsverfahren zur Synthese von Netzwerken, sei es auf Grund des zeitlichen Verhaltens oder des Frequenzganges. Erfreulicherweise wurde die besonders in Amerika gepflegte Methode der Polortskurven für den geschlossenen Kreis eines Regelsystems auf Grund der Pole und Nullstellen des offenen Kreises eingehend behandelt. Ebenfalls neu ist das Kapitel Systeme mit Abtastung, welche mittels der Z-Transformation untersucht werden. Die Anwendung eines Digitalrechners im Regelkreis wird dabei kurz gestreift. Tabellen und die allereinfachsten Zuordnungen der Laplace-Transformation und der Z-Transformation bilden den Schluss. Offenbar war beim Abschluss des Manuskriptes das Buch von E. I. JURY, *Sampled Data Control Systems*, noch nicht zugänglich und fehlt deshalb im Literaturverzeichnis.

Die Darstellung des Stoffes ist sehr konzentriert, obgleich die meisten Betrachtungen anhand von Beispielen veranschaulicht werden. Einem Leser, der sich bereits etwas in das Gebiet hineingearbeitet hat, gereicht dies gerade zum Vorteil. Das Buch wird daher allen Fachleuten, welche gelegentlich mit diesen Dingen in Berührung kommen, ausserordentlich von Nutzen sein.

H. WEBER

Physics of Meteor Flight in the Atmosphere. VON ERNST J. ÖPIK. Interscience Tracts on Physics and Astronomy, Nr. 6 (Interscience Publishers, Inc., New York 1958). 174 S., 14 Abb.; \$1.95.

Das Studium der physikalischen Vorgänge beim Eintritt eines Körpers hoher Geschwindigkeit – wie im Falle der Meteore – in die dichtere Erdatmosphäre, dessen Hauptschwierigkeiten einerseits in den ungewöhnlichen Bedingungen und in der Tatsache, dass die Beschaffenheit dieser Körper weitgehend unbekannt ist und andererseits – wenigstens bis vor kurzem – in der Unmöglichkeit des direkten Experimentes liegen, begann im wesentlichen mit den Arbeiten von ÖPIK seit 1922. Trotz dieser Schwierigkeiten ist es in den letzten Jahrzehnten gelungen, anhand verschiedener Modelle dem Phänomen näherzukommen und zwischen Massenabnahme, Geschwindigkeit, Helligkeit eines Meteors, die durch dieses hervorgerufene Ionisation Beziehungen abzuleiten, die mit den Beobachtungen verglichen werden können. Im vorliegenden kleinen, aber inhaltsreichen Bändchen von ÖPIK sind die wichtigsten Gesichtspunkte zusammengefasst, und ein grosses numerisches Material für die verschiedenen Fälle ist in den über 50 Tabellen enthalten. Die Darstellung zeigt, dass heute noch keineswegs eine geschlossene Theorie dieser ausserordentlich komplexen Vorgänge möglich ist und man vielfach mit der richtigen Grössenordnung der Ergebnisse zufrieden sein muss, so dass der Forschung noch manche Aufgabe verbleibt. – Die verschiedenen Kapitelüberschriften lauten: *The Atmosphere. Classification and Physico-Chemical Properties of Meteors. Meteoroid Energy Transfer. Ablation. Details of Energy Transfer and Types of Ablation. Atomic Collisions. Meteor Radiation. Some Applications.* Die Monographie von ÖPIK – die eine empfindliche Lücke in der astrophysikalischen Literatur ausfüllt – dürfte übrigens nicht nur für den Astrophysiker von Interesse sein, sondern auch für den Ballistiker und den Aerodynamiker, insofern das Problem des Eintrittes eines Körpers in die Atmosphäre sowohl im Falle der interkontinentalen Raketen als auch bei der Wiedergewinnung von Raumraketen von grosser Bedeutung ist.

E. ROTH-DESMEULES